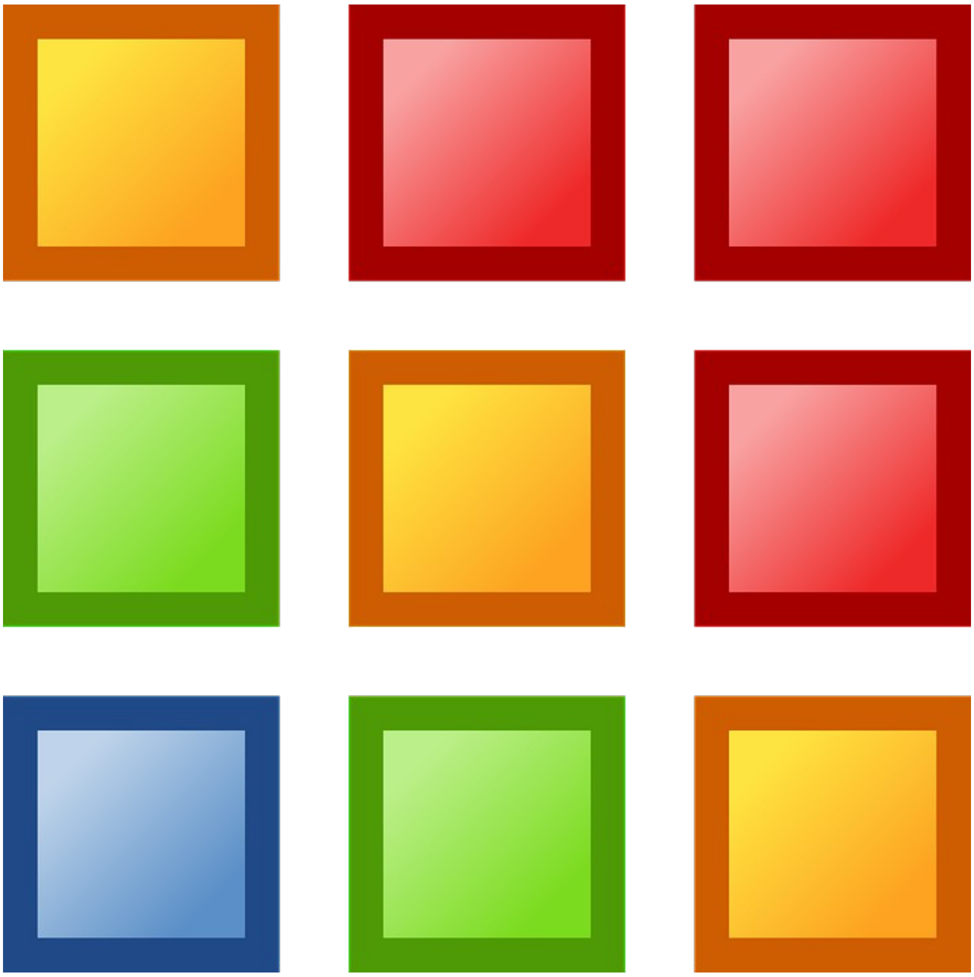
XUNTA DE GALICIA
CONSELLERÍA DE EDUCACIÓN, CIENCIA, UNIVERSIDADES E FORMACIÓN PROFESIONAL

AS TRANSFORMACIÓNS XEOMÉTRICAS NO PLANO



Formas. De uso gratuíto baixo a licenza de contido de Pixabay

Ámbito científico-tecnolóxico

Módulo 4

ÍNDICE

1. TRANSFORMACIÓNS XEOMÉTRICAS NO PLANO

Na vida diaria moitas decoracións fanse repetindo un motivo. Nos mosaicos da Alhambra, nas reixas, nos rosetóns das igrexas...

Se manipulamos un mapa nun móbil cos dous dedos: podemos desprazarnos, xirar o mapa, amplialo, reducilo... pero o mapa sempre é o mesmo.

Estas manipulacións son *transformacións xeométricas* porque manteñen as propiedades xeométricas máis básicas dos obxectos: lonxitudes, ángulos, áreas, volumes ou a proporción entre as lonxitudes, a forma...

En xeometría, as transformacións xeométricas no plano son fundamentais.

Unha **transformación xeométrica** é unha operación matemática que cambia a posición, forma ou tamaño dunha figura no plano. Estas transformacións aplícanse aos puntos que forman unha figura para obter unha nova figura a partir da orixinal.

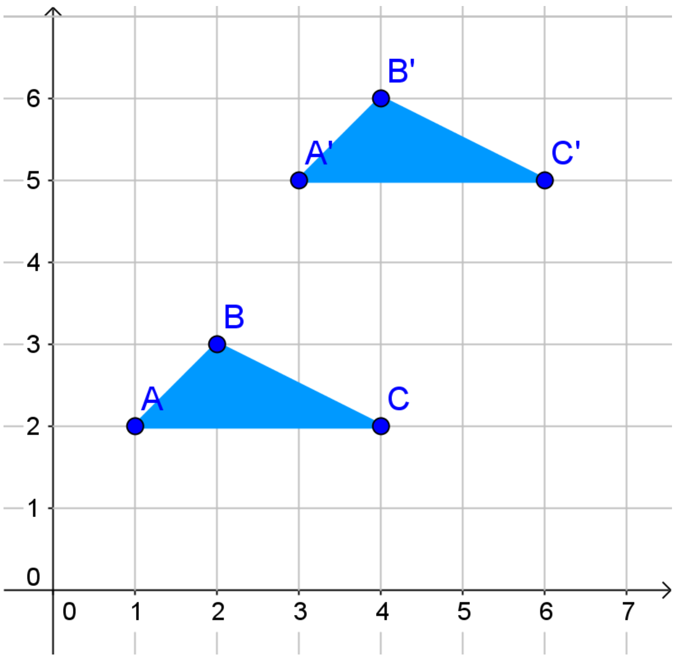
Un **movemento**, é un tipo especial de transformación xeométrica que conserva a forma e o tamaño da figura, só alterando a súa posición. Nun movemento no plano cambia a posición dunha figura, pero sen alterar a súa forma nin o seu tamaño. É dicir, a figura desprázase ou xira, pero conserva as súas dimensións e proporcións.

1.1 Tipos de transformacións no plano

Translación

A figura móvese en liña recta dun lugar a outro, sen xirar nin cambiar de tamaño.

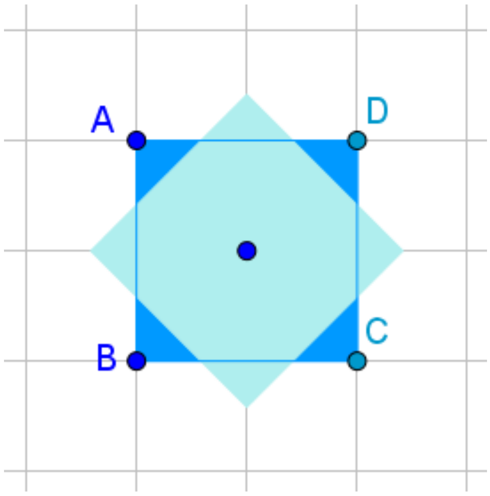
Exemplo: mover un triángulo 2 unidades á dereita e 3 cara arriba.



Xiro ou rotación

A figura xira ao redor dun punto fixo (chamado centro de rotación) un certo ángulo.

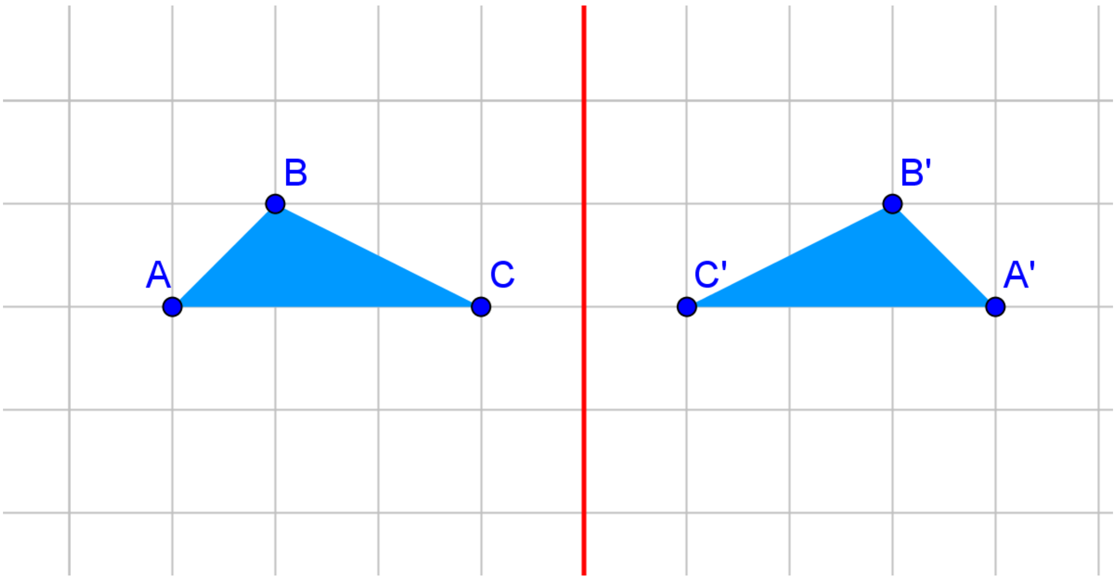
Exemplo: xirar un cadrado 45° ao redor do seu centro.



Simetría

A figura reflíctese coma nun espello respecto a un punto (centro de simetría) ou a unha liña (eixe de simetría).

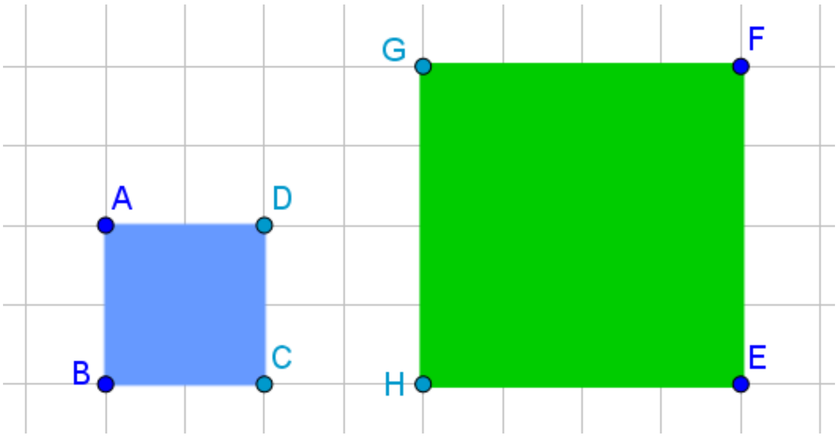
Exemplo: reflectir un triángulo respecto ao eixe y.



Semellanza

A figura ten a mesma forma pero non necesariamente o mesmo tamaño. É dicir, unha figura pode ser unha ampliación ou redución da outra.

Exemplo: dous cadrados. Se un ten lados de 2 cm e o outro lados de 4 cm, ambos son cadrados (mesma forma), pero de diferente tamaño.



1.2 Posicións e transformacións no plano por medio de coordenadas

Cando xogamos aos barcos, dicimos unha letra para a posición vertical e un número para a horizontal, e así tratamos de atopar os barcos do noso rival. Cando xogamos aos barcos estamos a utilizar coordenadas cartesianas.

Coordenadas cartesianas é o nome que se dá ao sistema para localizar un punto no espazo. Un sistema de coordenadas cartesianas está formado por dúas rectas perpendiculares graduadas ás que chamamos eixes de coordenadas. Adóitase nomear como X ao eixe horizontal e Y ao eixe vertical. Estes dous eixes córtanse nun punto ao que se lle denomina orixe de coordenadas, O.

Os eixes de coordenadas tamén teñen outros nomes:

- O eixe de **abscisas** para o eixe X (horizontal)
- O eixe de **ordenadas** para o eixe Y (vertical).

Cando queremos saber cales son as coordenadas dun determinado punto (ao que nomeamos xeralmente con letras maiúsculas P, Q, R… ou A, B, C… debemos ter en conta que se colocan así:

(abscisa, ordenada)

Así que se dicimos que o punto P ten coordenadas (3, 5), estamos a dicir que se atopa sobre o 3 do eixo horizontal á altura 5.

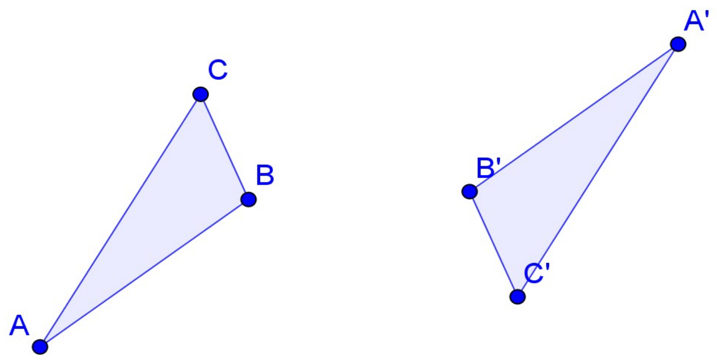
Se queremos realizar unha transformación xeométrica no plano empregando coordenadas debemos determinar:

- A posición inicial: as coordenadas en que se comenza.
- A transformación (translación, xiro, simetría, semellanza) que se realiza.
- A posición final: as coordenadas en que se acaba tras o movemento.

2. MOVEMENTOS NO PLANO

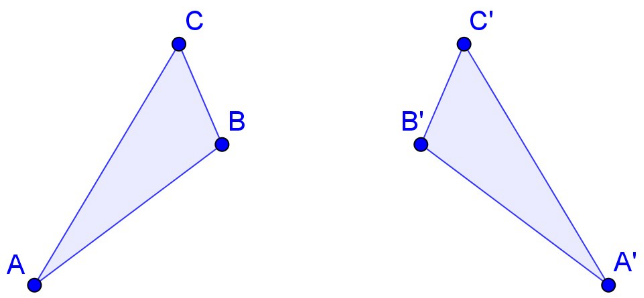
2.1 Movementos directos e inversos

Un movemento é directo se mantén a orientación. É dicir os vértices homólogos dispóñense seguindo o mesmo sentido, horario ou antihorario.



Se os vértices A, B, C aparecen no sentido contrario ao das agullas do reloxo entón os vértices A', B', C' tamén.

Un movemento é inverso se non mantén a orientación. É dicir os vértices homólogos dispóñense seguindo sentidos contrarios: nunha figura seguirán o sentido horario e na outra o antihorario.



Se os vértices A, B, C aparecen no sentido contrario ao das agullas do reloxo entón os vértices A', B', C' aparecen no sentido das agullas do reloxo.

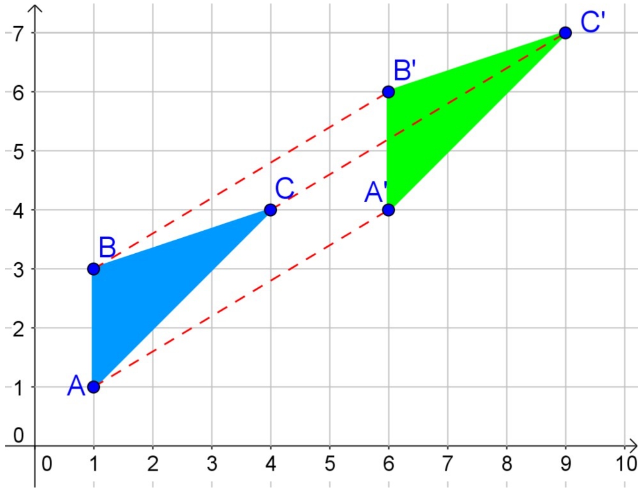
2.2 Translacións

Cando movemos un moble nunha mesma dirección estamos a trasladalo. O tren trasládase ao longo dunha vía recta. O ascensor trasládanos dunha planta a outra… Estas e moitas outras máis son situacións nas que o movemento de translación está presente nas nosas vidas.

Unha **translación**: é o movemento directo dunha figura na que todos os seus puntos:

- Móvense na mesma dirección.
- Móvense a mesma distancia.

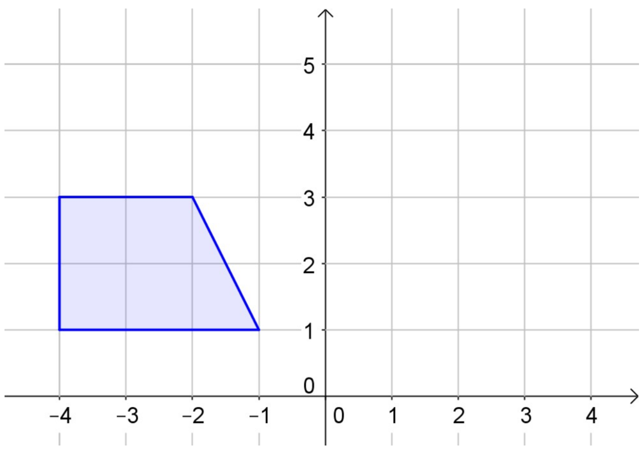
O resultado dunha translación é outra figura idéntica que se desprazou unha distancia nunha dirección determinada.



EXERCICIOS

Exercicio 1

Traslada a figura da imaxe 5 unidades á dereita e 2 cara arriba.



2.3 Xiros

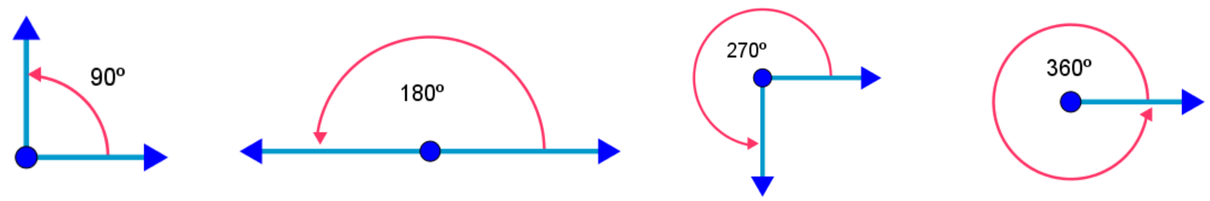
A vida cotiá está chea de situacións nas que a rotación ou xiro está presente. Cando abrimos ou pechamos unha porta estamos a facer unha rotación sobre un punto ou centro de rotación, as rodas da nosa bicicleta xiran sobre o eixo central, do mesmo xeito que os pedais, xiramos ao montar nos cabaliños, ao abrir e pechar o abanico facemos que xire sobre un punto, ao mover a ruleta facemos que xire igualmente sobre o seu centro.

O xiro, que tamén se chama rotación, é un movemento ao redor dun punto que mantén a forma e o tamaño da figura orixinal.

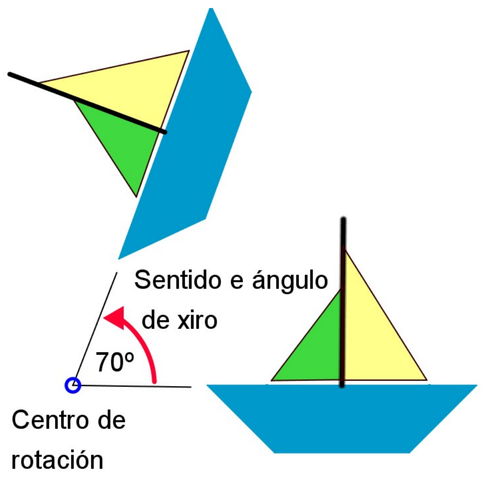
Un xiro ou rotación determínase por tres elementos:

- Un ángulo que determina a amplitude da rotación.
- Un punto chamado centro de rotación.
- Un sentido da rotación que pode ser:
  - Á dereita: no mesmo sentido que as agullas do reloxo.
  - Á esquerda: no sentido contrario ás agullas do reloxo.

O xiro de 90 graos é moi común. Se marcamos 90º e imos engadindo cada vez 90º obtemos catro ángulos moi comúns. Se consideramos o movemento dunha frecha, podemos dicir que en cada un destes xiros a frecha moveuse: 90º, 180º, 270º e 360º á esquerda (sentido contrario ás agullas do reloxo).



Exemplo: na seguinte imaxe temos un exemplo dun xiro de 70º:



Exemplo: se engadimos 45º, e xiramos en sentido das agullas do reloxo, obteremos estes ángulos para indicar a dirección dos puntos cardinais básicos. (Consideramos 0º á orientación Norte)

45º á dereita: orientación NE

90º á dereita: orientación E

135º á dereita: orientación SE

180º á dereita: orientación S

225º á dereita: orientación SW

270º á dereita: orientación W

315º á dereita: orientación NW

EXERCICIOS

Exercicio 2

Calcula as coordenadas do punto A' resultante de aplicar ao punto A (3, -1) un xiro de 90º con centro na orixe de coordenadas.

Exercicio 3

En que figura se transforma o cadrado de vértices A(-1, 1), B(1, 1), C(1, -1) e D(-1, -1) nun xiro de centro A e ángulo de 90º no sentido contrario ás agullas do reloxo?

Exercicio 4

Representa o triángulo ABC cuxas coordenadas son A (-2, 4), B (-3, -1) e C (-1, 2) e logo representa o triángulo resultante ao aplicarlle un xiro de -90º cuxo centro é a orixe de coordenadas.

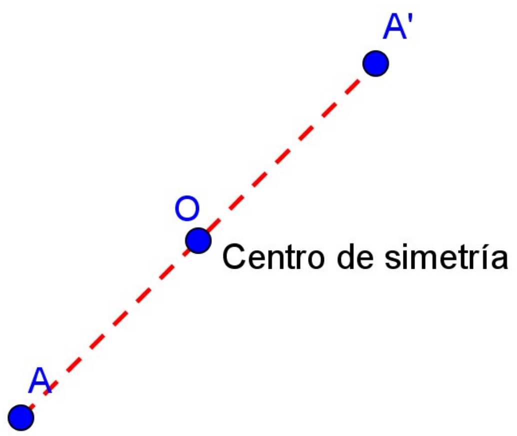
2.3 Simetrías

Na nosa vida cotiá, do mesmo xeito que na natureza, atopámonos con multitude de situacións en que está presente a simetría... se nos fixamos na nosa cara veremos que os ollos, o nariz, as orellas e a boca son simétricas respecto dun eixo imaxinario. O corpo das bolboretas é un dos máis belos exemplos de simetría na natureza, así como as paisaxes que se reflicten na superficie da auga de lagos. A lista de obxectos e seres vivos que teñen forma simétrica sería interminable.

Os corpos reflíctense na auga, nunha superficie puída, nos espellos. O obxecto que vemos reflectido dicimos que é o seu simétrico.

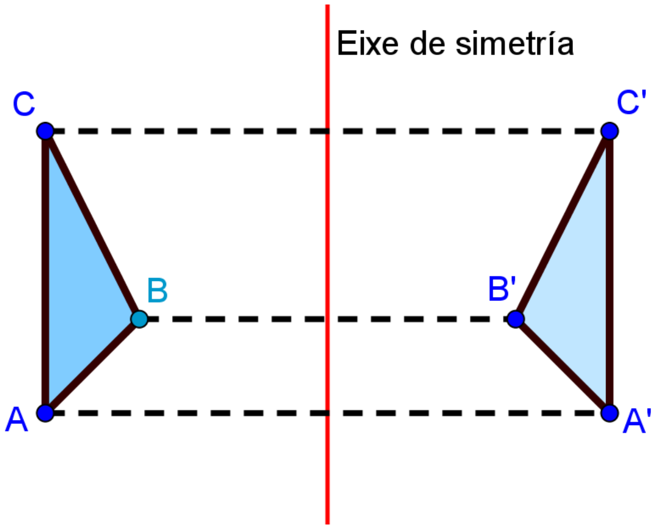
Hai varios tipos de simetrías:

- **Simetría central**, a que se produce respecto dun punto ou **centro de simetría**. O efecto é como o resultado dun xiro de 180º.



- **Simetría axial,** a que se produce respecto a un **eixe de simetría**. Unha simetría con respecto a un eixe caracterízase porque:
  - Os puntos simétricos dunha figura e os da figura reflectida están sobre a mesma liña.
  - Os puntos de ambas as figuras están á mesma distancia do eixo de simetría en direccións opostas.
  - A figura reflectida sempre ten o mesmo tamaño, pero na dirección oposta.

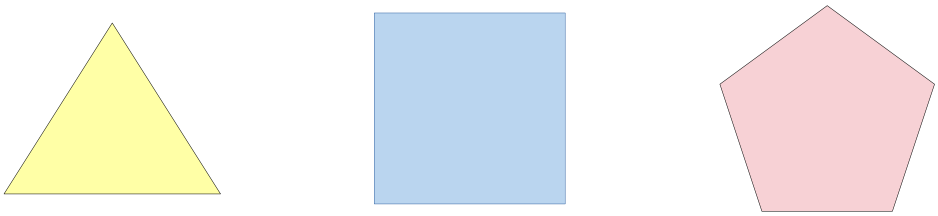
Nun debuxo ou nunha imaxe impresos podemos comprobar se a figura representada é simétrica se ao dobrar por un eixo facemos que coincidan todos os puntos. Ocorre o mesmo ao recortar un papel dobrado.



EXERCICIOS

Exercicio 5

Sinala un eixe de simetría da cada figura.

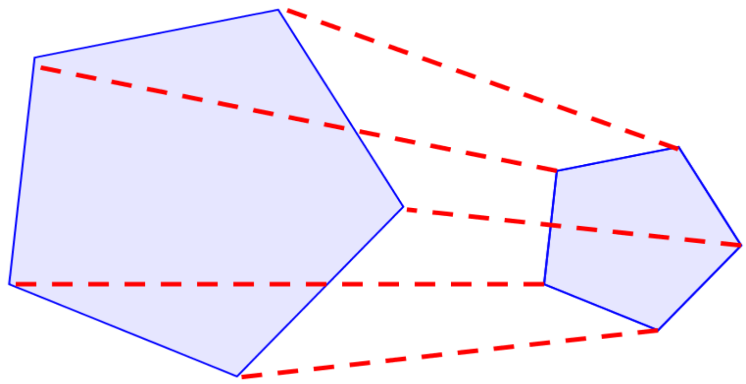


3. SEMELLANZAS

A semellanza é unha transformación que non é un movemento. As semellanzas transforman unha figura noutra coa mesma forma pero non co mesmo tamaño.

As semellanzas caracterízanse porque:

- Mesma forma: ambas figuras teñen a mesma forma, como dous triángulos, dous círculos...
- Ángulos iguais: os ángulos correspondentes en ambas figuras son iguais.
- Lados proporcionais: a razón entre as lonxitudes dos lados correspondentes das figuras é constante, o que se coñece como razón de semellanza.



3.1 Triángulos semellantes

Dous triángulos son semellantes se os seus ángulos son iguais e os seus lados respectivos son proporcionais.

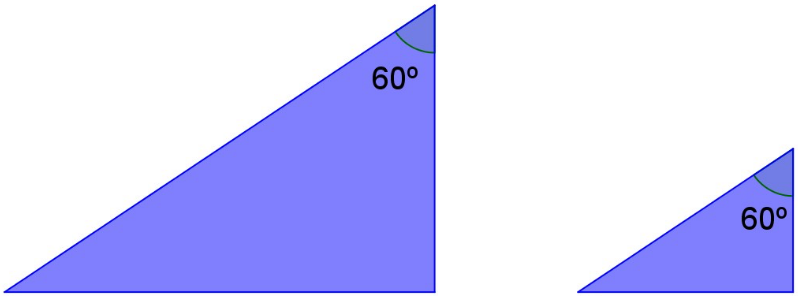
Para saber se dous triángulos son semellantes podemos analizar se cumpren ou non unhas condicións chamadas **criterios de semellanza**:

- Criterio 1: se dous triángulos teñen dous ángulos iguais, entón son semellantes.
- Criterio 2: se dous triángulos teñen os seus tres lados proporcionais, entón son semellantes.
- Criterio 3: se dous triángulos teñen dous lados proporcionais e o ángulo comprendido entre eles é igual, entón son semellantes.

EXERCICIOS

Exercicio 6

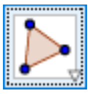
Son semellantes os triángulos rectángulos da figura? Por que?

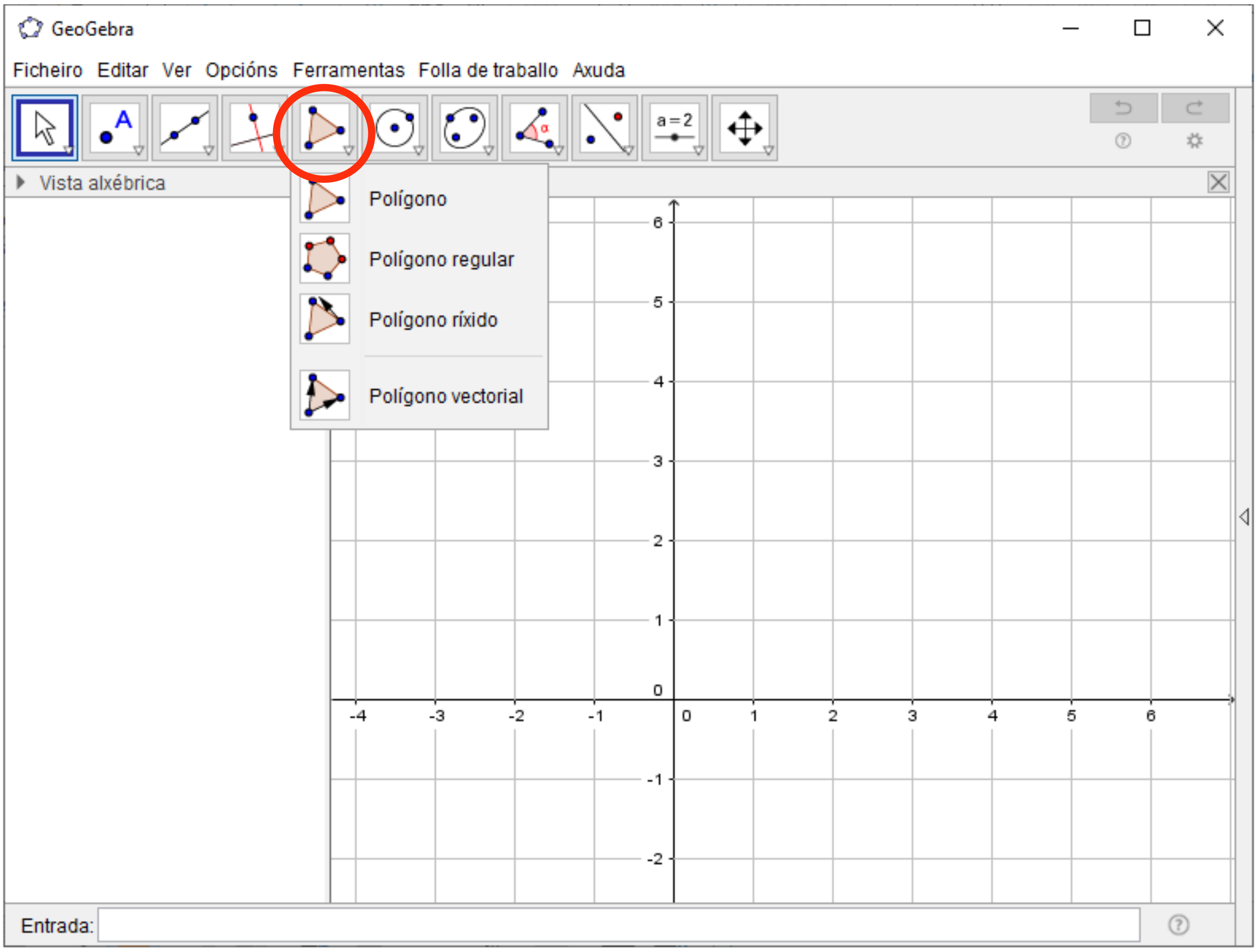


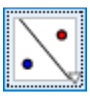
4. FERRAMENTAS TECNOLÓXICAS

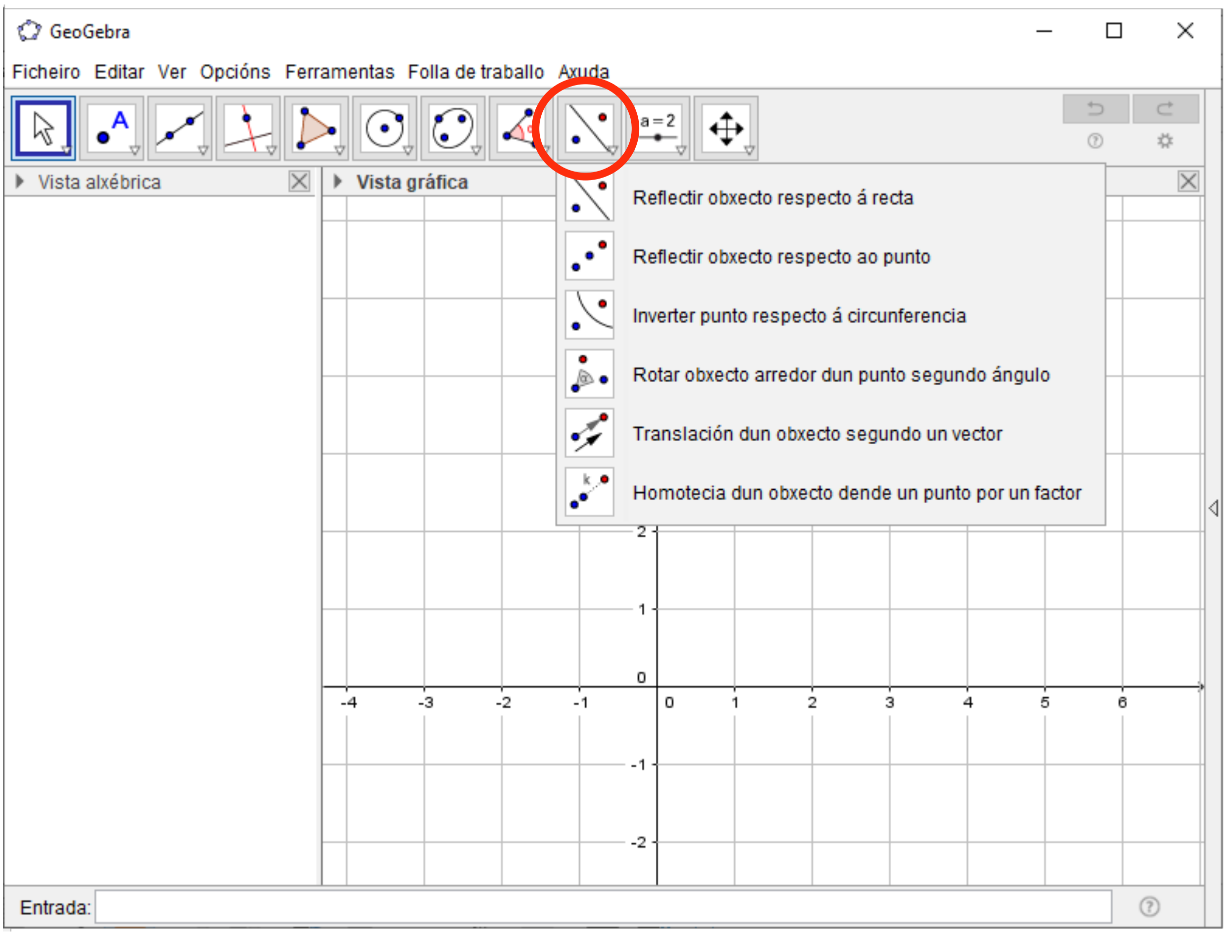
Para realizar transformacións xeométricas podemos empregar a ferramenta **Geogebra**, que permite facer xiros, simetrías, translacións e semellanzas:

En Geogebra podemos construír diferentes figuras premendo a frecha inferior dereita do botón:

 que activa un despregable que permite construír as figuras:



Para poder realizar transformacións xeométricas de ditas figuras hai que premer na frecha inferior dereita do botón:  que activa un despregable que permite realizar diferentes transformacións xeométricas:



EXERCICIOS

Exercicio 7

Traslada o triángulo de vértices A(3, 0), B(-1, 4) e C(2, 5) 5 unidades á dereita e 2 cara abaixo.

Exercicio 8

Un triángulo ten por vértices os puntos de coordenadas A(2, 1), B(1, 4) e C(3, 5). Atopa o transformado de ABC, A'B'C', por un xiro de centro a orixe e ángulo 90°.

Exercicio 9

Considera o cuadrilátero de vértices A (-3 , -1) ; B (- 4 , -3) ; C (-1 , -4) e D (-1 , -2). Calcula as coordenadas do seu simétrico respecto á orixe de coordenadas.

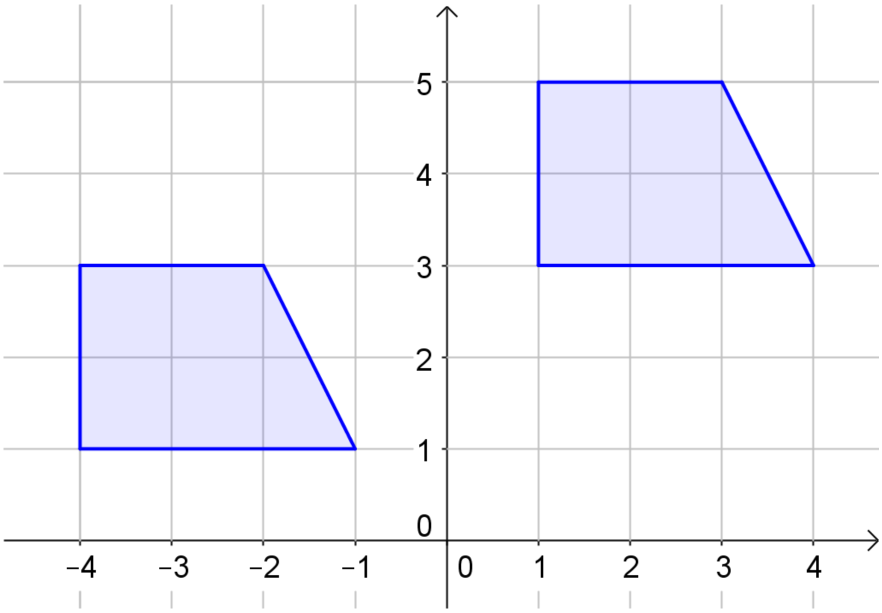
Exercicio 10

Considera o cuadrilátero de vértices A (-3 , -1) ; B (- 4 , -3) ; C (-1 , -4) e D (-1 , -2). Calcula as coordenadas do seu simétrico respecto ao eixe de abscisas.

SOLUCIÓNS

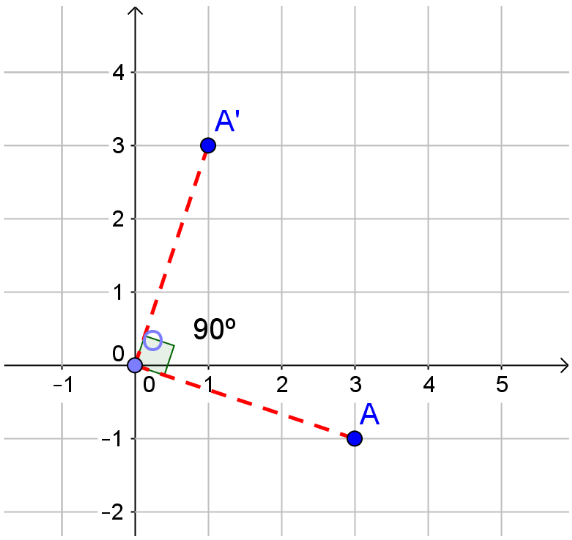
Exercicio 1

Traslada a figura da imaxe 5 unidades á dereita e 2 cara arriba.



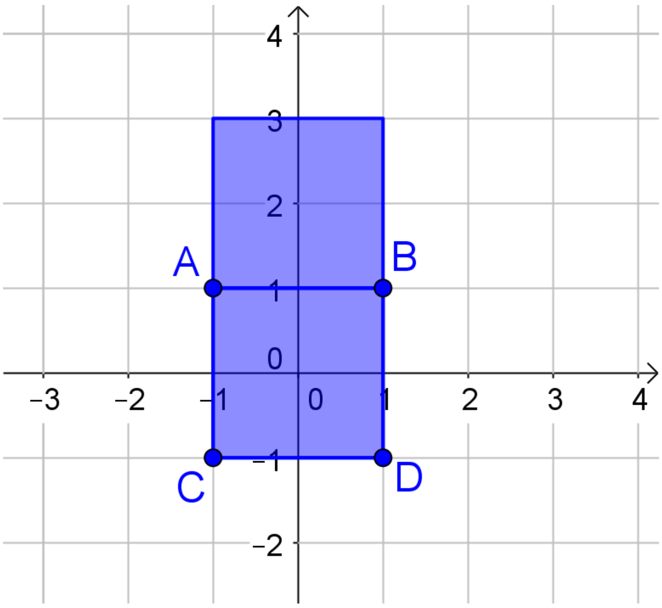
Exercicio 2

Calcula as coordenadas do punto A' resultante de aplicar ao punto A (3, -1) un xiro de 90° con centro na orixe de coordenadas.



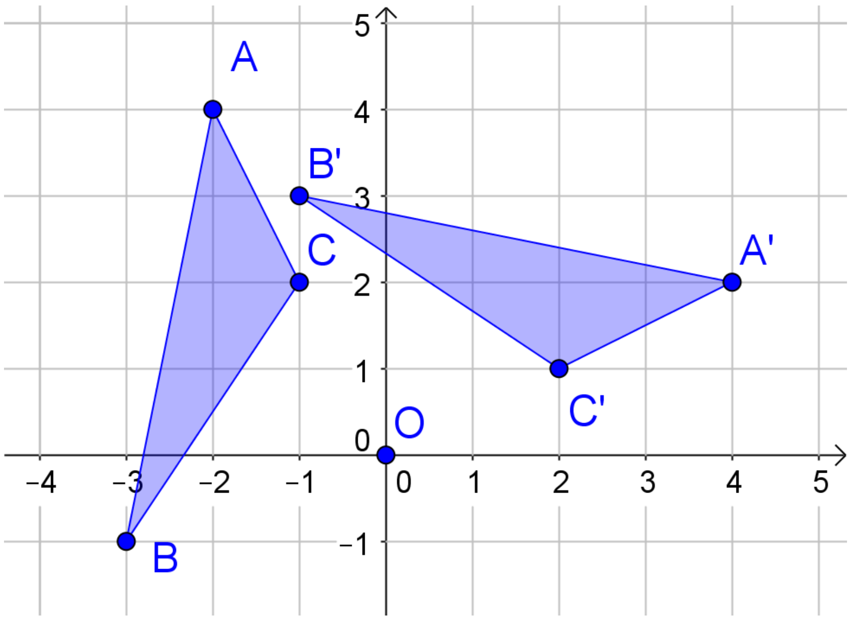
Exercicio 3

En que figura se transforma o cadrado de vértices A(-1, 1), B(1, 1), C(-1, -1) e D(1, -1) nun xiro de centro A e ángulo 90º no sentido contrario ás agullas do reloxo?



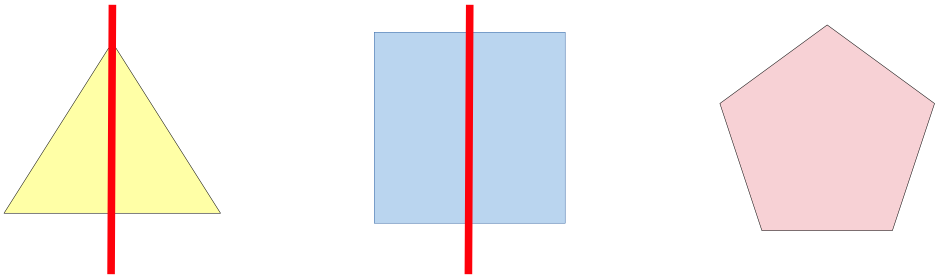
Exercicio 4

Representa o triángulo ABC cuxas coordenadas son A (-2, 4), B (-3, -1) e C (-1, 2) e logo representa o triángulo resultante ao aplicarlle un xiro de 90º no sentido das agullas do reloxo cuxo centro é a orixe de coordenadas.



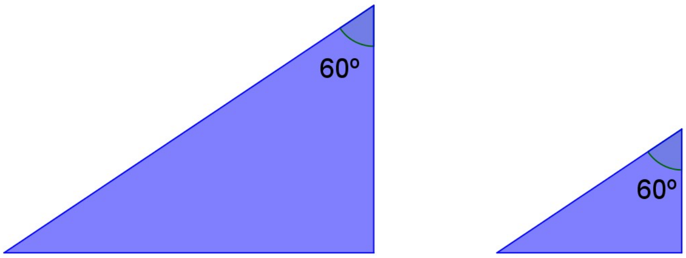
Exercicio 5

Sinala un eixe de simetría da cada figura.



Exercicio 6

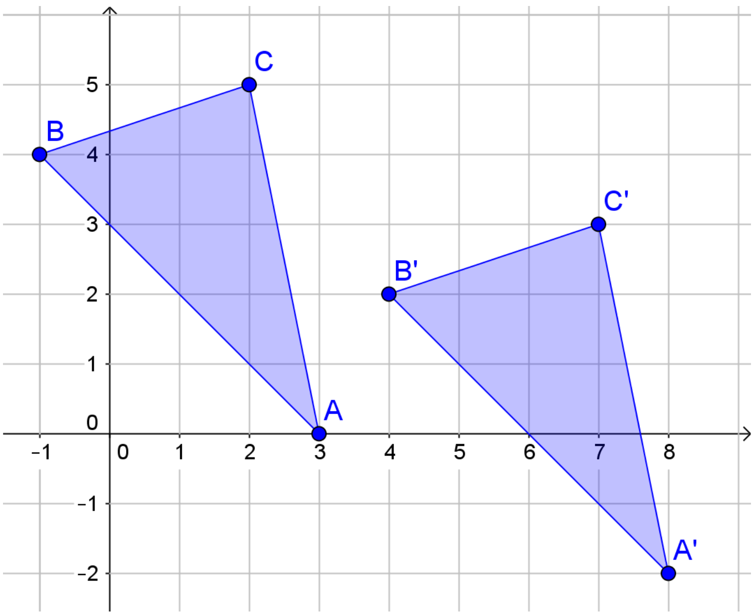
Son semellantes os triángulos rectángulos da figura? Por que?



Coñecemos dous ángulos de cada triángulo: un de 60º (indicado na imaxe) e outro de 90º (por ser rectángulos). Polo criterio 1 son semellantes .

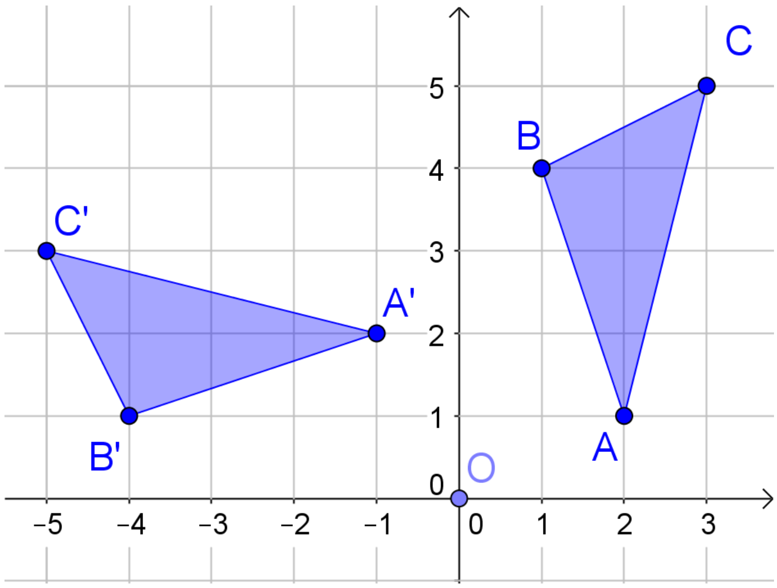
Exercicio 7

Traslada o triángulo de vértices A(3, 0), B(-1, 4) e C(2, 5) 5 unidades á dereita e 2 cara abaixo.



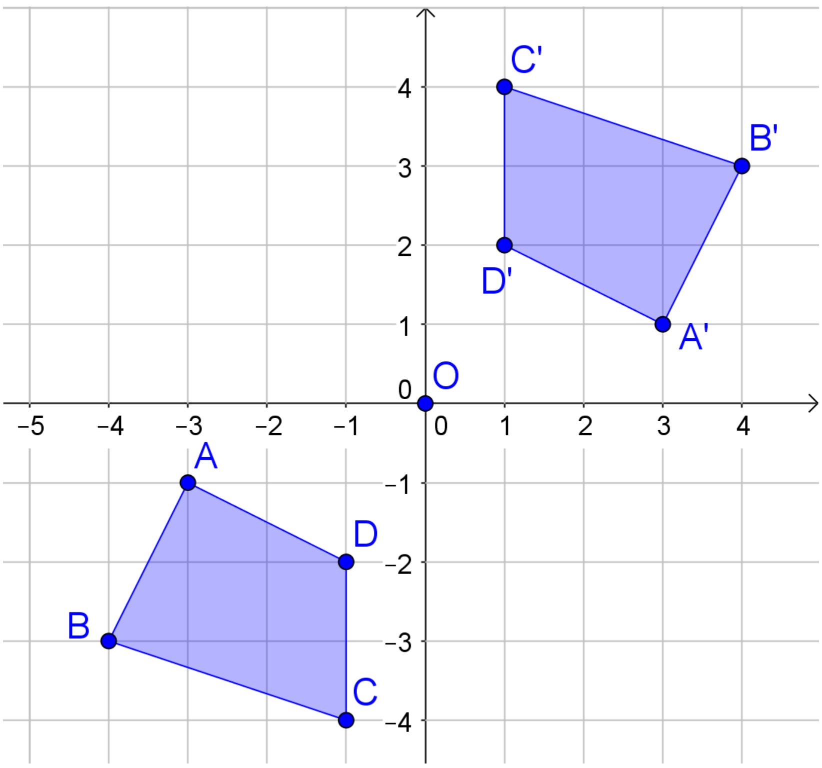
Exercicio 8

Un triángulo ten por vértices os puntos de coordenadas A(2, 1), B(1, 4) e C(3, 5). Atopa o transformado de ABC, A’B’C’, por un xiro de centro a orixe e ángulo 90º.



Exercicio 9

Considera o cuadrilátero de vértices A (-3 , -1) ; B (- 4 , -3) ; C (-1 , -4) e D (-1 , -2). Calcula as coordenadas do seu simétrico respecto á orixe de coordenadas.



Exercicio 10

Considera o cuadrilátero de vértices A (-3 , -1) ; B (- 4 , -3) ; C (-1 , -4) e D (-1 , -2). Calcula as coordenadas do seu simétrico respecto ao eixe de abscisas.