



DIVISIBILIDADE



"Divisibilidade" (elaboración propia)



ÍNDICE

DIVISIBILIDADE

| | |
|---|---|
| 1. MÚLTIPLOS E DIVISORES DUN NÚMERO. NÚMEROS PRIMOS..... | 1 |
| <i>Exercicios</i> | 2 |
| 2. CRITERIOS DE DIVISIBILIDADE..... | 3 |
| <i>Exercicios</i> | 3 |
| 3. DESCOMPOSICIÓN DUN NÚMERO EN FACTORES PRIMOS..... | 4 |
| <i>Exercicios</i> | 4 |
| 4. MÁXIMO COMÚN DIVISOR (MCD) DE VARIOS NÚMEROS..... | 5 |
| 4.1. Cálculo do máximo común divisor (mcd)..... | 5 |
| <i>Exercicios</i> | 5 |
| 5. MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (mcm) DE VARIOS NÚMEROS..... | 6 |
| 5.1. Cálculo do mínimo común múltiplo (mcm)..... | 6 |
| <i>Exercicios</i> | 6 |
| 6. PROBLEMAS DE MÁXIMO COMÚN DIVISOR E MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO..... | 7 |
| <i>Exercicios</i> | 8 |
| SOLUCIÓN..... | 9 |



1. MÚLTIPLOS E DIVISORES DUN NÚMERO. NÚMEROS PRIMOS

Os **múltiplos** dun número son os que se obteñen ao multiplicalo polos números naturais.

Exemplos:

Múltiplos de 3: 3 ($3 \cdot 1$), 6 ($3 \cdot 2$), 9 ($3 \cdot 3$), 12 ($3 \cdot 4$), 15 ($3 \cdot 5$), 18 ($3 \cdot 6$),...

Múltiplos de 25: 25, 50, 75, 100, 125, 150, 175,...

Un número é **divisor** ou factor doutro cando a división do segundo polo primeiro é exacta.

Exemplos:

3 é divisor de 6 porque $6 : 3 = 2$

5 é divisor de 35 porque $35 : 5 = 7$

2 non é divisor de 7 porque $7 : 2 = 3,5$

En función do número de divisores, os números clasifícanse en **números primos** e **números compostos**.

- Un número é **primo** cando só ten como divisores o 1 e o propio número.
- Un número é **composto** cando ten máis de dous divisores.

Táboa de números primos ata o 50:

| | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |

Exemplos:

- *Números primos:* 2, 3, 5, 7, 11,...
- *Números compostos:* 4 (ten como divisores 1, 2 e 4), 6 (ten como divisores 1, 2, 3 e 6), 8 (ten como divisores 1, 2, 4 e 8).



EXERCICIOS

Exercicio 1

Escribe catro múltiplos de cada un dos seguintes números:

- a) Múltiplos de 8.
- b) Múltiplos de 12.

Exercicio 2

Escribe todos os divisores dos seguintes números:

- a) Divisores de 12.
- b) Divisores de 20.
- c) Divisores de 39.

2. CRITERIOS DE DIVISIBILIDADE

Un número é **divisible entre 2** (ou é múltiplo de 2) se remata en 0 ou en cifra par (2, 4, 6 ou 8).

- 154 é divisible entre 2 porque remata en cifra par (4).
- 230 é divisible entre 2 porque remata en 0.
- 15 non é divisible entre 2 porque remata en cifra impar.

Un número é **divisible entre 3** (ou é múltiplo de 3) se a suma dos valores das súas cifras é múltiplo de 3.

- 123 é divisible entre 3 porque $1 + 2 + 3 = 6$ (e 6 é múltiplo de 3).
- 258 é divisible entre 3 porque $2 + 5 + 8 = 15$ (e 15 é múltiplo de 3).
- 76 non é divisible entre 3 porque $7 + 6 = 13$ (e 13 non é múltiplo de 3).

Un número é **divisible entre 5** (ou é múltiplo de 5) se remata en 0 ou en 5.

- 325 é divisible entre 5 porque remata en 5.
- 140 é divisible entre 5 porque remata en 0.
- 741 non é divisible entre 5 porque non remata nin en 0 nin en 5.

Un número é **divisible entre 10** (ou é múltiplo de 10) se remata en 0.

- 50 é divisible entre 10 porque remata en 0.
- 63 non é divisible entre 10 porque non remata en 0.



EXERCICIOS

Exercicio 3

Completa a seguinte táboa e indica se os números propostos son divisibles entre 2, 3 e 5.

| Número | Divisible entre 2 | Divisible entre 3 | Divisible entre 5 |
|--------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 738 | | | |
| 205 | | | |
| 3426 | | | |
| 123 | | | |

3. DESCOMPOSICIÓN DUN NÚMERO EN FACTORES PRIMOS

A **descomposición dun número en factores primos (descomposición factorial)** é a expresión dese número como produto de factores primos.

Observa como podemos expresar o número 140 como produto de factores de varias maneiras: $140 = 1 \cdot 140 = 2 \cdot 70 = 2 \cdot 2 \cdot 35 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$. Nesta última expresión todos os factores son primos. É dicir, trátase da descomposición de 140 en factores primos e acostuma a expresarse: $140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$.

Calquera número pode expresarse como produto de números primos.

Exemplos:

$$6 = 2 \cdot 3$$

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$$

$$30 = 6 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

Procedemento. Para descompoñer un número en factores primos:

1. Dividimos o número por un factor primo (resulta mellor empezar polos máis pequenos) e colocamos este factor á dereita.
2. O cociente obtido da división colócase á esquerda na fila de abaixo. Despois dividimos este cociente por outro factor primo e repetimos o procedemento.
3. Rematamos cando o último cociente sexa 1.

Exemplo: descomposición factorial do número 396.

| COCIENTES PARCIAIS | | FACTORES PRIMOS |
|--------------------|-------|-----------------|
| | 396 | 2 |
| 396 : 2 | → 198 | 2 |
| 198 : 2 | → 99 | 3 |
| 99 : 3 | → 33 | 3 |
| 33 : 3 | → 11 | 11 |
| 11 : 11 | → 1 | |

$396 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11$

"Descomposición factorial" (elaboración propia)

EXERCICIOS

Exercicio 4

Descompón en factores primos os seguintes números: 32, 54, 225, 330.

4. MÁXIMO COMÚN DIVISOR (MCD) DE VARIOS NÚMEROS

O **máximo común divisor** de varios números é o maior dos seus divisores comúns.

Exemplos:

$$\text{mcd}(12, 18) = 6$$

Divisores de 12 : 1, 2, 3, 4, 6, 12

Divisores de 18 : 1, 2, 3, 6, 9, 18

$$\text{mcd}(16, 24) = 8$$

Divisores de 16 : 1, 2, 4, 8, 16

Divisores de 24 : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

4.1. Cálculo do máximo común divisor (mcd)

Para **calcular o máximo común divisor** de varios números:

1. Escribimos cada número como produto de factores primos.
2. O máximo común divisor é igual ao produto dos factores primos comúns elevados ao menor expoñente.

Exemplos:

a) $\text{mcd}(12, 18)$

$$12 = 2^2 \cdot \textcircled{3} \qquad 18 = \textcircled{2} \cdot 3^2$$

$$\text{mcd}(12, 18) = 2 \cdot 3 = 6$$

b) $\text{mcd}(16, 24)$

$$16 = 2^4 \qquad 24 = \textcircled{2^3} \cdot 3$$

$$\text{mcd}(16, 24) = 2^3 = 8$$

EXERCICIOS

Exercicio 5

Calcula o máximo común divisor de:

a) $\text{mcd}(28, 70)$

b) $\text{mcd}(9, 36, 48)$

5. MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (mcm) DE VARIOS NÚMEROS

O **mínimo común múltiplo** de varios números é o menor dos seus múltiplos comúns.

Exemplos:

$$mcm(6, 8) = 24$$

Múltiplos de 6: 6, 12, 18, **24**, 30, 36, 42, **48**, 54, 60, 66, **72**,...

Múltiplos de 8: 8, 16, **24**, 32, 40, **48**, 56, 64, **72**, 80, 88,...

$$mcm(15, 20) = 60$$

Múltiplos de 15: 15, 30, 45, **60**, 75, 90, 105, **120**, 135,...

Múltiplos de 20: 20, 40, **60**, 80, 100, **120**, 140,...

5.1. Cálculo do mínimo común múltiplo (mcm)

Para **calcular o mínimo común múltiplo** de varios números:

1. Escribimos cada número como produto de factores primos.
2. O mínimo común múltiplo é igual ao produto dos factores primos, comúns e non comúns, elevados ao maior expoñente.

Exemplos:

a) $mcm(6, 8)$

$$6 = 2 \cdot \textcircled{3}$$

$$8 = \textcircled{2^3}$$

$$mcm(6, 8) = 2^3 \cdot 3 = 24$$

b) $mcm(15, 20)$

$$15 = \textcircled{3} \cdot \textcircled{5}$$

$$20 = \textcircled{2^2} \cdot 5$$

$$mcm(15, 20) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

EXERCICIOS

Exercicio 6

Calcula o mínimo común múltiplo de:

a) $mcm(24, 45)$

b) $mcm(20, 35, 75)$

6. PROBLEMAS DE MÁXIMO COMÚN DIVISOR E MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

Exemplos:

1. Xosé ten 30 novelas e 18 cómics. Quere ordenalos en andeis iguais da maior capacidade posible, sen mesturar libros de distinto tipo e sen deixar andeis incompletos. Cantos libros terá que poñer en cada andel?

- *Para dividir os libros en grupos precisa divisores de 18 e de 30.*

Divisores de 18: 1, 2, 3, 6, 9, 18.

Divisores de 30: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.

- *Como nos andeis ten que caber o mesmo número de libros debe buscar un divisor común a 18 e 30.*

Divisores comúns a 18 e 30: 1, 2, 3, 6.

- *Quere que os andeis sexan da maior capacidade posible, polo que precisa un tamaño igual ao maior dos divisores comúns, que neste caso é 6. É dicir, debe colocar 6 libros en cada andel.*

Como podes observar, o problema consiste en buscar o máximo común divisor de 18 e 30. Na práctica, para a súa resolución, non se desenvolve o exercicio paso por paso senón que se utiliza o método explicado no punto 4.1., isto é, calcúlase o $mcd(18, 30)$.

$$18 = 2 \cdot 3^2$$

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$mcd(18, 30) = 2 \cdot 3 = 6 \rightarrow \text{Debe colocar 6 libros en cada andel.}$$

2. Sabela leva os papeis ao colector de reciclaxe cada 12 días e María faino cada 15. O día 18 de novembro atopáronse alí. Cando volverán coincidir?

- *Dende o día que se atoparon, cada unha delas achégase ao colector cada 12 e cada 15 días respectivamente. Isto é, múltiplos de 12 e de 15.*

Múltiplos de 12: 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120,...

Múltiplos de 15: 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120,...

- Os días que van coincidir serán múltiplos comúns a 12 e 15.

Múltiplos comúns a 12 e 15: 60, 120,...



- *Polo tanto, o primeiro día que se volven atopar será o mínimo común múltiplo de 12 e 15, isto é 60. É dicir, atoparanse de novo 60 días máis tarde do 18 de novembro.*

Na práctica non se desenvolven todos os pasos anteriores, senón que se calcula o $mcm(12, 15)$ tal como se explica no punto 5.1.

$$12 = 2^2 \cdot 3$$

$$15 = 3 \cdot 5$$

$$mcm(12, 15) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60 \rightarrow \text{Atoparanse 60 días máis tarde do 18 de novembro.}$$

EXERCICIOS

Exercicio 7

O responsable dun restaurante compra un bidón de 40 l de aceite de oliva e outro de 30 l de aceite de xirasol. Desexa envasalos en garrafas iguais, o máis grandes que sexa posible, e sen mesturar. Cal será a capacidade das garrafas?

Exercicio 8

Un carpinteiro ten dous listóns de 160 e 240 cm e desexa cortalos en pedazos iguais, o máis longos que sexa posible e sen desperdiciar madeira. Canto debe medir cada cacho? Cantos cachos obtén?

Exercicio 9

Xan visita a súa nai cada 8 días, o seu irmán Pedro faino cada 10 días e a súa irmá Xulia cada 12 días. Se hoxe coincidiron os tres visitando a nai, dentro de cantos días volverán coincidir?

Exercicio 10

Un piloto tarda 50 segundos en dar unha volta a un circuío. Outro piloto tarda 55 segundos en facer o mesmo e un terceiro tarda 60 segundos. Se arrancan os tres ao mesmo tempo, canto tardarán en coincidir de novo na liña de saída?



SOLUCIÓNS

Exercicio 1

Escribe catro múltiplos de cada un dos seguintes números:

- a) Múltiplos de 8 = 8, 16, 32, 40, ...
- b) Múltiplos de 12 = 12, 24, 36, 48, ...

Exercicio 2

Escribe todos os divisores dos seguintes números:

- a) Divisores de 12 = 1, 2, 3, 4, 6, 12
- b) Divisores de 20 = 1, 2, 4, 5, 10, 20
- c) Divisores de 39 = 1, 3, 13, 39

Exercicio 3

Completa a seguinte táboa e indica se os números propostos son divisibles por 2, 3 e 5.

| Número | Divisible entre 2 | Divisible entre 3 | Divisible entre 5 |
|--------|--|--------------------------------------|------------------------------------|
| 738 | SI (remata en cifra par) | SI ($7+3+8=18$ é múltiplo de 3) | NON (non remata nin en 0 nin en 5) |
| 205 | NON (non remata nin en 0 nin en cifra par) | NON ($2+0+5=7$ non é múltiplo de 3) | SI (remata en 5) |
| 3426 | SI (remata en cifra par) | SI ($3+4+2+6=15$ é múltiplo de 3) | NON (non remata nin en 0 nin en 5) |
| 123 | NON (non remata nin en 0 nin en cifra par) | SI ($1+2+3=6$ é múltiplo de 3) | NON (non remata nin en 0 nin en 5) |



Exercicio 4

Descompón en factores primos os seguintes números: 32, 54, 225, 330.

$$\begin{array}{r|l} 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$$32 = 2^5$$

$$\begin{array}{r|l} 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$54 = 2 \cdot 3^3$$

$$\begin{array}{r|l} 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$225 = 3^2 \cdot 5^2$$

$$\begin{array}{r|l} 330 & 2 \\ 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$330 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$$

Exercicio 5

Calcula o máximo común divisor de:

a) $mcd(28, 70)$

$$\begin{array}{r|l} 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$28 = 2^2 \cdot 7$$

$$\begin{array}{r|l} 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$$

$$mcd(28, 70) = 2 \cdot 7 = 14$$

b) $mcd(9, 36, 48)$

$$\begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$9 = 3^2$$

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$

$$\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$48 = 2^4 \cdot 3$$

$$mcd(9, 36, 48) = 3$$

Exercicio 6

Calcula o mínimo común múltiplo de:

a) $mcm(24, 45)$

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$
$$24 = 2^3 \cdot 3 \quad 45 = 3^2 \cdot 5$$

$$mcm(24, 45) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$$

b) $mcm(20, 35, 75)$

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$
$$20 = 2^2 \cdot 5 \quad 35 = 5 \cdot 7 \quad 75 = 3 \cdot 5^2$$

$$mcm(20, 35, 75) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 2100$$

Exercicio 7

O responsable dun restaurante compra un bidón de 40 l de aceite de oliva e outro de 30 l de aceite de xirasol. Desexa envasalos en garrafas iguais, o máis grandes que sexa posible, e sen mesturar. Cal será a capacidade das garrafas?

A capacidade das garrafas debe ser un divisor de 30 e de 40, de xeito que se poda repartir todo o líquido sen que falte nin sobre espazo. Como ademais as garrafas teñen que ser iguais e non se quere mesturar o aceite, precisamos un divisor común a 30 e 40. A maiores, o responsable do restaurante desexa que sexan o máis grandes posible.

Polo tanto, o volume das garrafas debe ser o máximo común divisor de 30 e 40.

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$40 = 2^3 \cdot 5$$

$$mcd(30, 40) = 2 \cdot 5 = 10 \rightarrow \text{A capacidade das garrafas debe ser de 10 l.}$$

Exercicio 8

Un carpinteiro ten dous listóns de 160 e 240 cm e desexa cortalos en pedazos iguais, o máis longos que sexa posible e sen desperdiciar a madeira. Canto debe medir cada cacho? Cantos cachos obtén?

Para dividir os listóns en cachos sen desperdiciar a madeira, o carpinteiro precisa divisores de 160 cm e 240 cm. Como ademais quere que os pedazos sexan iguais e o máis longos posible, necesita o maior divisor común a 160 e 240. Achamos o máximo común divisor de 160 e 240:

$$160 = 2^5 \cdot 5$$

$$240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\text{mcd}(160, 240) = 2^4 \cdot 5 = 80 \rightarrow \text{Os cachos deben medir 80 cm de largo.}$$

Os cachos que obtén serán:

$$160 : 80 = 2 \text{ cachos do primeiro listón.}$$

$$240 : 80 = 3 \text{ cachos do segundo listón.}$$

$$\text{En total obtén: } 2 + 3 = 5 \text{ cachos.}$$

Exercicio 9

Xan visita a súa nai cada 8 días, o seu irmán Pedro faino cada 10 días e a súa irmá Xulia cada 12 días. Se hoxe coincidiron os tres visitando á nai, dentro de cantos días volverán coincidir?

Xan visitará a súa nai de 8 en 8 días, isto é, múltiplos de 8. Do mesmo xeito, Pedro farao de 10 en 10 días e Xulia, de 12 en 12, o que corresponde aos múltiplos de 10 e de 12 respectivamente. Os irmáns atoparanse de novo nos días que son múltiplos comúns aos tres. O primeiro día que volven coincidir será o menor destes múltiplos comúns.

Calculamos, polo tanto, o mínimo común múltiplo de 8, 10 e 12.

$$8 = 2^3$$

$$10 = 2 \cdot 5$$

$$12 = 2^2 \cdot 3$$

$$\text{mcm}(8, 10, 12) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120 \rightarrow \text{Volverán coincidir dentro de 120 días.}$$



Exercicio 10

Un piloto tarda 50 segundos en dar unha volta a un circuÍto. Outro piloto tarda 55 segundos en facer o mesmo e un terceiro tarda 60 segundos. Se arrancan os tres ao mesmo tempo, canto tardarán en coincidir de novo na liña de saída?

Dende que se empeza a contar o tempo, o primeiro dos pilotos pasará pola saída aos 50 s, aos 100 s, aos 150 s... O segundo deles pasará aos 55 s, aos 110 s, aos 165 s... e o terceiro farano aos 60 s, aos 120 s, aos 180 s... É dicir, cada un deles pasará pola saída en tempos múltiplos do que tarda en dar unha volta e volverán coincidir os tres na liña de saída naqueles tempos que sexan múltiplos comúns aos tres. A primeira vez que se volverán atopar na saída será no tempo mínimo común múltiplo de 50 s, 55 s e 60 s.

$$50 = 2 \cdot 5^2$$

$$55 = 5 \cdot 11$$

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$mcm(50, 55, 60) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11 = 3300 \rightarrow \text{Volverán coincidir aos 3300 s (55 minutos).}$$