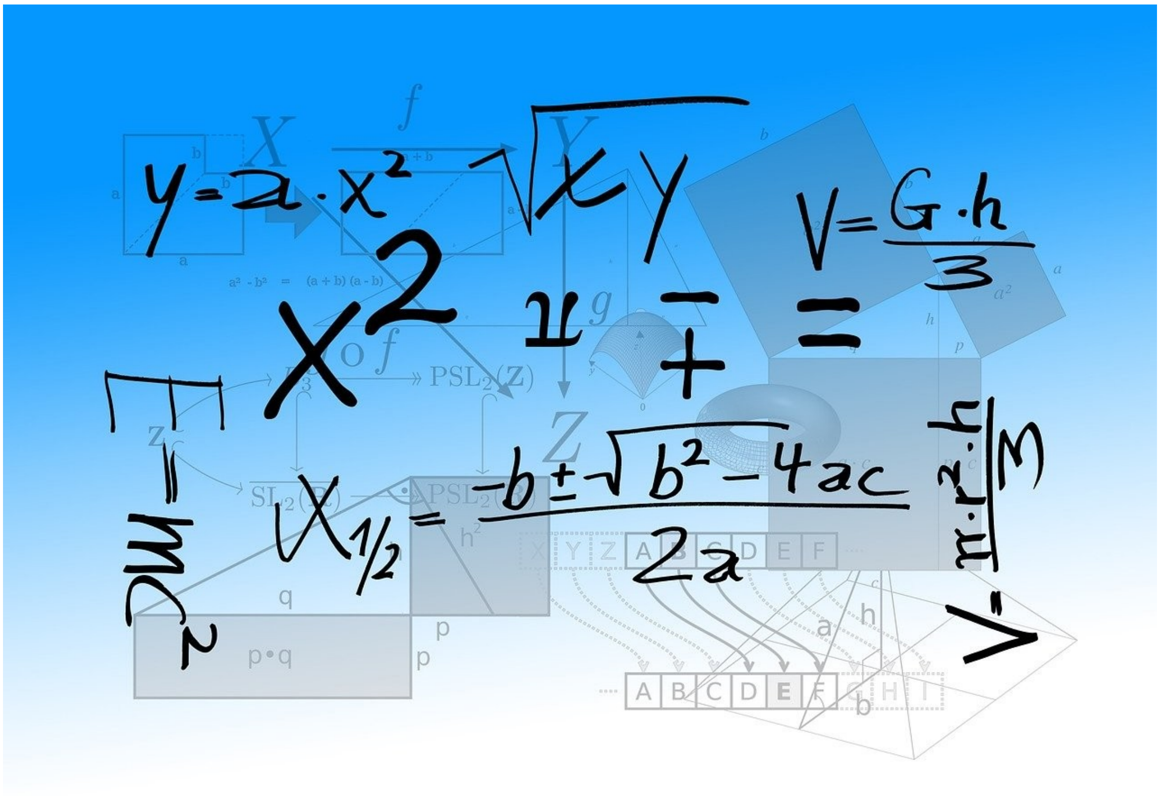
XUNTA DE GALICIA

CONSELLERÍA DE EDUCACIÓN, CIENCIA, UNIVERSIDADES E FORMACIÓN PROFESIONAL

ECUACIÓNS DE SEGUNDO GRAO



"Mathematics" (Geralt, licenza de contido de Pixabay)

Ámbito científico-tecnolóxico

Módulo 4

XUNTA DE GALICIA | CONSELLERÍA DE EDUCACIÓN, CIENCIA, UNIVERSIDADES E FORMACIÓN PROFESIONAL

ÍNDICE

ECUACIÓNS DE SEGUNDO GRAO

1. ECUACIÓNS DE SEGUNDO GRAO....1

1.1 Solucións dunha ecuación de segundo grao....1

Exercicios....2

2. ECUACIÓNS INCOMPLETAS....3

2.1 A ecuación $x^2=k$....3

Exercicios....3

2.2 A ecuación $ax^2+c=0$....3

Exercicios....4

2.3 A ecuación $ax^2+bx=0$....4

Exercicios....4

3. ECUACIÓNS COMPLETAS....5

3.1 A ecuación $ax^2+bx+c=0$....5

3.1 Número de solucións dunha ecuación de segundo grao....6

3.2 Resolución gráfica dunha ecuación de segundo grao....6

Exercicios....7

4. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS....8

Exercicios....8

SOLUCIÓNS....9

1. ECUACIÓNS DE SEGUNDO GRAO

Unha ecuación é de segundo grao se cumpre ao seguinte:

- Algún dos seus termos é un monomio de segundo grao.
- Non contén termos de grao superior a dous.

Exemplo:

$$2x+5x^2-1=4+4x^2+6x$$

A ecuación pódese reducir do seguinte xeito:

$$2x+5x^2-1=4+4x^2+6x \Rightarrow x^2-4x-5=0$$

Forma xeral da ecuación

Todas as ecuacións de grao dous cunha incógnita pódense expresar da seguinte forma:

$$ax^2+bx+c=0$$

Onde $a \neq 0$ e b e c son coeficientes coñecidos.

Esta forma de expresar unha ecuación de segundo grao chámase **forma xeral da ecuación**.

Se b e c son distintos de cero, a ecuación é **completa**.

Se $b=0$ ou $c=0$, a ecuación é **incompleta**.

Exemplos:

Ecuación	$2x+5x^2-1=4+4x^2+6$	$2x(3-4x)=0$	$2x^2+x-1=3x+5$
Forma xeral	$x^2-4x-5=0$	$-8x^2+6x=0$	$2x^2-2x-6=0$
Coeficientes	$a=1;\ \ b=-4;\ \ c=-5$	$a=-8;\ \ b=6;\ \ c=0$	$a=2;\ \ b=-2;\ \ c=-6$

1.1 Solucións dunha ecuación de segundo grao

Resolver unha ecuación de segundo grao é atopar o valor ou os valores que debe tomar a incógnita x, para que a igualdade sexa certa.

Unha ecuación de segundo grao ten, en xeral, dúas solucións distintas, aínda que tamén hai ecuacións de segundo grao cunha solución dobre ou que non teñen solución.

Exemplo:

A ecuación $x^2-4x-5=0$ ten dúas solucións: $\begin{cases} x=5 \\ x=-1 \end{cases}$

Para $x=5 \rightarrow 5^2-3\cdot 5-5=25-15-5=0$

Para $x=-1 \rightarrow (-1)^2-4\cdot(-1)-5=1+4-5=0$

EXERCICIOS

Exercicio 1

Indica cales das seguintes ecuacións son de segundo grao e exprésaas na súa forma xeral:

a) $3x^2=75$

b) $x^2+3=2x-9$

c) $x(x-2)=x^2-3$

d) $(x+7)(x+5)=0$

Exercicio 2

Asocia cada ecuación coa súa parella de solucións:

$x^2=36$	$x=3;$ dobre
$x^2-6x+9=0$	$x_1=1; \quad x_2=3$
$2x^2+5x=0$	$x_1=6; \quad x_2=-6$
$2x^2-8x+6=0$	$x_1=0; \quad x_2=-\frac{5}{2}$

2. ECUACIÓNS INCOMPLETAS

Imos ver como resolver ecuacións de segundo grao incompletas, é dicir, ecuacións nas cales $b=0$ ou $c=0$.

2.1 A ecuación x²=k

Para resolver a ecuación $x^2=k$ buscamos os números cuxo cadrado é k. É dicir, buscamos a raíz cadrada de k.

Se k é un número positivo, hai dúas solucións opostas; pero se k é negativo, non hai solución.

Exemplos:

$$x^2=25 \Rightarrow x=\pm\sqrt{25} \Rightarrow \begin{cases} x_1=5 \\ x_2=-5 \end{cases}$$

$x^2+16=0 \Rightarrow x^2=-16 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-16}$ Non hai solución.

EXERCICIOS

Exercicio 3

Resolve as seguintes ecuacións incompletas:

a) $x^2=4$

b) $x^2+36=0$

c) $x^2-81=0$

d) $x^2-49=0$

2.2 A ecuación ax²+c=0

Resolvémola de xeito similar ao caso anterior:

Exemplos:

$$3x^2-27=0 \Rightarrow 3x^2=27 \Rightarrow x^2=\frac{27}{3} \Rightarrow x=\pm\sqrt{9} \Rightarrow \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=-3 \end{cases}$$

$2x^2+18=0 \Rightarrow 2x^2=-18 \Rightarrow x^2=-\frac{18}{2} \Rightarrow x=\pm\sqrt{-9}$ Non hai solución.

EXERCICIOS

Exercicio 4

Resolve, se é posible, as seguintes ecuacións incompletas:

a) $3x^2=75$

b) $2x^2-18=0$

c) $2x^2+8=0$

d) $3x^2-48=0$

2.3 A ecuación ax²+bx=0

Para resolver a ecuación $ax^2+bx=0$ sacamos o factor común no primeiro membro. Quédanos un produto. Se un produto é igual a cero, necesariamente un dos factores debe ser cero, polo que teremos dúas solucións (unha delas será $x=0$).

Exemplo:

$$2x^2-3x=0 \Rightarrow \underbrace{x\cdot(2x-3)=0}_{\text{sacamos factor común } x} \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 & \text{Primeira solución} \\ 2x-3=0 \rightarrow x_2=\dfrac{3}{2} & \text{Segunda solución} \end{cases}$$

EXERCICIOS

Exercicio 5

Resolve as seguintes ecuacións incompletas:

a) $2x^2+5x=0$

b) $x^2-3x=0$

c) $3x^2-2x=0$

d) $2x(3-4x)=0$

3. ECUACIÓNS COMPLETAS

3.1 A ecuación ax²+bx+c=0

Como xa vimos, a forma xeral das ecuacións de segundo grao completa é:

$$ax^2+bx+c=0$$

Onde $a\neq 0$ e b e c son coeficientes coñecidos.

Para resolver as ecuacións de segundo grao completas empregamos unha fórmula que nos dá a incógnita x xa despexada:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Exemplos:

- $x^2-4x-5=0$

  Os coeficientes son: $a=1;\quad b=-4;\quad c=-5$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot(-5)}}{2\cdot 1}=\frac{4\pm\sqrt{16+20}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{4\pm 6}{2}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{4+6}{2}=\frac{10}{2}=5\\ x_2=\frac{4-6}{2}=-\frac{-2}{2}=-1\end{cases}$$

  Ten dúas solucións distintas $x_1=5$ e $x_2=1$

- $x^2-6x+9=0$

  Os coeficientes son: $a=1;\quad b=-6;\quad c=9$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{6+\sqrt{(-6)^2-4\cdot 1\cdot 9}}{2\cdot 1}=\frac{6\pm\sqrt{36-36}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{0}}{2}=\frac{6\pm 0}{2}=\frac{6}{2}=3$$

  Ten unha solución dobre $x=3$

- $5x^2+6x+2=0$

  Os coeficientes son: $a=5;\quad b=6;\quad c=2$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot 5\cdot 2}}{2\cdot 5}=\frac{-6\pm\sqrt{36-40}}{10}=\frac{-6\pm\sqrt{-4}}{10}$$

  Non ten solución, pois a raíz cadrada de -4 non existe.

3.1 Número de solucións dunha ecuación de segundo grao

Como podemos ver nos exemplos:

- Se $b^2 - 4ac > 0$, a ecuación ten dúas solucións distintas.
- Se $b^2 - 4ac = 0$, a ecuación ten unha solución dobre.
- Se $b^2 - 4ac < 0$ a ecuación non ten solución.

Exemplos:

- $x^2 - 4x - 5 = 0$

  $b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 16 + 20 = 36 > 0$. A ecuación ten dúas solucións distintas.
- $x^2 - 6x + 9 = 0$

  $b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$. A ecuación ten unha solución dobre.
- $5x^2 + 6x + 2 = 0$

  $b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = 36 - 40 < 0$. A ecuación non ten solución.

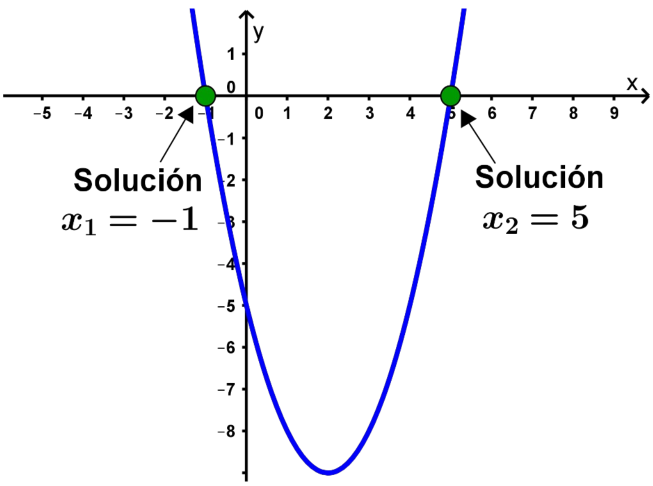
3.2 Resolución gráfica dunha ecuación de segundo grao

Para resolver graficamente unha ecuación de segundo grao podemos empregar calquera ferramenta gráfica: unha calculadora gráfica, Geogebra...

Se empregamos Geogebra só temos que introducir a súa expresión na liña de comandos. A gráfica dunha ecuación de segundo grao é unha parábola, e as solucións da ecuación son os puntos onde corta o eixe de abscisas (eixe x).

Exemplos:

- $x^2 - 4x - 5 = 0$



EXERCICIOS

Exercicio 6

Indica, sen resolvelas, cantas solucións ten cada unha destas ecuacións de segundo grao:

a) $x^2-6x+8=0$

b) $x^2+7x+10=0$

c) $x^2-3x+3=0$

d) $x^2-10x+25=0$

Exercicio 7

Resolve, se é posible, as seguintes ecuacións completas:

a) $x^2-6x+8=0$

b) $x^2+7x+10=0$

c) $x^2-3x+3=0$

d) $x^2-3x-16=7x+9$

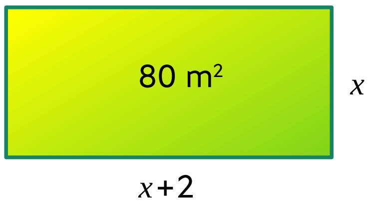
4. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Para resolver problemas débense seguir os pasos:

- Ler atentamente o enunciado do problema cantas veces faga falla, ata saber o que piden e coñecer os datos de que se dispón.
- Atopar os elementos coñecidos (datos) e o descoñecido (incógnita).
- No enunciado haberá frases que relacionan a incógnita cos datos. Hai que traducilas a linguaxe alxébrica para obter unha ecuación.
- Resolver a ecuación correspondente.
- Interpretar as solucións do problema no seu contexto. Elixiremos os valores das solucións que teñan sentido e descartaremos os que non o teñen. Por exemplo, non ten sentido que unha lonxitude sexa negativa.

Exemplo:

Calcula as dimensións dun campo rectangular de 80 m² de área se mide 2 metros de longo máis que de ancho.



Chamamos x ao ancho do campo

O longo será $x+2$

A súa área é: $x(x+2)=80$

Resolvemos a ecuación: $x(x+2)=80 \Rightarrow x^2+2x-80=0$.

Os coeficientes son: $a=1;\quad b=2;\quad c=-80$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot(-80)}}{2\cdot1}=\frac{-2\pm\sqrt{4+320}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{324}}{2}=\frac{-2\pm18}{2}$$

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-2+18}{2}=\dfrac{16}{2}=8 \\ x_2=\dfrac{-2-18}{2}=-\dfrac{-20}{2}=-10 \end{cases}$$

A solución $x_2=-10$ non é válida ao ser unha lonxitude negativa.

As dimensións do campo serán 8 metros de ancho e 8 + 2 = 10 metros de longo.

EXERCICIOS

Exercicio 8

Un xardín rectangular mide 2 m máis de longo que de ancho. Cales son as súas dimensións se a súa área é de 240 m²?

SOLUCIÓNS

Exercicio 1

Indica cales das seguintes ecuacións son de segundo grao e exprésaas na súa forma xeral:

a) $3x^2=75 \Rightarrow 3x^2-75=0$ É unha ecuación de segundo grao.

b) $x^2+3=2x-9 \Rightarrow x^2-2x+12=0$ É unha ecuación de segundo grao.

c) $x(x-2)=x^2-3 \Rightarrow x^2-2x=x^2-3 \Rightarrow -2x+3=0$ Non é unha ecuación de segundo grao.

d) $(x+7)(x+5)=0 \Rightarrow x^2+7x+5x+35=0 \Rightarrow x^2+12x+35=0$ É unha ecuación de segundo grao.

Exercicio 2

Asocia cada ecuación coa súa parella de solucións:

$x^2=36 \rightarrow x=6;\ \ x=-6$

$x^2-6x+9=0 \rightarrow x=3;$ dobre

$2x^2+5x=0 \rightarrow x=0;\ \ x=-\frac{5}{2}$

$2x^2-8x+6=0 \rightarrow x=1;\ \ x=3$

Exercicio 3

Resolve as seguintes ecuacións incompletas:

a) $x^2=4 \Rightarrow x=\pm\sqrt{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-2 \end{cases}$

b) $x^2+36=0 \Rightarrow x^2=-36 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-36}$ Non hai solución.

c) $x^2=81 \Rightarrow x=\pm 81 \Rightarrow \begin{cases} x_1=9 \\ x_2=-9 \end{cases}$

d) $x^2=49 \Rightarrow x=\pm\sqrt{49} \Rightarrow \begin{cases} x_1=7 \\ x_2=-7 \end{cases}$

Exercicio 4

Resolve, se é posible, as seguintes ecuacións incompletas:

a) $3x^2=75 \Rightarrow x^2=\frac{75}{3} \Rightarrow x=\pm\sqrt{25} \Rightarrow \begin{cases} x_1=5 \\ x_2=-5 \end{cases}$

b) $2x^2-18=0 \Rightarrow 2x^2=18 \Rightarrow x^2=\frac{18}{2} \Rightarrow x=\pm\sqrt{9} \Rightarrow \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=-3 \end{cases}$

c) $2x^2+8=0 \Rightarrow 2x^2=-8 \Rightarrow x^2=-\frac{8}{2} \Rightarrow x=\pm\sqrt{-4}$ Non hai solución.

d) $3x^2-48=0 \Rightarrow 3x^2=48 \Rightarrow x^2=\frac{48}{3} \Rightarrow x=\pm\sqrt{16} \Rightarrow \begin{cases} x_1=4 \\ x_2=-4 \end{cases}$

Exercicio 5

Resolve as seguintes ecuacións incompletas:

a) $2x^2+5x=0 \Rightarrow x\cdot(2x+5)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ 2x+5=0 \rightarrow x_2=-\frac{5}{2} \end{cases}$

b) $x^2-3x=0 \Rightarrow x\cdot(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x-3=0 \rightarrow x_2=3 \end{cases}$

c) $3x^2-2x=0 \Rightarrow x\cdot(3x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ 3x-2=0 \rightarrow x_2=\frac{2}{3} \end{cases}$

d) $2x\cdot(3-4x)=0 \Rightarrow \begin{cases} 2x=0 \rightarrow x_1=0 \\ 3-4x=0 \rightarrow -4x=-3 \rightarrow x_2=\frac{3}{4} \end{cases}$

Exercicio 6

Indica, sen resolvelas, cantas solucións ten cada unha destas ecuacións de segundo grao:

a) $x^2-6x+8=0 \Rightarrow (-6)^2-4\cdot1\cdot8 \ =36-32=4>0$ A ecuación ten **dúas** solucións distintas.

b) $x^2+7x+10=0 \Rightarrow 7^2-4\cdot1\cdot10 \ =49-40=9>0$ A ecuación ten **dúas** solucións distintas.

c) $x^2-3x+3=0 \Rightarrow (-3)^2-4\cdot1\cdot3 \ =9-12=-3<0$ A ecuación **non** ten solución.

d) $x^2-10x+25=0 \Rightarrow (-10)^2-4\cdot1\cdot25 \ =100-100=0$ A ecuación ten unha solución **dobre**.

Exercicio 7

Resolve, se é posible, as seguintes ecuacións completas:

a) $x^2-6x+8=0$ Os coeficientes son: $a=1;\quad b=-6;\quad c=8$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot1\cdot8}}{2\cdot1}=\frac{6\pm\sqrt{36-32}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{6\pm2}{2}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{6+2}{2}=\dfrac{8}{2}=4\\[2mm] x_2=\dfrac{6-2}{2}=\dfrac{4}{2}=2\end{cases}$$

Ten **dúas** solucións distintas $x_1=4$ e $x_2=2$

b) $x^2+7x+10=0$ Os coeficientes son: $a=1;\quad b=7;\quad c=10$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\cdot1\cdot10}}{2\cdot1}=\frac{-7\pm\sqrt{49-40}}{2}=\frac{-7\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-7\pm3}{2}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{-7+3}{2}=\dfrac{-4}{2}=-2\\[2mm] x_2=\dfrac{-7-3}{2}=-\dfrac{-10}{2}=-5\end{cases}$$

Ten **dúas** solucións distintas $x_1=-2$ e $x_2=-5$

c) $x^2-3x+3=0$ Os coeficientes son: $a=1;\quad b=-3;\quad c=3$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{3+\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1}=\frac{3\pm\sqrt{9-12}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{-3}}{2}$$

Non ten solución, pois a raíz cadrada de -4 non existe.

d) $x^2-3x-16=7x+9\Rightarrow x^2-3x-16-7x-9=0\Rightarrow x^2-10x+25=0$

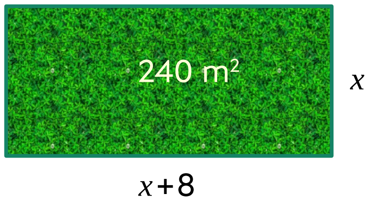
Os coeficientes son: $a=1;\quad b=-10;\quad c=25$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{10+\sqrt{(-10)^2-4\cdot1\cdot25}}{2\cdot1}=\frac{10\pm\sqrt{100-100}}{2}=\frac{10\pm\sqrt{0}}{2}=\frac{10\pm0}{2}=\frac{10}{2}=5$$

Ten unha solución dobre $x=5$

Exercicio 8

Un xardín rectangular mide 8 m máis de longo que de ancho. Cales son as súas dimensións se a súa área é de 240 m²?



Chamamos x ao ancho do xardín

O longo será $x+8$

A súa área é: $x(x+8)=240$

Resolvemos a ecuación: $x(x+8)=240 \Rightarrow x^2+8x-240=0$.

Os coeficientes son: $a=1;\quad b=8;\quad c=-240$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot1\cdot(-240)}}{2\cdot1}=\frac{-8\pm\sqrt{64+960}}{2}=\frac{-8\pm\sqrt{1024}}{2}=\frac{-8\pm32}{2}$$

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-8+32}{2}=\dfrac{24}{2}=12 \\ x_2=\dfrac{-8-32}{2}=-\dfrac{40}{2}=-20 \end{cases}$$

A solución $x_2=-20$ non é válida ao ser unha lonxitude negativa.

As dimensións do campo serán 12 metros de ancho e 12 + 8 = 20 metros de longo.