

IDENTIDADES Y ECUACIONES

- Una **igualdad algebraica** está formada por dos expresiones algebraicas separadas por el signo igual (=).
- Una **identidad** es una igualdad algebraica que se verifica para cualquier valor de las letras.
- Una **ecuación** es una igualdad algebraica que no se cumple para todos los valores de las letras.
Resolver una ecuación es encontrar el valor o los valores de las letras para que se cumpla la igualdad.

EJEMPLO

$x + x = 2x$ es una identidad.

Se cumple la igualdad para cualquier valor numérico que tome x :

Para $x = 1 \rightarrow 1 + 1 = 2 \cdot 1 \rightarrow 2 = 2$

Para $x = -2 \rightarrow (-2) + (-2) = 2(-2) \rightarrow -4 = -4$

$x + 4 = 10$ es una ecuación. Solo se cumple cuando $x = 6 \rightarrow 6 + 4 = 10$.

1 Indica si las igualdades son identidades o ecuaciones.

a) $x + 8 = 2x - 15$

d) $x^2 \cdot x^3 = x^5$

b) $2(x + 2y) = 2x + 4y$

e) $2x + 1 = 11$

c) $x + x + x = 3x$

f) $\frac{x}{2} = 12$

MÉTODO GENERAL DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

Resuelve la ecuación $2(x - 4) - (6 + x) = 3x - 4$.

Para resolver una ecuación es conveniente seguir estos pasos.

1.º Eliminar paréntesis.

$$2x - 8 - 6 - x = 3x - 4$$

2.º Reducir términos semejantes.

$$x - 14 = 3x - 4$$

3.º Transponer términos.

Restamos x en ambos miembros.

$$x - x - 14 = 3x - x - 4$$

$$-14 = 2x - 4$$

Sumamos 4 en ambos miembros.

$$-14 + 4 = 2x - 4 + 4$$

$$-10 = 2x$$

4.º Despejar la incógnita.

Dividimos ambos miembros entre 2.

$$\frac{-10}{2} = \frac{2x}{2} \rightarrow -5 = x$$

2.- Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $2(x - 5) = 3(x + 1) - 3$

b) $4(x - 2) + 1 = 5(x + 1) - 3x$

c) $3(x - 3) = 5(x - 1) - 6x$

d) $3(x + 2) + 4(2x + 1) = 11x - 2(x + 6)$

e) $5(x - 4) + 30 = 4(x + 6)$

f) $5(2 - x) + 3(x + 6) = 10 - 4(6 + 2x)$

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CON DENOMINADORES

Resuelve la ecuación $\frac{2x-1}{3} = \frac{x-3}{2} + \frac{3x-7}{4}$.

Para resolver una ecuación con denominadores es conveniente seguir estos pasos.

1.º Eliminar denominadores.

$$\text{m.c.m. } (3, 2, 4) = 3 \cdot 2^2 = 12$$

$$12 \cdot \frac{2x-1}{3} = 12 \cdot \frac{x-3}{2} + 12 \cdot \frac{3x-7}{4}$$

$$4(2x-1) = 6(x-3) + 3(3x-7)$$

2.º Eliminar paréntesis.

$$8x - 4 = 6x - 18 + 9x - 21$$

3.º Reducir términos semejantes.

$$8x - 4 = 15x - 39$$

4.º Transponer términos.

Restamos $8x$ en ambos miembros.

$$8x - 4 - 8x = 15x - 39 - 8x$$
$$-4 = 7x - 39$$

Sumamos 39 en ambos miembros.

$$-4 + 39 = 7x - 39 + 39$$
$$35 = 7x$$

5.º Despejar la incógnita.

Dividimos ambos miembros entre 7 .

$$\frac{35}{7} = \frac{7x}{7} \rightarrow x = 5$$

3.- Halla la solución de estas ecuaciones.

a) $\frac{x-1}{4} - \frac{12-2x}{5} = \frac{x-2}{5}$

e) $\frac{x-3}{6} = 2 - \frac{5(x+3)}{12}$

b) $\frac{x-2}{2} + \frac{x-3}{3} + \frac{x-4}{4} = 10$

f) $5 - \frac{x-2}{4} = 4 + \frac{x-3}{2}$

c) $\frac{x-4}{5} + \frac{x+3}{6} - \frac{x-6}{3} = 1 + \frac{x-7}{2}$

g) $\frac{x+4}{3} - \frac{x-4}{5} = 2 + \frac{3x-1}{15}$

d) $\frac{3x-7}{12} - \frac{2x-3}{6} = \frac{x-1}{8}$

h) $2\left(\frac{x}{3} + 5\right) = \frac{2x}{4} + 4$

ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Una **ecuación de segundo grado** es una igualdad algebraica del tipo $ax^2 + bx + c = 0$, donde:

- a , b y c son los **coeficientes** de la ecuación, siendo $a \neq 0$.
- $ax^2 \rightarrow$ **término cuadrático** $bx \rightarrow$ **término lineal** $c \rightarrow$ **término independiente**
- x es la **incógnita**.

1 Escribe la expresión general de estas ecuaciones de segundo grado.

a) $(x-1)(x+4) = 1 \rightarrow x^2 + 4x - x - 4 = 1 \rightarrow x^2 + 3x - 4 - 1 = 0 \rightarrow x^2 + 3x - 5 = 0$

b) $2x(3x+5) = -1 + 4x$

c) $x - 5x^2 + 8 = -3x^2 - x - 3$

ECUACIONES DEL TIPO $ax^2 + bx = 0$

Las ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$ se consideran ecuaciones de segundo grado. Son ecuaciones del tipo $ax^2 + bx + c = 0$, donde $c = 0$.

Para resolverlas se sigue este proceso.

$$ax^2 + bx = 0 \xrightarrow{\text{Factor común } x} x(ax + b) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ ax + b = 0 \rightarrow x_2 = \frac{-b}{a} \end{cases}$$

Estas ecuaciones tienen siempre dos soluciones, siendo cero una de ellas.

EJEMPLO

$$x^2 - 12x = 0 \rightarrow x(x - 12) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x - 12 = 0 \rightarrow x_2 = 12 \end{cases}$$

$$2x^2 + 5x = 0 \rightarrow x(2x + 5) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x + 5 = 0 \rightarrow 2x = -5 \rightarrow x_2 = \frac{-5}{2} \end{cases}$$

6.- Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $5x^2 + 5x = 0$

b) $2x^2 - 8x = 0$

c) $6x^2 = 30x$

d) $-5x^2 + 20x = 0$

7.- Halla la solución de estas ecuaciones.

a) $25x^2 - 100x = 0$

d) $-4x^2 + 16x = 0$

b) $x - x^2 = 0$

e) $\frac{x(x-1)}{2} = \frac{2x^2+3}{3}$

c) $5x - 4x^2 = 0$

f) $x(x-3) + 8 = 4(x+2)$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Para resolver un problema utilizando ecuaciones es conveniente seguir estos pasos.

- 1.º **Lectura y comprensión del enunciado.** Es necesario distinguir los datos conocidos y el dato desconocido, es decir, la incógnita.
- 2.º **Planteamiento de la ecuación.** Hay que expresar las condiciones del enunciado en forma de ecuación: la correspondencia entre los datos y la incógnita.
- 3.º **Resolución de la ecuación.** Se obtiene el valor de la incógnita resolviendo la ecuación.
- 4.º **Comprobación e interpretación del resultado.** Se debe comprobar si el resultado verifica el enunciado e interpretar la solución en el contexto del problema.

EJEMPLO

Ana tiene 2 € más que Berta, Berta tiene 2 € más que Eva y Eva tiene 2 € más que Luisa. Entre las cuatro amigas tienen 48 €. Calcula la cantidad de dinero que tiene cada una.

1.º **Lectura y comprensión del enunciado.**

Tomamos como dato desconocido el dinero que tiene Luisa.

2.º **Planteamiento de la ecuación.**

Dinero de Luisa $\rightarrow x$

Las restantes cantidades de dinero las escribimos en función de x :

Dinero de Eva $\rightarrow 2$ € más que Luisa $\rightarrow x + 2$

Dinero de Berta $\rightarrow 2$ € más que Eva $\rightarrow (x + 2) + 2 = x + 4$

Dinero de Ana $\rightarrow 2$ € más que Berta $\rightarrow (x + 4) + 2 = x + 6$

Escribimos la condición de que la suma de las cantidades es 48 €.

$$x + (x + 2) + (x + 4) + (x + 6) = 48$$

3.º Resolución de la ecuación.

$$\begin{aligned}x + (x + 2) + (x + 4) + (x + 6) &= 48 \rightarrow 4x + 12 = 48 \rightarrow 4x = 48 - 12 \rightarrow \\ &\rightarrow 4x = 36 \rightarrow x = \frac{36}{4} = 9 \rightarrow \text{Luisa tiene } 9 \text{ €}.\end{aligned}$$

Eva tiene: $9 + 2 = 11$ €. Berta tiene: $9 + 4 = 13$ €. Ana tiene: $9 + 6 = 15$ €.

4.º Comprobación e interpretación del resultado.

Las cantidades que tienen las amigas: 9, 11, 13 y 15 € cumplen las condiciones del enunciado.

$$9 + 11 + 13 + 15 = 48$$

PROBLEMAS CON ECUACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO

Resuelve estos problemas planteando previamente una ecuación. Recuerda que debes indicar cuál es la incógnita y escribir la solución final con una frase.

NOTA PARA LOS DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS:

En un triángulo rectángulo se cumple: $a^2 = b^2 + c^2$ (a es la hipotenusa y b y c son los catetos)

- 1.- El perímetro de un rectángulo es 68 cm. Calcula la base y la altura sabiendo que esta última es 8 unidades menor que la base.
- 2.- Tres hermanos, Pedro, José y Antonio, han heredado 3000 euros. El dinero se lo han repartido de la siguiente forma: Pedro ha recibido el doble que José y Antonio 300 euros más que Pedro. ¿Qué cantidad ha recibido cada uno?
- 3.- He recorrido la mitad de un trayecto en coche, una cuarta parte en moto y en bici 87 kms. ¿Cuánto mide el trayecto?
- 4.- Un joven gasta $\frac{1}{5}$ de su dinero en transporte, $\frac{1}{4}$ en el cine y $\frac{3}{8}$ en un libro. Si aún le quedan 3'5€, ¿cuánto tenía? ¿cuánto se gastó en cada cosa?
- 5.- La base de un rectángulo es 5 cm más larga que la altura, y el área mide 204 cm^2 . ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?
- 6.- Santiago tiene 26 años más que su hijo Jorge, y dentro de 10 años tendrá el doble, ¿qué edad tiene cada uno en la actualidad?
- 7.- Calcula las dimensiones de un rectángulo de 80 cm^2 cuyo largo es 2 cm mayor que el ancho.
- 8.- Los lados de un triángulo miden 5,6 y 7 cm. Determina que cantidad igual se debe restar a cada uno para que resulte un triángulo rectángulo.
- 9.- La diagonal de un rectángulo mide 30cm y las dimensiones de los lados son proporcionales a 3 y 4. Halla los lados.
- 10.- Los lados de un triángulo rectángulo tienen por medida en centímetros tres números naturales consecutivos. Halla dichos números.
- 11.- Disponemos de dos tipos de té: uno de Tailandia, a 5'20€/kg y otro de la India a 6'20€/kg, y queremos obtener 100kg de té a 6€/kg. ¿Cuántos kg hemos de mezclar de cada tipo?
- 12.- Se mezcla azúcar de 1,125 €/kg con azúcar de 1,4 €/kg y se obtienen 200 kg de mezcla a 1,29 €/kg. ¿Cuántos kilos de cada clase se han mezclado?

- 13.- Se quiere mezclar vino de 6€ el litro con otro de 3'5€ el litro, de modo que resulte vino de 5€ el litro. ¿ Cuántos litros de cada clase deben mezclarse para obtener 200 litros de la mezcla?
- 14.- Antonio gastó la tercera parte del dinero de una herencia en un televisor nuevo, tres quintos del resto en reformar la casa, el 10% de la cantidad inicial en ropa y el resto, 260 euros, los ahorró. ¿ Cuánto dinero heredó?
- 15.- En la caja de un supermercado hay 1140€ repartidos en billetes de 5, 10, 20 y 50 euros. Sabiendo que hay el doble de billetes de 5€ que de 10€, de 10€ hay la misma cantidad que de 20€, y de 20€ hay seis billetes más que de 50€, ¿ cuántos billetes de cada clase tiene la caja?
- 16.- Dentro de 11 años la edad de Pedro será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. Calcula la edad de Pedro.
- 17.- Laura ha comprado una falda y una blusa por 66€. Ambas tenían el mismo precio, pero en la falda le han hecho un 20% de rebaja y en la blusa sólo un 15%. ¿ Cuánto costaba cada prenda antes de la rebaja?
- 18.- En una librería, Ana compra un libro con la tercera parte de su dinero y un cómic con las dos terceras partes de lo que le quedaba. Al salir de la librería tenía 12 €. ¿Cuánto dinero tenía Ana?
- 19.- Juan realiza la cuarta parte de un viaje en autobús, la sexta parte en moto, tres octavas partes en bicicleta y los últimos 40km andando. A) ¿ Qué distancia recorrió en total? B) ¿ Qué distancia ha recorrido en cada medio de transporte?
- 20.- a) Un jardinero siega la mitad de un jardín por la mañana. Por la tarde siega la tercera parte de lo que queda, y aún quedan 30 m² sin segar. ¿Cuántos metros cuadrados tiene el jardín?
- 21.- Elvira compra unos zapatos, una camisa y una chaqueta. Si la camisa cuesta la mitad que la chaqueta y ésta la mitad que los zapatos, y ha pagado 126 €, ¿cuánto cuesta cada cosa?
- 22.- Los $\frac{2}{7}$ de la longitud de un poste están bajo tierra, los $\frac{2}{5}$ del resto están sumergidos en agua y la parte que está por encima del agua mide 6 m. Halla la longitud del poste.
- 23.- El producto de dos números enteros consecutivos es igual al cuádruple del menor menos dos unidades. Encuentra dichos números.
- 24.- Un agricultor siembra la mitad de su huerta de pimientos, la tercera parte de tomates, y el resto, que son 200m², de patatas. ¿ Qué superficie tiene la huerta? ¿ Cuántos m² le dedica al cultivo de pimientos? ¿ Y al de tomates?
- 25.- Calcula las dimensiones de un rectángulo de 120 cm² cuyo largo es 7 cm mayor que el ancho.
- 26.- Paula tiene 12 años y su madre 44. ¿Cuántos años tienen que pasar para que la edad de la madre sea el triple de la edad de su hija?
- 27.- La edad de Antonio es de 38 años y la de sus tres hijos es 8, 5 y 1 año respectivamente. ¿Cuántos años pasarán para que la edad del padre sea igual a la suma de las edades de sus tres hijos?
- 28.- Un recipiente está lleno de agua. Si extraemos primero la mitad de su contenido y después la mitad de lo que quedaba, aún quedan en el recipiente 400 litros. Calcular la capacidad del recipiente.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO (MEZCLADAS)

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3x+2-5x=9x+6x-5$

b) $-x+4-3x=-2+x+7x+13$

c) $12x-13x+4-8x=9-4x+6x-2-5x$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3(x-1)+2(x+6)=19$

b) $-(2x+3)+3=4(5x-1)-6$

c) $5-2(4x-1)=3-(4x+2)-5(4-3x)$

d) $3(2x-4)-7(x-8)=2+3(-x+4)-(2-x)$

e) $-2(-x+5)+6(3x+1)=-3(2x-5)-4(1+4x)-8$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{5x}{3}=15$ b) $\frac{-7x}{12}=49$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x+3}{2}-\frac{3x-1}{4}=1$

b) $\frac{2x-5}{3}-\frac{5x-1}{6}=\frac{3x-6}{8}$

c) $-\frac{-x+2}{7}+\frac{3x+2}{3}=\frac{-x+6}{14}+5$

d) $-\frac{5-2x}{10}-\frac{x+5}{4}=\frac{x-16}{6}-\frac{7+2x}{12}$

e) $-7+\frac{1-x}{2}+\frac{x-5}{6}=\frac{-3x-5}{14}+\frac{2-3x}{35}$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $3x^2+36x-39=0$; Sol: 1 y -13

b) $4x^2+52x-120=0$; Sol: 2 y -15

c) $2x^2-30x+100=0$; Sol: 5 y 10

d) $2x^2-34x+132=0$; Sol: 6 y 11

e) $2x^2-32x+128=0$; Sol: 8

f) $3x^2-36x+108=0$; Sol: 6

g) $x^2-9x+8=0$; Sol: 1 y 8

h) $-x^2-5x+6=0$; Sol: -6 y 1

i) $x^2+2x+2=0$; Sol: No tiene

j) $3x^2+x+2=0$; Sol: No tiene

EJERCICIO 6. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $x+8=2 \cdot (x-5)$

b) $x+6=3x+5 \cdot (x-2)-3$

c) $-2 \cdot (-3-x)-5 \cdot (x-5)=4x-7x+8$

d) $-2x+8 \cdot (x-1)-4x=3 \cdot (2x-2)$

EJERCICIO 7. Hallar la solución de las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{3x-6}{12}=\frac{2x-1}{3}+\frac{x-4}{8}$

b) $\frac{5x-11}{2}=8x-\frac{3x+4}{3}$

c) $\frac{7-2x}{3}+\frac{2x+3}{2}=\frac{2x}{6}-\frac{3-3x}{4}$

d) $\frac{3x-2}{3}-2=\frac{x-5}{4}+\frac{x-3}{9}$

8.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2 \cdot (2x + 4) - 3 \cdot (4x - 2) = 7 - 2(-5x + 4)$

b) $2 \cdot \left(\frac{3x+5}{2} - \frac{x-3}{3} \right) - 4x = 3x + \frac{5}{6}$

c) $\frac{71}{2} - 3x = \frac{5x+2}{9} - \frac{2x+1}{6}$

d) $(x+6)^2 - (x-6)^2 - (x-5)(x+5) = (3-x)(3+x)$

e) $64x^2 - 81 = 0$

f) $\frac{x^2+2}{5} - \frac{x^2+x}{2} = \frac{3x+1}{10}$

g) $21x^2 - 7x = 0$

h) $x-1+(2x-1)(x-3)=x(3x-3)-2x$

i) $\frac{x \cdot (x-3)}{2} + \frac{x \cdot (x-2)}{4} = \frac{(3x-2)^2}{8} - 1$

j) $(x+2)^2 - (x-3)^2 = 5$

k) $\frac{x}{6} - \frac{4 \cdot (x-1)}{2} - \frac{5 \cdot (x-2)}{2} = \frac{x}{3}$

l) $\frac{11}{6} - \frac{(x-2)^2}{3} = \frac{14x-5}{6}$

m) $1 - \frac{(2x+5)(3x-1)}{3} = \frac{x^2+5}{2} - \frac{7(x-1)}{6}$

n) $\frac{2x-1}{5} - \frac{x-3}{12} = 2 - \frac{x-2}{4}$

o) $(3x-2)^2 - 6(x-1)(x+1) - 2(x+3) = 3(x^2+2)$

p) $2(3x+1)^2 - 3(2x-1)^2 - 6(x-1)(x+1) = 0$

q) $3(x-2)^2 - 6(x-1)(x+1) - 2(x+3) = 3(x+2)$ (Dato: $\sqrt{361}=19$)