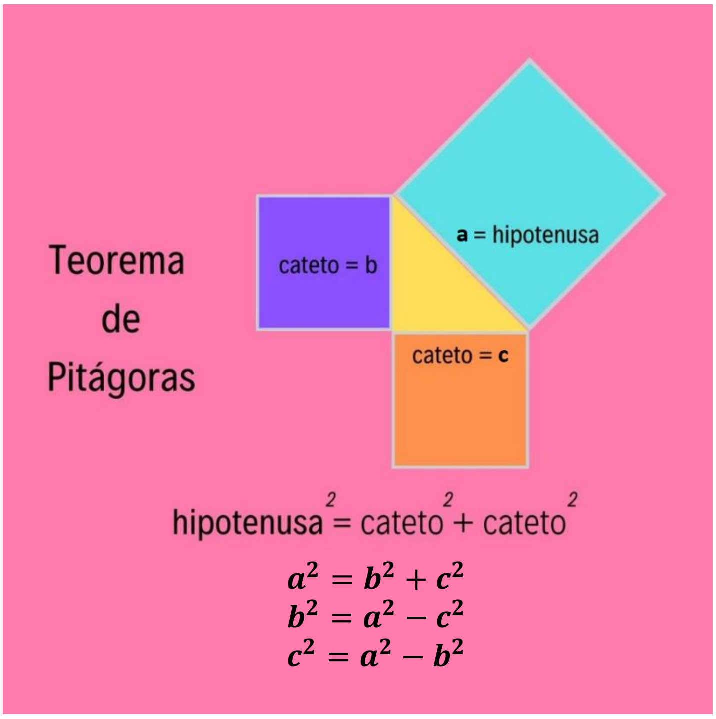
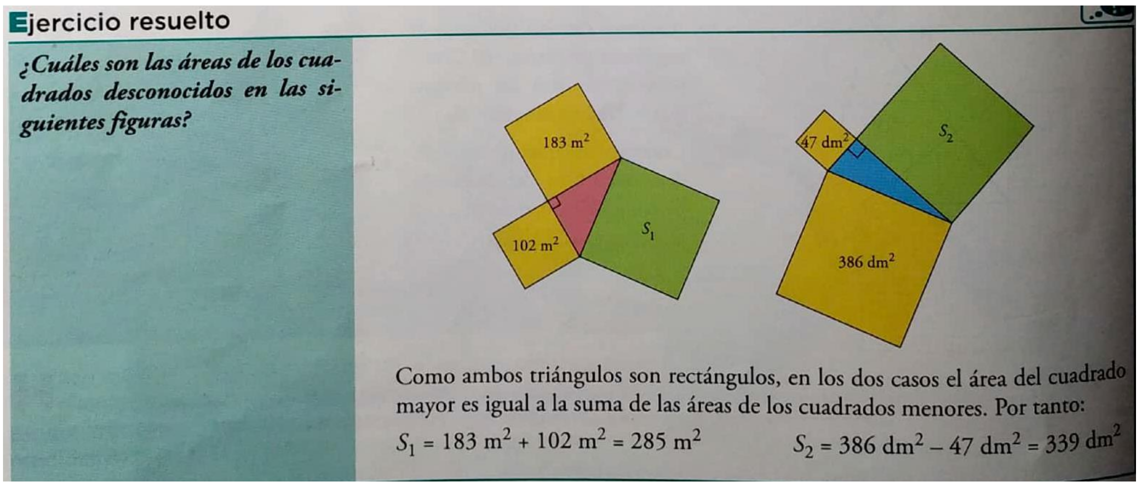
UD 8. SEMEJANZA Y THALES

Teorema de Pitágoras

El **teorema de Pitágoras** afirma lo siguiente: $a^2 = b^2 + c^2$
Esto quiere decir que el área de un cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.
Esta relación es cierta solamente si el triángulo es rectángulo, donde **a** es la hipotenusa y **b** y **c** son los catetos.





Ejercicio resuelto

¿Cuáles son las áreas de los cuadrados desconocidos en las siguientes figuras?

Como ambos triángulos son rectángulos, en los dos casos el área del cuadrado mayor es igual a la suma de las áreas de los cuadrados menores. Por tanto:

S_1 = 183 m^2 + 102 m^2 = 285 m^2 $\qquad$ S_2 = 386 dm^2 – 47 dm^2 = 339 dm^2

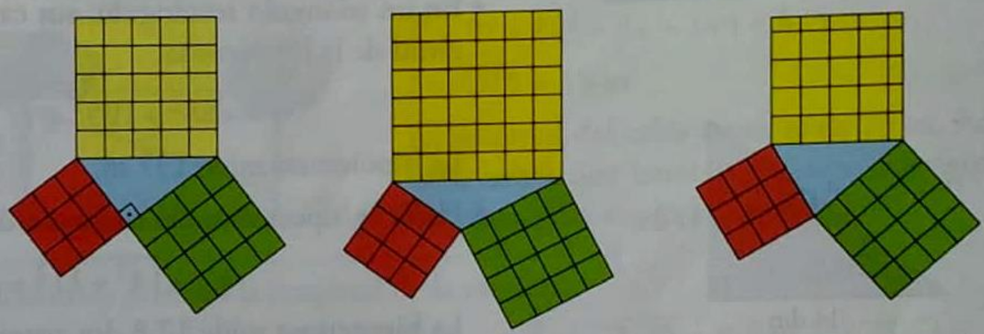
Los lados determinan el tipo de triángulo

Si conocemos los lados de un triángulo, podemos averiguar si es o no rectángulo, comparando el cuadrado del lado mayor con la suma de los cuadrados de los otros dos.

¿a^2 es igual que $b^2 + c^2$?

- Si $a^2 = b^2 + c^2$, el triángulo es **rectángulo.**
- Si $a^2 > b^2 + c^2$, el triángulo es **obtusángulo.**
- Si $a^2 < b^2 + c^2$, el triángulo es **acutángulo.**

RECTÁNGULO | OBTUSÁNGULO | ACUTÁNGULO



5^2 es igual a $3^2 + 4^2$ | 6^2 es mayor que $3^2 + 4^2$ | $4{,}5^2$ es menor que $3^2 + 4^2$

Ejercicio resuelto

Indicar si cada uno de los siguientes triángulos es rectángulo, obtusángulo o acutángulo.

a) 70 cm, 240 cm, 245 cm

b) 15 dm, 36 dm, 39 dm

c) 18 m, 80 m, 83 m

a) $70^2 + 240^2 = 4\,900 + 57\,600 = 62\,500$; $245^2 = 60\,025$

245^2 es menor que $70^2 + 240^2$, por tanto, el triángulo es ACUTÁNGULO.

b) $15^2 + 36^2 = 1\,521$; $39^2 = 1\,521$

Como son iguales, el triángulo es RECTÁNGULO.

c) $18^2 + 80^2 = 6\,724$; $83^2 = 6\,889$

83^2 es mayor que $18^2 + 80^2$, por tanto, el triángulo es OBTUSÁNGULO.

Ternas pitagóricas

Si tres números naturales, c, b, a, cumplen $c^2 + b^2 = a^2$, es decir, si pueden ser las medidas de los lados de un triángulo rectángulo, entonces decimos que forman una **terna pitagórica**. A continuación, se muestran algunas:

3, 4, 5	8, 15, 17	12, 35, 37
5, 12, 13	9, 40, 41	13, 84, 85
7, 24, 25	11, 60, 61	16, 63, 65

Si *c*, *b*, *a* es una terna pitagórica, también lo es *kc*, *kb* y *ka* , siendo *k* un número cualquiera.

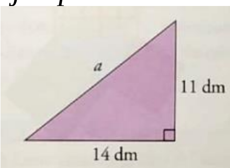
Por ejemplo, 6, 8, 10 (obtenidas al multiplicar por 2 cada uno de los componentes de la terna 3, 4, 5) es una terna pitagórica también.

Si tenemos un triángulo rectángulo, y conocemos la longitud de dos de sus lados, mediante el teorema de Pitágoras podemos calcular la longitud del tercero.

Cálculo de la hipotenusa conociendo los dos catetos

$$\boxed{\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 \;\rightarrow\; a = \sqrt{b^2 + c^2}}}$$

Ejemplo:



• Halla la hipotenusa del triángulo del margen.

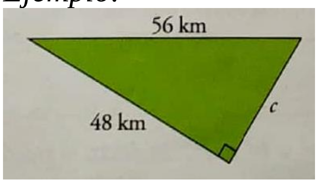
$a = \sqrt{14^2 + 11^2} = \sqrt{196 + 121} = \sqrt{317} = 17{,}8$

La hipotenusa mide 17,8 dm aproximadamente.

Cálculo de un cateto conociendo el otro y la hiptenusa

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 \;\rightarrow b^2 = a^2 - c^2 \;\rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}}$$

Ejemplo:



• Halla la longitud del lado desconocido en el triángulo del margen.

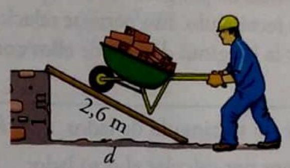
$c = \sqrt{56^2 - 48^2} = \sqrt{3136 - 2\,304} = \sqrt{832} = 28{,}84$

El lado desconocido mide 28,84 km aproximadamente.

Ejercicios resueltos:

1 *Queremos salvar un escalón de 1 m de altura para pasar con la carretilla. Disponemos de un tablón de 2,6 m. ¿A qué distancia del escalón empieza la rampa?*

En este triángulo rectángulo, conocemos la hipotenusa y un cateto. Hemos de calcular el otro cateto.



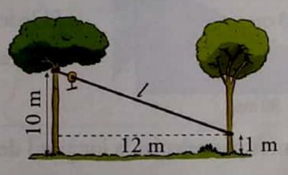
$d^2 = 2{,}6^2 - 1^2 = 6{,}76 - 1 = 5{,}76$

$d = \sqrt{5{,}76} = 2{,}4$ m

El pie del tablón estará situado a 2,4 m del escalón, o algo menos para que pueda apoyarse arriba.

2. *Hay que hacer una tirolina entre dos árboles separados 12 m. El cable estará atado a 10 m de altura de un árbol y a 1 m de altura en el otro. ¿Cuál es la longitud del cable en tensión?*

Conociendo los catetos, hallamos la hipotenusa.



$l^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$

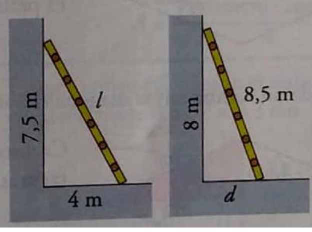
$l = \sqrt{225} = 15$ m

La longitud del cable tenso es de 15 m. Además, habrá que tener en cuenta la longitud necesaria para atarlo a cada árbol.

3. *Una escalera cuyo pie está a 4 m de la pared se apoya en esta, alcanzando una altura de 7,5 m. ¿A qué distancia de la pared debe colocarse el pie para que llegue a una altura de 8 m?*

Calculamos primero la longitud de la escalera.

$l^2 = 4^2 + 7{,}5^2 = 72{,}25 \;\rightarrow\; l = \sqrt{72{,}25} = 8{,}5$ m



Ahora calculamos la distancia a la que debe estar para alcanzar 8 m de altura:

$d^2 = 8{,}5^2 - 8^2 = 72{,}25 - 64 = 8{,}25$

$d = \sqrt{8{,}25} = 2{,}87$ m

El pie de la escalera debe situarse a 2,87 m de la pared.

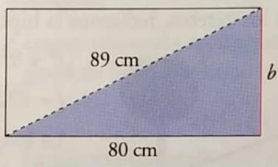
Aplicaciones del teorema de Pitágoras

Ejercicios resueltos

1. ***La diagonal de un rectángulo mide 89 cm, y uno de los lados, 80 cm. Calcula su área.***

El área de un rectángulo de lados a y b es: $A = a \cdot b$

Empezamos por calcular el otro lado:



$$b = \sqrt{89^2 - 80^2} = \sqrt{1521} = 39$$

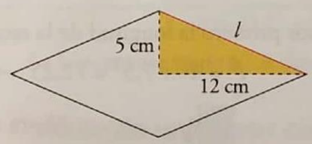
El lado corto mide 39 cm.

El área es:

$$A = 80 \cdot 39 = 3\,120 \text{ cm}^2$$

2. ***Las diagonales de un rombo miden 10 cm y 24 cm. Hallar su perímetro.***

Comenzamos por calcular la longitud de un lado:



$$l = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$$

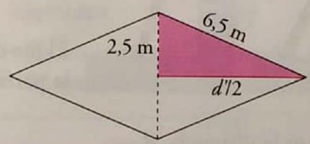
Cada lado mide 13 cm.

El perímetro es:

$$P = 4 \cdot 13 = 52 \text{ cm}$$

3. ***El lado de un rombo mide 6,5 m y una de sus diagonales, 5 m. Hallar su área.***

El área de un rombo cuyas diagonales son d y d' es: $A = \dfrac{d \cdot d'}{2}$



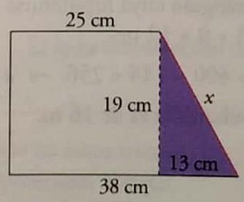
Conocemos una diagonal. El teorema de Pitágoras nos permite calcular la otra:

$$\frac{d'}{2} = \sqrt{6,5^2 - 2,5^2} = 6 \text{ m}$$

La segunda diagonal mide, pues, $6 \cdot 2 = 12$ m. Por tanto, $A = \dfrac{5 \cdot 12}{2} = 30 \text{ m}^2$.

4. ***Las bases de un trapecio rectángulo miden 25 cm y 38 cm, y la altura, 19 cm. Hallar su perímetro.***

Empezamos calculando la longitud del lado oblicuo:



$$x = \sqrt{13^2 + 19^2} = \sqrt{530} \approx 23,02$$

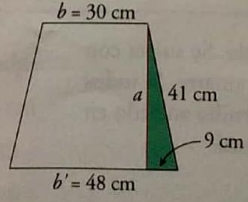
El lado oblicuo mide 23 cm aproximadamente.

El perímetro es:

$$P = 38 + 19 + 25 + 23 = 105 \text{ cm}$$

5. ***Hallar el área de un trapecio isósceles cuyas bases miden 30 cm y 48 cm, y el lado oblicuo, 41 cm.***

Recordemos que el área de un trapecio es: $A = \dfrac{(b + b') \cdot a}{2}$



Hemos de empezar calculando su altura, a. En el triángulo verde, el lado pequeño mide $(48 - 30) : 2 = 9$ cm.

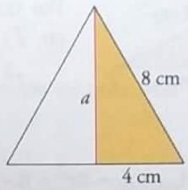
$$a = \sqrt{41^2 - 9^2} = \sqrt{1600} = 40$$

La altura del trapecio mide 40 cm.

$$A = \frac{(30 + 48) \cdot 40}{2} = 1\,560 \text{ cm}^2$$

6. ***Calcular el área de un triángulo equilátero de lado 8 cm.***

Empezamos calculando la altura:



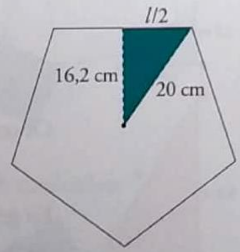
$$a = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} \approx 6{,}9$$

La altura mide 6,9 cm aproximadamente.

El área es:

$$A = \frac{8 \cdot 6{,}9}{2} = 27{,}6 \text{ cm}^2$$

7. ***Calcular el área y el perímetro de un pentágono regular cuya apotema mide 16,2 cm, y el radio, 20 cm.***



Primero calculamos el lado:

$$\frac{l}{2} = \sqrt{20^2 - 16{,}2^2} = \sqrt{137{,}56} \approx 11{,}7$$

El lado del pentágono mide:

$$l = 11{,}7 \cdot 2 = 23{,}4 \text{ cm}$$

Por tanto, su perímetro es:

$$P = 23{,}4 \cdot 5 = 117 \text{ cm}$$

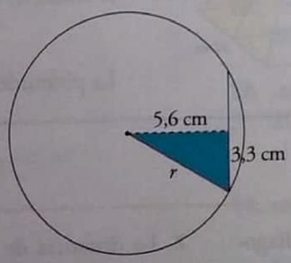
Finalmente, calculamos el área.

$$A = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{117 \cdot 16{,}2}{2} = 947{,}7 \text{ cm}^2$$

8. ***Hallar el perímetro de una circunferencia en la que se ha trazado una cuerda de 6,6 cm a una distancia de 5,6 cm del centro.***

Calcular el área del círculo correspondiente.

Comenzamos calculando el radio. En el triángulo rectángulo coloreado, el lado pequeño mide 6,6 : 2 = 3,3 cm.



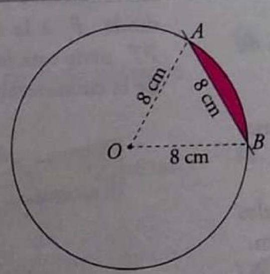
$$r = \sqrt{3{,}3^2 + 5{,}6^2} = \sqrt{42{,}25} = 6{,}5$$

El radio mide 6,5 cm.

$$P = 2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}5 \approx 40{,}8 \text{ cm}$$

$$A = \pi r^2 = 3{,}14 \cdot 6{,}5^2 \approx 132{,}7 \text{ cm}^2$$

9. ***Una circunferencia de 8 cm de radio es cortada por una recta en dos puntos A y B que distan 8 cm entre sí. Calcular el área del segmento circular determinado por la cuerda $\overset{\frown}{AB}$.***



El segmento circular, en rojo, es la diferencia entre el sector circular de arco $\overset{\frown}{AB}$ y el triángulo OAB.

El triángulo OAB, equilátero, es el mismo cuya área hemos obtenido en el ejercicio 6 de esta página ($A_{\text{TRIÁNGULO}} = 27{,}6 \text{ cm}^2$).

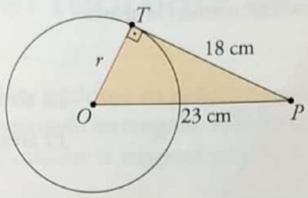
Como el triángulo es equilátero, $\widehat{AOB} = 60°$. Por tanto, el área del sector es la sexta parte del área de todo el círculo:

$$A_{\text{SECTOR}} = (\pi \cdot 8^2) : 6 = 33{,}5 \text{ cm}^2$$

Por tanto:

$$A_{\text{SEGMENTO CIRCULAR}} = 33{,}5 - 27{,}6 = 5{,}9 \text{ cm}^2$$

10. ***La distancia de un punto P al centro O de una circunferencia es $\overline{OP}$ = 23 cm. Trazamos una tangente desde P a la circunferencia. El segmento tangente PT mide 18 cm. Hallar el área del círculo.***

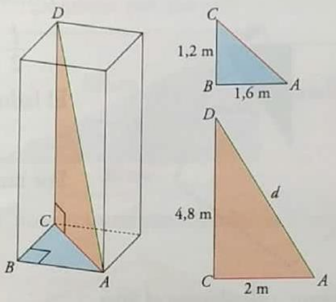


La recta tangente es perpendicular al radio. Por tanto, el triángulo PTO es rectángulo en T:

$$r^2 = \overline{OP}^2 - \overline{PT}^2 = 23^2 - 18^2 = 205$$

$$A_{\text{CÍRCULO}} = \pi r^2 = \pi \cdot 205 \approx 643{,}7 \text{ cm}^2$$

11. ***Hallar la diagonal de un ortoedro de dimensiones 1,2 m; 1,6 m y 4,8 m.***



$$\overline{AC} = \sqrt{1{,}2^2 + 1{,}6^2} = 2 \text{ m}$$

$$d = \sqrt{2^2 + 4{,}8^2} = 5{,}2 \text{ m}$$

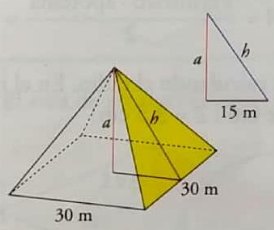
La diagonal del ortoedro mide 5,2 m.

Observa que se puede hallar directamente:

$$d = \sqrt{1{,}2^2 + 1{,}6^2 + 4{,}8^2} = 5{,}2 \text{ m}$$

En general, en un ortoedro de dimensiones $a \times b \times c$ la diagonal es $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

12. ***Calcular la altura, a, de una pirámide cuadrangular regular cuya base es un cuadrado de 30 m de lado y cuya cara lateral tiene un área de 255 m².***



Primero hallamos la altura de la cara lateral.

$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} \rightarrow 255 = \frac{30 \cdot h}{2} \rightarrow h = 17 \text{ m}$$

A partir de la altura de la cara lateral, calculamos la altura de la pirámide:

$$a = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8 \text{ m}$$

La pirámide tiene 8 m de altura.

Figuras semejantes

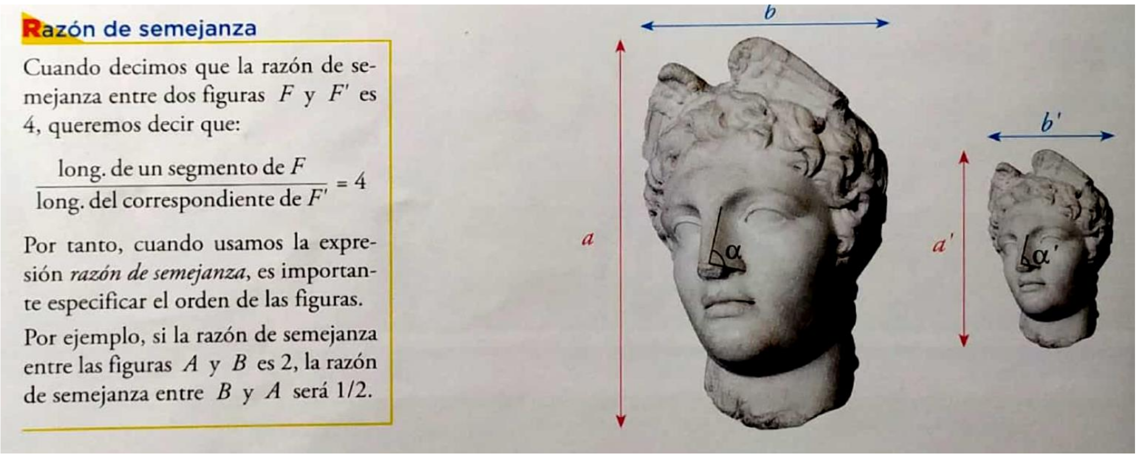
Las dos matrioskas de la imagen son iguales, salvo en el tamaño. Tienen la misma forma; es decir, son **semejantes.**

Dos **figuras** distintas son **semejantes** cuando solo difieren en su tamaño. En tal caso, los segmentos correspondientes son proporcionales. Es decir, cada longitud en las se obtiene multiplicando la longitud correspondiente en la otra por un número fijo, llamado **razón de semejanza.**

En dos figuras semejantes se cumple que:

- Un ángulo medido en la primera = el ángulo correspondiente en la segunda
- Una proporción en la primera = la proporción correspondiente en la segunda.

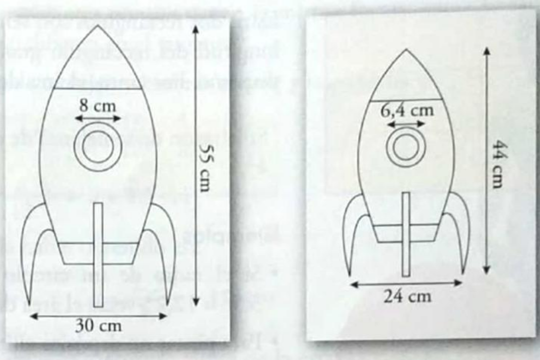
Por ejemplo, en estas dos cabezas:



- Los ángulos α y α' coinciden
- La relación, a/b, entre el largo y el ancho de la primera es la misma que a'/b' en la segunda

rcicios resueltos

Con una fotocopiadora hemos reducido el dibujo de la izquierda obteniendo el de la derecha. ¿Cuál ha sido la reducción?



Si dividimos cualquier segmento de la segunda figura por el correspondiente de la primera, el cociente es 0,8.

Por ejemplo:

- El alto del cohete $\rightarrow \frac{44}{55} = 0{,}8$
- El ancho del cohete $\rightarrow \frac{24}{30} = 0{,}8$
- El diámetro de la ventana $\rightarrow \frac{6{,}4}{8} = 0{,}8$

Este cociente (0,8) es la razón de semejanza que transforma la primera figura en la segunda.

Las fotocopiadoras expresan la razón de semejanza en tantos por ciento. En este caso, es el 80 %.

2. *La razón de semejanza entre dos triángulos semejantes es 0,4. Si el mayor tiene 3 cm de base y 5 cm de altura, ¿cuánto miden la base y la altura del menor?*

Llamamos a y b a la altura y a la base del triángulo menor:

- $\frac{a}{5} = 0{,}4 \rightarrow a = 5 \cdot 0{,}4 = 2$ cm
- $\frac{b}{3} = 0{,}4 \rightarrow b = 3 \cdot 0{,}4 = 1{,}2$ cm

Por tanto, el triángulo menor tiene 1,2 cm de base y 2 cm de altura.

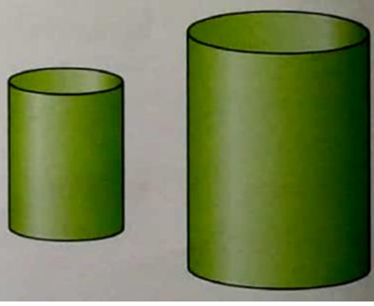
Relación entre las áreas de dos figuras semejantes.

Si la razón de semejanza de dos figuras es k, entonces la razón de sus áreas es k^2

Ejemplos

- Si el radio de un círculo es 3,5 veces el de otro, el área del grande es $3{,}5^2 = 12{,}25$ veces el área del pequeño.
- Para pintar un depósito cilíndrico, se han gastado 12,5 kg de pintura. Otro depósito es semejante al anterior, con razón de semejanza 1,6. ¿Cuánta pintura se necesitará para pintarlo?

  El área del segundo cilindro es $1{,}6^2 = 2{,}56$ veces la del primero. Por lo tanto, se necesitará $12{,}5 \cdot 2{,}56 = 32$ kg de pintura.



Relación entre los volúmenes de dos figuras semejantes.

Si la razón de semejanza de dos figuras es k, entonces la razón de sus volúmenes es k^3

Ejemplos

- Si el radio de una esfera es 3,5 veces el de otra, el volumen de la grande es $3{,}5^3 = 42{,}875$ veces el volumen de la pequeña.
- Si un depósito cilíndrico es semejante a otro, con razón de semejanza 1,6, y el valor del petróleo que cabe en el pequeño es 3750 €, entonces el valor del petróleo que cabe en el segundo es:

$$3750 \cdot 1{,}6^3 = 3750 \cdot 4{,}096 = 15\,360 \text{ €}$$

Problema resuelto

En una pequeña tienda de Florencia venden reproducciones del David, de Miguel Ángel. Las hay de dos tamaños: de 18 cm y de 12 cm de altura.

a) ¿Son figuras semejantes? ¿Cuál es la razón de semejanza entre la estatua grande y la pequeña?

b) La cabeza de la figura mayor mide 2,25 cm de alto. ¿Cuánto mide la de la pequeña?

c) Si la cabeza de la estatua original mide 64,6 cm de alto, ¿qué altura tiene la estatua?

d) Si las dos reproducciones están hechas del mismo material y la pequeña pesa 150 g, ¿cuánto pesa la grande?

e) Si para pintar la pequeña gastamos 4,50 €, ¿cuánto nos costará pintar la grande?

a) Sí, son semejantes porque tienen la misma forma; es decir, solo difieren en el tamaño.

La razón de semejanza entre la grande y la pequeña es:

$$\frac{18}{12} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

b) $\dfrac{2{,}25}{18} = \dfrac{a}{12} \rightarrow a = 1{,}5$ cm

Se podría haber obtenido así:

$$a = \frac{2{,}25}{1{,}5} = 1{,}5 \text{ cm}$$

c) La relación $\dfrac{18}{2{,}25}$ entre la altura de la estatua y el tamaño de la cabeza se cumple también en la estatua real.

$$\frac{altura}{64{,}6} = \frac{18}{2{,}25} \rightarrow altura = \frac{18 \cdot 64{,}6}{2{,}25} = 516{,}8 \approx 517 \text{ cm} = 5{,}17 \text{ m}$$

La altura de la estatua original es 5,17 m.

d) El peso es proporcional al volumen. Y el volumen de la grande es $1{,}5^3 = 3{,}375$ veces el volumen de la pequeña. Por tanto:

Peso de la figura grande = $150 \cdot 3{,}375 = 506{,}25 \approx 506$ g

e) El coste de la pintura es proporcional a la superficie. Y la superficie de la grande es $1{,}5^2 = 2{,}25$ veces la de la pequeña. Por tanto:

Coste de pintar la figura grande = $4{,}5 \cdot 2{,}25 = 10{,}13$ €

Planos, mapas y maquetas

Los planos y los mapas son semejantes a la realidad que representan. En ellos, además de la distribución de lugares, importan los tamaños y las distancias. Por eso llevan una escala.
La **escala** es el cociente entre cada longitud de la reproducción (mapa, plano o maqueta) y la correspondiente longitud en la realidad. Es decir, es la **razón de semejanza** entre la reproducción y la realidad.

Ejemplo

En este mapa de la costa del Levante y las islas Baleares, la escala 1:5 000 000 significa que cada distancia de la realidad se obtiene multiplicando por 5 000 000 la correspondiente en el mapa.

Vamos a comprobar que efectivamente las distancias correspondientes a la realidad son 5 000 000 de veces sus medidas sobre el mapa.

Distancia entre Valencia y Palma de Mallorca:

$$\frac{\text{Distancia real}}{\text{Distancia en el mapa}} = \frac{260\text{ km}}{52\text{ mm}} = \frac{260\,000\,000\text{ mm}}{52\text{ mm}} = 5\,000\,000$$

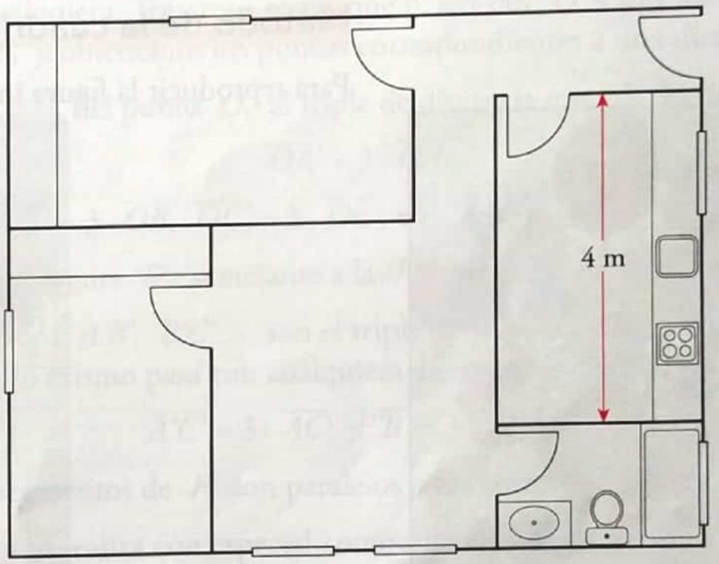
- Comprueba tú el resto de las medidas.

Obtención de la escala.

Cuando se nos da una reproducción (plano, mapa o maqueta) sin indicar su escala, podemos averiguarla si conocemos la distancia real entre dos de sus puntos.

Ejemplo

Tenemos el plano de nuestra casa, pero nos lo han dado sin escala. En lugar de medir todas las paredes, optamos por medir el largo de la cocina tanto en la realidad como en el plano.



Las medidas que obtenemos son:

En el plano: 4 cm

En la realidad: 4 m

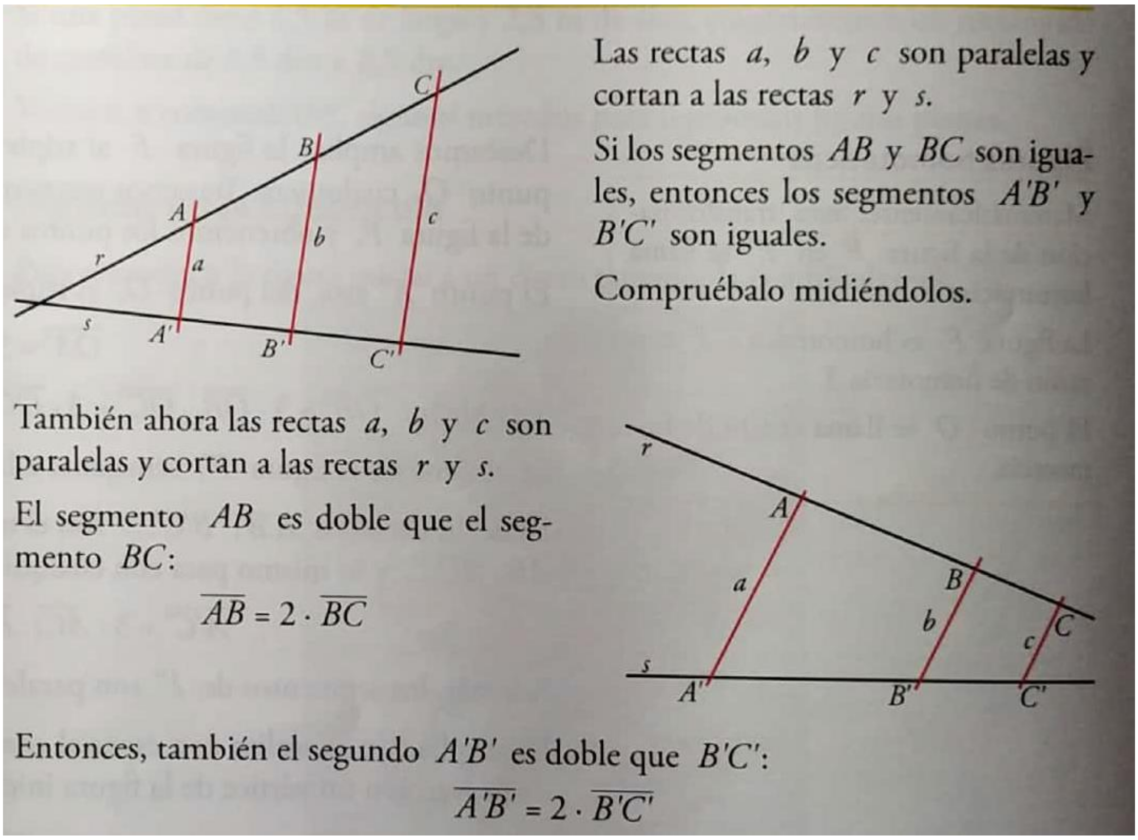
Por tanto, la escala es 1:100.

Ahora podemos obtener cualquier otra distancia midiendo únicamente sobre el plano y multiplicando los resultados por 100.

Teorema de Tales

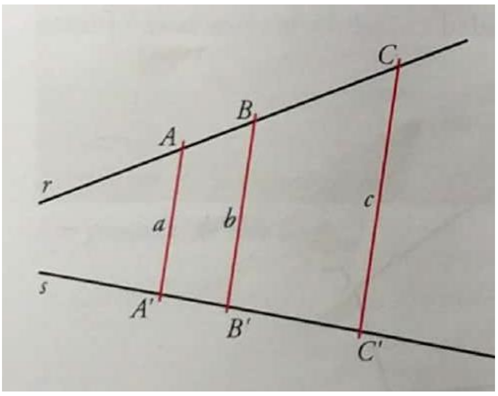
El teorema de Tales es importante porque en él se basa el estudio de la semejanza de triángulos. A partir de los triángulos se comprueba la semejanza de dos figuras cualesquiera.

Rectas paralelas que se cortan dos a dos



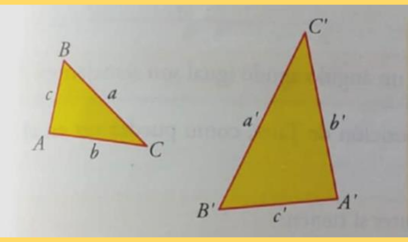
Teorema de Tales
Si las rectas a, b y c son paralelas y cortan a otras dos rectas, r y s, entonces los segmentos que determinan en ellas son proporcionales:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$



Aplicación del teorema de Tales

Los triángulos, además de su sencillez, son básicos para el estudio de las demás figuras (para analizar una figura, a veces se recurre a su triangulación). Por eso, la semejanza de triángulos merece un estudio especial.



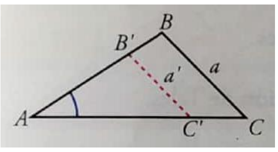
Si los triángulos ABC y $A'B'C'$ del margen son semejantes, entonces:

- $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, $\hat{C} = \hat{C}'$
- $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

Y viceversa, si dos triángulos cumplen estas igualdades, son semejantes.

TRIÁNGULOS EN POSICIÓN DE TALES

Los triángulos ABC y $AB'C'$ tienen un ángulo en común, el $\hat{A}$. Es decir, el triángulo pequeño está "encajado" en el grande. Además, los lados opuestos a $\hat{A}$ son paralelos. Por eso, decimos que estos dos triángulos están en **posición de Tales.**

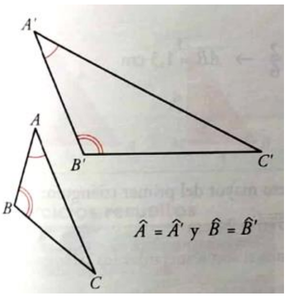


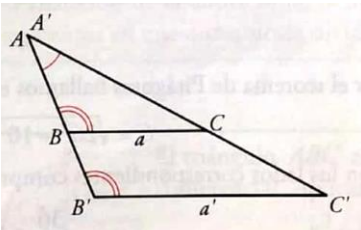
Dos triángulos en posición de Tales son semejantes.

Por tanto, si dos triángulos se pueden poner en posición de Tales, son semejantes.

UN CRITERIO DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Si dos ángulos de un triángulo son respectivamente iguales a dos ángulos de otro triángulo, entonces los triángulos son semejantes.

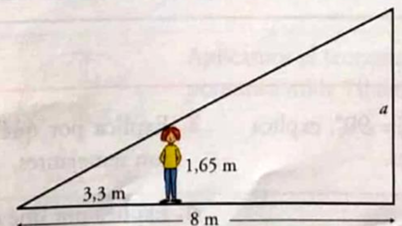




Pues si $\hat{A} = \hat{A}'$, el triángulo pequeño se puede encajar en el grande. Y si, además, $\hat{B} = \hat{B}'$, los lados a y a' quedan paralelos. Así, los dos triángulos se han podido poner en posición de Tales y, por tanto, son semejantes.

Ejercicio resuelto

El salón de la casa de Raquel es abuhardillado. Para medir la altura de la pared, Raquel se coloca como se ve en el dibujo. Teniendo en cuenta las medidas, calcular la altura máxima del salón.



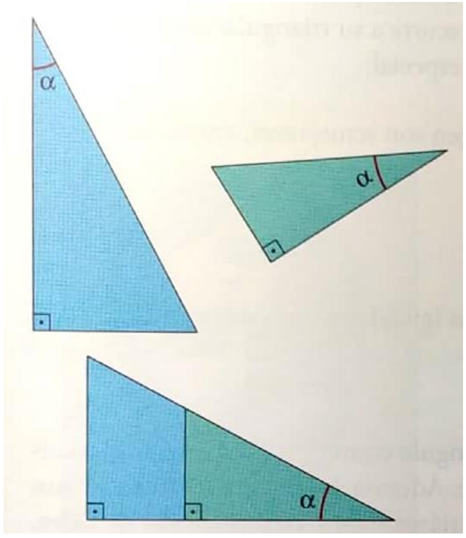
Llamamos a a la altura máxima del salón de Raquel.

Como son dos triángulos en posición de Tales, son semejantes. Por tanto:

$$\frac{1,65}{3,3} = \frac{a}{8} \rightarrow a = \frac{1,65 \cdot 8}{3,3} = 4 \text{ m}$$

Semejanza entre triángulos rectángulos

Los triángulos rectángulos son especialmente importantes. Veamos algunos criterios por los cuales se comprueba muy fácilmente si dos triángulos rectángulos son o no semejantes.



Dos triángulos rectángulos que tengan un ángulo agudo igual son semejantes.

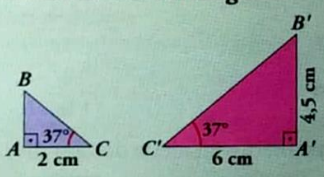
Pues, en tal caso, se pueden poner en posición de Tales, como se puede ver en la figura.

Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen: sus dos catetos proporcionales, o bien un cateto y la hipotenusa proporcionales.

También en estos casos se pueden poner en posición de Tales.

Ejercicios resueltos

1. ***Observar estos triángulos:***



a) ¿Son semejantes?

b) Calcular el cateto AB.

a) Los dos triángulos son semejantes porque son rectángulos y tienen un ángulo agudo igual.

b) Calculamos el cateto AB:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} \rightarrow \frac{\overline{AB}}{4,5} = \frac{2}{6} \rightarrow \overline{AB} = 1,5 \text{ cm}$$

2. ***En un triángulo rectángulo, el cateto menor mide 10 cm, y la hipotenusa, 26 cm. En otro triángulo rectángulo, el cateto mayor mide 36 cm, y la hipotenusa, 39 cm. ¿Son semejantes?***

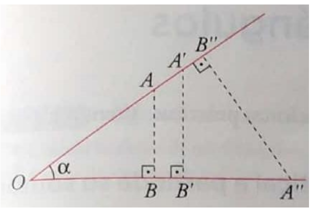
Por el teorema de Pitágoras hallamos el cateto mayor del primer triángulo:

$$C = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{576} = 24 \text{ cm}$$

Con los lados correspondientes comprobamos si son semejantes los triángulos:

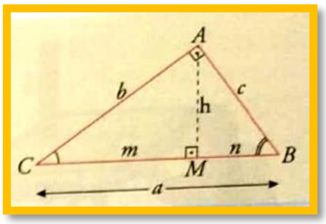
$$\frac{36}{24} = \frac{39}{26} = 1,5$$

Como sus lados son proporcionales, los triángulos son semejantes.



Todos los triángulos obtenidos al trazar perpendiculares a alguno de los lados de un ángulo son semejantes, ya que todos son triángulos rectángulos y tienen un ángulo α en común. Por tanto, sus lados son proporcionales.

En un triángulo rectángulo, la altura sobre la hipotenusa determina dos triángulos semejantes al original.

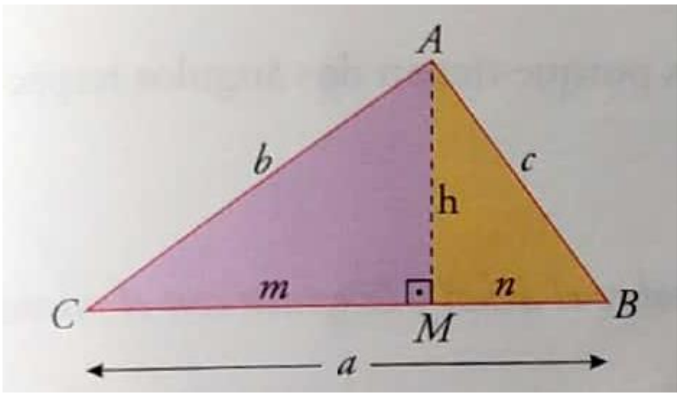


Teorema del cateto

Los dos triángulos rectángulos de la figura, formados al trazar la altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, son semejantes al grande y entre sí. Por tanto:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m} \rightarrow b^2 = a \cdot m$$

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{n} \rightarrow c^2 = a \cdot n$$



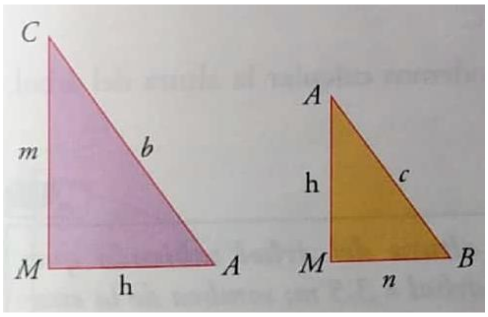
El cuadrado de un cateto es igual al producto de la hipotenusa por la proyección de dicho cateto sobre la hipotenusa.

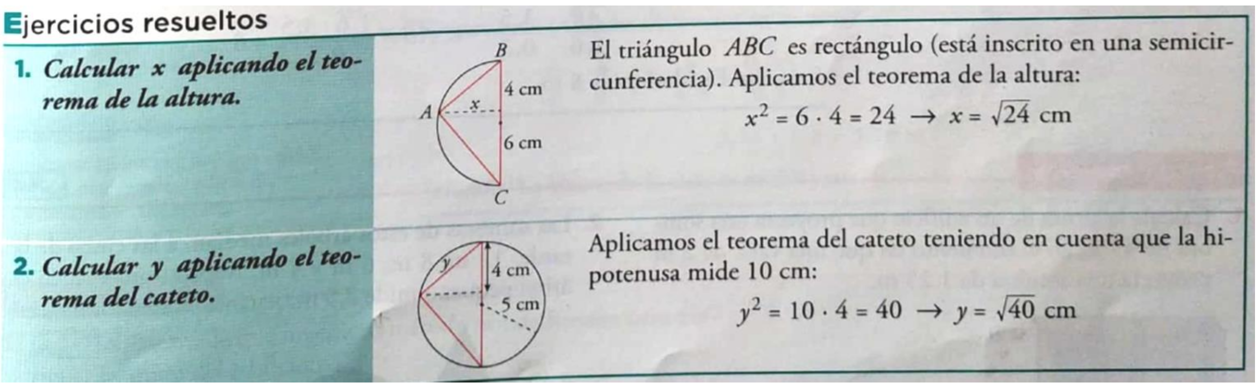
Teorema de la altura

De la semejanza de dos triángulos *MAC* y *MBA* de la figura se obtiene:

$$\frac{m}{h} = \frac{h}{n} \rightarrow h^2 = m \cdot n$$

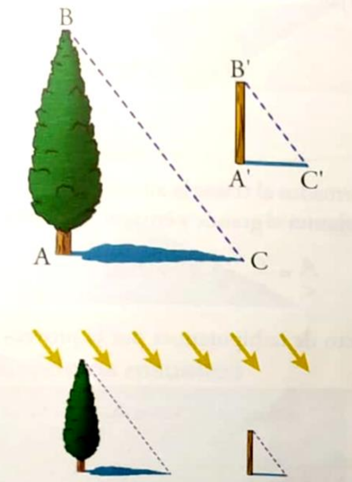
El cuadrado de la altura sobre la hipotenusa es igual al producto de los dos segmentos en que dicha altura divide a la hipotenusa.





Aplicaciones de la semejanza de triángulos

Cálculo de la altura de un objeto vertical a partir de su sombra



Los rayos del sol llegan a la Tierra paralelos unos a otros.

Para calcular la altura de un árbol, $\overline{AB}$, procedemos del siguiente modo:

- Clavamos en el suelo, verticalmente, una estaca $A'B'$.
- Medimos la longitud de la estaca, $\overline{A'B'}$, y de las sombras, $\overline{AC}$ y $\overline{A'C'}$, del árbol y de la estaca, respectivamente, proyectadas por el sol en el mismo instante.

Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes porque tienen dos ángulos respectivamente iguales:

$\hat{A} = \hat{A}'$ porque los dos son rectos.

$\hat{C} = \hat{C}'$ porque *los rayos del sol inciden sobre el árbol y la estaca con el mismo ángulo.*

Puesto que los triángulos son semejantes, sus lados son proporcionales:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

Como conocemos $\overline{AC}$, $\overline{A'B'}$ y $\overline{A'C'}$, podemos calcular la altura del árbol, $\overline{AB}$.

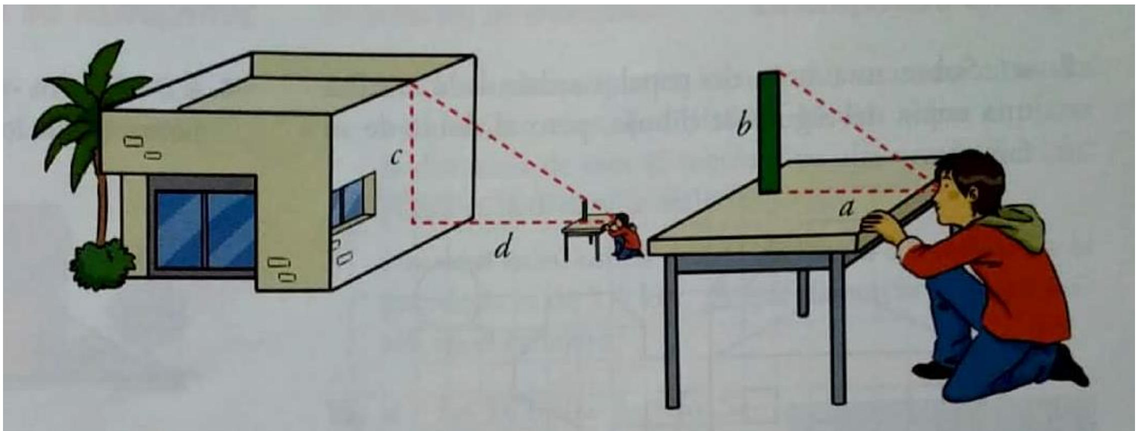
Problema resuelto

En la descripción anterior, calcular la altura del árbol sabiendo que: longitud de la estaca = 1,6 m; sombra del árbol = 3,5 m; sombra de la estaca = 0,7 m.

$$\frac{\overline{AB}}{1,6} = \frac{3,5}{0,7} \rightarrow \overline{AB} = \frac{1,6 \cdot 3,5}{0,7} = 8$$

Solución: El árbol mide 8 m.

Cálculo de la altura de un objeto vertical sin recurrir a su sombra

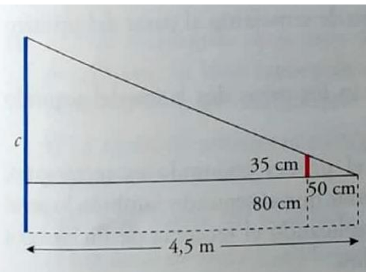


El chico lanza una visual desde el borde de la mesa al punto más alto de la casa. Estando en esa posición, mueve la regla, situándola de modo que su extremo quede alineado con la visual (la mesa debe estar en posición horizontal, y la regla, en vertical).

Los triángulos rectángulos, de catetos a, b y d, c, son semejantes, pues se encuentran en posición de Tales. Por tanto:

$$\frac{c}{d} = \frac{b}{a}$$

Conociendo a, b y d, se calcula c. La altura de la casa es igual a c más la altura de la mesa.



En la web

Problemas en los que hay que calcular medidas inaccesibles utilizando la semejanza de triángulos.

Problema resuelto

En la descripción anterior, calcular la altura de la casa sabiendo que: longitud de la regla, $b = 35$ cm; distancia del borde de la mesa al pie de la regla, $a = 50$ cm; distancia del borde de la mesa a la casa, $d = 4,5$ m; altura de la mesa = 80 cm.

Expresamos todas las distancias en metros.

$$\frac{c}{d} = \frac{b}{a} \rightarrow \frac{c}{4,5} = \frac{0,35}{0,5} \rightarrow c = \frac{4,5 \cdot 0,35}{0,5} = 3,15 \text{ m}$$

$$3,15 + 0,8 = 3,95 \text{ m}$$

Solución: La altura de la casa es de 3,95 m.