RESUMEN DE LA UNIDAD

- Un *sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas*, x e y, se expresa de la forma:

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= k \\ a'x + b'y &= k' \end{aligned}\right\}$$

- *Resolver un sistema* es encontrar dos números que, al reemplazarlos en las dos ecuaciones, las verifiquen. Un *sistema* es *compatible* si tiene solución.
- Dos *sistemas* son *equivalentes* si tienen la misma solución.
- *Método de sustitución*: despejar una incógnita en una ecuación y sustituirla en la otra.
- *Método de igualación*: despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones, e igualar las expresiones obtenidas.
- *Método de reducción*: buscar un sistema equivalente donde los coeficientes de una misma incógnita sean iguales y opuestos; restar o sumar las ecuaciones, eliminando así una incógnita, y resolver la ecuación.

Un **sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas** es un conjunto de dos ecuaciones de las que se busca una solución común.

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= k \\ a'x + b'y &= k' \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \textbf{Coeficientes} \text{ de las incógnitas: } a, a', b, b' \\ \textbf{Términos independientes: } k, k' \end{array}\right.$$

EJEMPLO

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x + y} &\boldsymbol{= 5} \\ \boldsymbol{x - 2y} &\boldsymbol{= 2} \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Incógnitas: } x, y \\ \text{Coeficientes de las incógnitas: } 1, 1, 1, -2 \\ \text{Términos independientes: } 5, 2 \end{array}\right.$$

1 **Determina las incógnitas, los coeficientes y los términos independientes de estos sistemas.**

a) $\left.\begin{aligned} x - 2y &= 7 \\ 3x - y &= 2 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} -2x + y &= -1 \\ x - y &= 0 \end{aligned}\right\}$

- Una **solución** de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es un par de números que verifica ambas ecuaciones.
- **Resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas** es encontrar sus soluciones.
- **Si un sistema tiene solución**, es decir, si se pueden encontrar dos números que cumplan las dos ecuaciones, se dice que es **compatible**.

EJEMPLO

Comprueba si el siguiente sistema de ecuaciones tiene como solución $x = 4$ e $y = 1$.

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 5 \\ x - 2y &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Veamos si la solución del enunciado verifica las dos ecuaciones del sistema.

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 5 \\ x - 2y &= 2 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{x=4,\ y=1} \left.\begin{aligned} 4 + 1 &= 5 \\ 4 - 2 \cdot 1 &= 2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \\ &\rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \end{aligned}$$

Por tanto, $x = 4$ e $y = 1$ es una solución del sistema. El sistema es compatible.

2 **Determina si $x = 0$ e $y = -1$ es solución de estos sistemas.**

a) $\left.\begin{aligned} 3x - y &= 1 \\ x + 4y &= 2 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x + 4y &= 2 \\ 3y &= -3 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} x - y &= 1 \\ 2x + 4y &= -4 \end{aligned}\right\}$

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el **método de sustitución**, debemos:

a) **Despejar** la incógnita en una de las dos ecuaciones.

b) **Sustituir** la expresión obtenida en la otra ecuación.

c) **Resolver** la ecuación con una incógnita que resulta.

d) **Sustituir** el valor obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones para obtener la otra incógnita.

e) **Comprobar** que la solución obtenida verifica ambas ecuaciones. **(opcional)**

3 **Resuelve mediante el método de sustitución:**

a) $\left.\begin{aligned} \frac{3x - 1}{5} + 2y &= 1 \\ y + \frac{3x}{2} &= 2 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} \frac{x - 2}{3} + y &= 4 \\ x + \frac{y}{3} &= 6 \end{aligned}\right\}$

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el **método de igualación**, debemos:

a) **Despejar** la misma incógnita en las dos ecuaciones.

b) **Igualar** las expresiones obtenidas.

c) **Resolver** la ecuación de una incógnita que resulta.

d) **Sustituir** el valor obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones para obtener la otra incógnita.

e) **Comprobar** la solución obtenida. **(opcional)**

4 **Resuelve mediante el método de igualación**

a) $\left.\begin{aligned} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} &= 6 \\ \frac{x}{3} + \frac{2y}{9} &= 6 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} &= 4 \\ x + y &= 10 \end{aligned}\right\}$

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el **método de reducción**, debemos:

a) **Buscar un sistema equivalente** donde los coeficientes de una misma incógnita sean iguales u opuestos.
b) **Restar** o **sumar** las dos ecuaciones obtenidas, eliminando así una incógnita.
c) **Resolver** la ecuación que resulta.
d) **Sustituir** el valor obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones para obtener la otra incógnita.
e) **Comprobar** la solución obtenida. **(opcional)**

Pasos para resolver un sistema de ecuaciones por el método gráfico

Los pasos para resolver un sistema de ecuaciones por el método gráfico son los siguientes:

1.Despejamos la incógnita «y» en cada una de las ecuaciones
2.Representamos cada una de las rectas en los ejes de coordenadas
3.Las coordenadas del punto de corte de ambas rectas, será la solución del sistema de ecuaciones.

Si las rectas saliesen paralelas, el sistema no tendría solución.
Si las rectas fuesen coincidentes (la misma recta), el sistema tendría infinitas soluciones.

5.- Resuelve gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 2x+3y=-4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x - y = -2 \\ 2x+y=-3 \end{cases}$

Ejercicios de Sistemas de Ecuaciones

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método especificado:

Método de Sustitución

1. $\begin{cases} 2x-y=7 \\ x+2y=6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x-3y=2 \\ 3x-9y=6 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x-2y=5 \\ 6x-4y=-3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x+y=7 \\ x+3y=11 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x+3y=3 \\ 5x-6y=3 \end{cases}$

Método de Reducción

6. $\begin{cases} 5x-y=7 \\ 3x+2y=12 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x-2y=10 \\ x+3y=7 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 4x-5y=2 \\ 3x-2y=5 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 6x-4y=20 \\ 3x-2y=10 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x+y=40 \\ 3x+3y=100 \end{cases}$

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método que creas más conveniente. Primero tendrás que transformarlos para que queden como los ejercicios que has hecho anteriormente:

16. $\begin{cases} 2x+y-10=0 \\ 2(x+3y)=12 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 0{,}6x+0{,}2y=8 \\ 0{,}4x+0{,}2y=5{,}8 \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{5}=7 \\ \dfrac{2x}{8}-\dfrac{3y}{9}=-2 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 5x+3y=4x-9 \\ 3(x+y)=13-2(4-5y) \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dfrac{x+2}{3}=x-y \\ 2x+y=\dfrac{y+3}{6} \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{2y}{3}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{5x}{4}+\dfrac{2y}{3}=\dfrac{3}{4} \end{cases}$

22. $\begin{cases} x-2(x+y)=3y-2 \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=3 \end{cases}$

23.- $\begin{cases} \dfrac{3(1-x)}{3}-\dfrac{y-1}{5}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{5(x+1)+7(2y-1)}{6}=2 \end{cases}$

24.- $\begin{cases} \dfrac{x+2y}{5}=3 \\ 2x+5y-8=4\cdot(y+1) \end{cases}$

25.- $\left.\begin{matrix} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}=0 \\ \dfrac{5(x+1)}{7}-\dfrac{2(y+2)}{3}=-2 \end{matrix}\right\}$

26.- $\begin{cases} \dfrac{2(x+1)}{3}-y=-3 \\ 3(x+5-y)+3x=12 \end{cases}$

27.- $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{2}+\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{11}{6} \\ -\dfrac{2x}{5}+\dfrac{y-1}{10}=-\dfrac{6}{5} \end{cases}$

28.- $\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=5 \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{4}=1 \end{cases}$

29.- $\left.\begin{matrix} 3y-2=x-2(x+y) \\ 2(y-2)=18-x-y-(x+4) \end{matrix}\right\}$

PASOS PARA RESOLVER UN PROBLEMA CON UN SISTEMA DE ECUACIONES

1.- Identificar cada una de las incógnitas.
2.- Plantear dos ecuaciones.
3.- Resolver el sistema formado por ambas ecuaciones por el método que consideremos más adecuado y ver que da una solución coherente (con sentido).
4.- (Opcional) Comprobar la solución.
5.- Escribir la solución obtenida con una frase.

Resuelve los siguientes problemas siguiendo los pasos anteriormente citados:

Problemas de sistemas de ecuaciones lineales

1 • Hemos comprado 3 yogures de frutas y 2 naturales por 1,45 € y, ayer, 2 de frutas y 5 naturales por 1,7 €. Determinar el precio de cada tipo de yogur. ***(Solución: frutas a 0,35 € y natural a 0,20 €)***

2 • En la cooperativa se han envasado 300 litros de aceite en 120 garrafas de dos y cinco litros. ¿Cuántas se han utilizado de cada clase? ***(Solución: 60 garrafas de cada una)***

3 • Enrique tiene una colección de arañas y moscas con un total de 13 animales. Si cuentas las patas de todos ellos le salen 88. ¿Cuántos animales de cada tipo tiene? ***(Solución: 5 arañas y 8 moscas)***

4 • El día del estreno de una película se vendieron 600 entradas y se recaudaron 4450 €. Si los adultos pagaban 8 € y los niños 6 €, ¿cuántos adultos y niños que acudieron? ***(Solución: 425 adultos y 175 niños)***

5 • En una pastelería se fabrican dos tipos de tartas. Cada tarta del primer tipo necesita 2'4 Kg de masa y 3 horas de elaboración. Las del segundo tipo necesitan 4 Kg de masa y 2 horas de elaboración cada una. Calcula el número de tartas elaboradas de cada tipo si se han dedicado 67 horas de trabajo y 80 Kg de masa. ***(Solución: 15 tartas del primer tipo y 11 del segundo)***

6 • Un hotel tiene habitaciones dobles (2 camas) y sencillas (1 cama). En total tiene 47 habitaciones y 79 camas. ¿Cuántas habitaciones tiene de cada tipo? ***(Solución: 32 dobles y 15 sencillas)***

7 •• Uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es 18º mayor que el otro. ¿Cuánto mide cada ángulo del triángulo? ***(Solución: 36º, 54º y 90º respectivamente)***

8 •• ¿Cuál es el área de un rectángulo sabiendo que su perímetro mide 16 cm y que su base es el triple de su altura? ***(Solución: 2 y 6 cm respectivamente)***

9 •• Hallar un número de dos cifras que cumple que la segunda cifra es el doble de la primera y la suma de las cifras es 12. ***(Solución: 48)***

10 •• Con dos camiones cuyas capacidades de carga son respectivamente de 3 y 4 toneladas, se hicieron en total 23 viajes para transportar 80 toneladas de madera. ¿Cuántos viajes realizó cada camión? ***(Solución: 12 viajes el primero y 11 el segundo)***

11 •• En un examen de matemáticas se les hace un test a los alumnos con 30 cuestiones. Por cada cuestión contestada correctamente se le dan 5 puntos y por cada cuestión incorrecta o no contestada se le quitan 2 puntos. Un alumno obtuvo en total 94 puntos. ¿Cuántas cuestiones respondió correctamente? (Solución: 22 aciertos)

12 ••• Encuentra un número de dos cifras sabiendo que su cifra de la decena suma 5 con la cifra de su unidad y que si se invierte el orden de sus cifras se obtiene un número 27 unidades menor que él. ***(Solución: 41)***

13 ••• Juan compró un ordenador y un televisor por 2000 € y los vendió por 2260 €. ¿Cuánto le costó cada objeto, sabiendo que en la venta del ordenador ganó el 10% y en la venta del televisor ganó el 15%? ***(Solución: 8 ordenadores y 12 televisores)***

14.- Juan compró un ordenador y un televisor por 2000 € y los vendió por 2260 €. ¿Cuánto le costó cada objeto, sabiendo que en la venta del ordenador ganó el 10% y en la venta del televisor ganó el 15%?.

15.- La edad de Rubén es la quinta parte de la edad de su padre. Dentro de tres años, la edad de Rubén será la cuarta parte de la edad de su padre. ¿Qué edad tiene cada uno actualmente?

16.- Halla las edades de dos personas si hace 10 años la primera tenía cuatro veces la edad de la segunda, y dentro de 20 años la edad de la primera será el doble que la de la segunda.

17.- Un fabricante de bombillas gana 0'3 euros por cada bombilla que sale de la fábrica, pero pierde 0'4 euros por cada una que sale defectuosa. Un día en el que fabricó 2100 bombillas obtuvo un beneficio de 484'4 euros. ¿Cuántas bombillas buenas y cuántas defectuosas fabricó ese día?

18.-Hace tres años, la edad de un tío era el triple de la edad de su sobrino, pero dentro de 5 años tendrá solo el doble. ¿ Cuántos años tiene cada uno actualmente?

19.- En una tienda de regalos se adquiere un libro y una pulsera. La suma de los precios que marcan los dos productos es de 35 euros. Pero el dependiente informa que las pulseras tienen una rebaja del 12% y los libros tienen otra rebaja del 6%, por lo que en realidad debe pagar 31'40 euros. ¿ Qué precio marcaban el libro y la pulsera? ¿ Qué precio se ha pagado finalmente por cada uno de estos productos?

20.- María lleva en el monedero varias monedas de 20 y 5 céntimos. Di cuántas monedas tiene de cada tipo si son 12 monedas y suman un total de 1'50€.