Dirección Xeral de Formación Profesional

Proba para a obtención do título de bacharel 2024

Exercicio / *Ejercicio*	**2.º**
Período	**1**
Modalidade / *Modalidad*	**Ciencias**
Exame de / *Examen de*	**Matemáticas I e II** / *Matemáticas I y II*

1.º apelido / *1.er apellido*	
2.º apelido / *2.º apellido*	
Nome / *Nombre*	
DNI	

1. Formato da proba / *Formato de la prueba*

Duración

- Este exercicio terá unha duración máxima de 90 minutos.

  Este ejercicio tendrá una duración máxima de 90 minutos.

Formato

- A proba consta de catro preguntas.

  La prueba consta de cuatro preguntas.

Puntuación

- A puntuación de cada pregunta aparece a carón do enunciado.

  La puntuación de cada pregunta aparece al lado del enunciado.

- Nas follas do exame deben figurar as operacións e cálculos necesarios para a resolución de cada exercicio. Todas as respostas estarán debidamente xustificadas, xa que se só se achega a solución sen ningún tipo de explicación, terá unha puntuación de cero puntos.

  En las hojas del examen deben figurar las operaciones y cálculos necesarios para la resolución de cada ejercicio. Todas las respuestas estarán debidamente justificadas, ya que si solo se indica la solución sin ningún tipo de explicación, tendrá una puntuación de cero puntos.

Material

- Permítese o uso de calculadora científica, agás as que sexan programables, gráficas ou con capacidade para almacenaren e transmitiren datos alfanuméricos.

  Se permite el uso de calculadora científica, excepto las que sean programables, gráficas o con capacidad para almacenar y transmitir datos alfanuméricos.

Orientacións / *Orientaciones*

- O exame realizarase con bolígrafo azul ou negro.

  El examen se realizará con bolígrafo azul o negro.

2. Exercicio / *Ejercicio*

1. Dados os planos $\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ x-y+z=2 \\ 3x-y-mz=-4m \end{cases}$, estude a súa posición segundo os valores do parámetro *m*.

(Valoración: 2,5 puntos)

Sexa $A'=\left(\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c|}{\overbrace{\hphantom{2\quad -1\quad -m}}^{A}} & \overbrace{\hphantom{-4m}}^{B} \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -m & -4m \end{array}\right)$

Imos calcular o rango de A:

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-1\neq 0 \rightarrow Rg(A)\geq 2$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -m \end{vmatrix}=2m-3-1+3-m+2=m+1$

$m+1=0 \Leftrightarrow m=-1$

- Se $m=-1 \rightarrow Rg(A)=2$ e $A'=\left(\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c|}{\overbrace{\hphantom{2\quad -1\quad 1}}^{A}} & \overbrace{\hphantom{3}}^{B} \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right)$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}=-8-6-3+9+4+4=0$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}=0$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Como todos os menores de orde 3 valen 0, $Rg(A')=2$

Entón, $Rg(A)=R(A')=2<n^o\, de\, incógnitas=3 \rightarrow$ O sistema é compatible indeterminado. Os planos córtanse nunha recta.

- Se $m \neq -1 \rightarrow Rg(A)=3=Rg(A')=n^o\, de\, incógnitas \rightarrow$ O sistema é compatible determinado. Os planos córtanse nun punto.

2. Dada a función $y=\dfrac{1}{x^2-1}$:

(Valoración: 2,5 puntos; a) 0,75 puntos; b) 0,75 puntos, c) 1 punto)

a) Calcule o dominio, as asíntotas e os puntos de corte cos eixes.

b) Estude a monotonía e calcule os extremos relativos, a curvatura e os puntos de inflexión.

c) Obteña a ecuación da recta tanxente á gráfica da función no punto $x=0$.

a)

Dominio: $x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1 \rightarrow Dom\, f=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$

Asíntotas:

$$\lim_{x\to -1} \frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{0}=\pm\infty \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{0^+}=+\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{0^-}=-\infty \end{array} \right\} \rightarrow x=-1\, \textit{é unha asíntota vertical}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{0}=\pm\infty \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{0^-}=-\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{0^+}=+\infty \end{array} \right\} \rightarrow x=1\, \textit{é unha asíntota vertical}$$

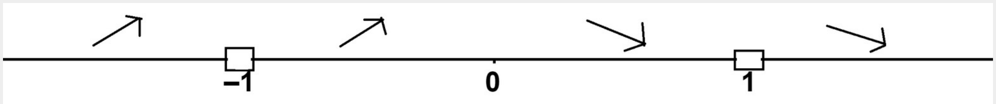
Cortes cos eixes:

- Eixe OX (y=0): $\frac{1}{x^2-1}=0\, non\, ten\, solución \rightarrow non\, corta\, ao\, eixe\, OX$
- Eixe OY (x=0): $f(0)=\frac{1}{-1}=-1 \rightarrow (0,-1)$

b)

$$f'(x)=-\frac{2x}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{2x}{(x^2-1)^2}=0 \Leftrightarrow -2x=0 \Leftrightarrow x=0$$

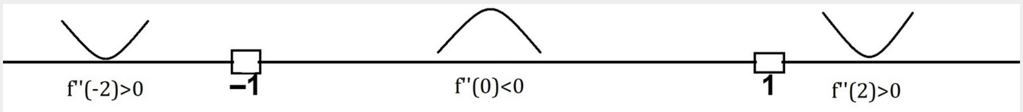


f é crecente en $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$ e decrecente en $(0,1)\cup(1,+\infty)$.

Ten un máximo relativo en $(0,f(0))=(0,-1)$.

$$f''(x)=\frac{-2\cdot(x^2-1)^2+2x\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4}=\frac{(x^2-1)\cdot(-2\cdot(x^2-1)+8x^2)}{(x^2-1)^4}=\frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$$

$$\frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}=0 \Leftrightarrow 6x^2+2=0\, non\, ten\, solución$$



f é convexa en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ e cóncava $(-1,1)$. Non ten puntos de inflexión.

c)

Ecuación da recta tanxente: $y=f(0)+f'(0)(x-0)$

$$f(0)=\frac{1}{0^2-1}=-1\, ; f'(0)=-\frac{0}{1}=0$$

$$y=-1+0\cdot(x-0) \rightarrow y=-1$$

3. Conteste ás seguintes preguntas:

(Valoración: 2,5 puntos; a) 1 punto; b) 1,5 puntos)

a) Resolva a ecuación trigonométrica $\sin 2x-\cos x=0$.

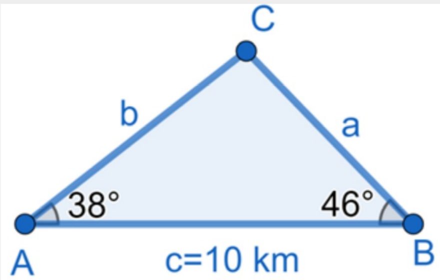
b) Dende dúas cidades A e B, situadas a 10 km, obsérvanse baixo ángulos de 38° e 46°, respectivamente, uns fogos artificiais. A que distancia están a ver os habitantes de cada cidade os fogos artificiais?

a)

$\sin 2x = 2\sin x\cos x \to 2\sin x\cos x - \cos x = 0 \to \cos x\,(2\sin x - 1) = 0 \to$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \to x = 90^o + 180^o k,\ k\in\mathbb{Z}\ ou\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ 2\sin x - 1 = 0 \to \sin x = \dfrac{1}{2} \to \begin{cases} x = 30^o + 360^o k,\ k\in\mathbb{Z}\ ou\ x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ x = 150^o + 360^o k,\ k\in\mathbb{Z}\ ou\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \end{cases} \end{cases}$$

b)



Como os ángulos dun triángulo suman 180^o, obtemos que $\hat{C} = 180^o - (38^o + 46^o) = 180^o - 84^o = 96^o$.

Aplicando o Teorema dos senos:

$$\frac{a}{\sin 38^o} = \frac{10}{\sin 96^o} \to a = \frac{10\cdot\sin 38^o}{\sin 96^o} = 6{,}19\,km$$

$$\frac{b}{\sin 46^o} = \frac{10}{\sin 96^o} \to b = \frac{10\cdot\sin 46^o}{\sin 96^o} = 7{,}23\,km$$

4. Crese que o número de raposos nunha finca está relacionado co número de coellos. Nos últimos anos realizáronse oito censos de ambos animais, resultando estes datos:

X	20	32	16	18	25	30	14	15
Y	320	500	260	300	400	470	210	240

Considerando que a correlación é forte:

(Valoración: 2,5 puntos; a) 1,5 punto; b) 0,5 puntos; c) 0,5 puntos)

a) Determine as rectas de regresión.

b) Estime a cantidade de coellos que habería se houbese 10 raposos.

c) Cantos raposos habería se contamos 350 coellos?

a)

	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
	20	320	400	102400	6400
	32	500	1024	250000	16000
	16	260	256	67600	4160
	18	300	324	90000	5400
	25	400	625	160000	10000
	30	470	900	220900	14100
	14	210	196	44100	2940
	15	240	225	57600	3600
Total	170	2700	3950	992600	62600

Media X: $\bar{x}=\frac{\sum x_i}{N}=\frac{170}{8}=21{,}25$

Varianza de X: $\sigma_x^2=\frac{\sum x_i^2}{N}-\bar{x}^2=\frac{3950}{8}-21{,}25^2=42{,}19$

Desviación típica de X: $\sigma_x=\sqrt{42{,}19}=6{,}50$

Media de Y: $\bar{y}=\frac{\sum y_i}{N}=\frac{2700}{8}=337{,}5$

Varianza Y: $\sigma_y^2=\frac{\sum y_i^2}{N}-\bar{y}^2=\frac{992600}{8}-337{,}5^2=10168{,}75$

Desviación típica de Y: $\sigma_y=\sqrt{10168{,}75}=100{,}84$

Covarianza de X e Y: $\sigma_{xy}=\frac{\sum x_i\cdot y_i}{N}-\bar{x}\cdot\bar{y}=\frac{62600}{8}-21{,}25\cdot 337{,}5=653{,}125$

Recta de regresión de Y sobre X:

$$y-\bar{y}=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x-\bar{x})\rightarrow y-337{,}5=\frac{653{,}125}{42{,}19}(x-21{,}25)\rightarrow y=15{,}48\,x+8{,}54$$

Recta de regresión de X sobre Y:

$$x-\bar{x}=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}(y-\bar{y})\rightarrow y-21{,}25=\frac{653{,}125}{10168{,}75}(x-337{,}5)\rightarrow x=0{,}0064\,y-0{,}43$$

b)
Substituímos $x=10$ na recta de regresión de Y sobre X:
$y=15{,}48\cdot 10+8{,}54=163{,}34$
Haberá 163 coellos.

c) Substituímos $x=350$ na recta de regresión de X sobre Y:
$x=0{,}064\cdot 350-0{,}43=21{,}97$
Haberá 22 raposos.