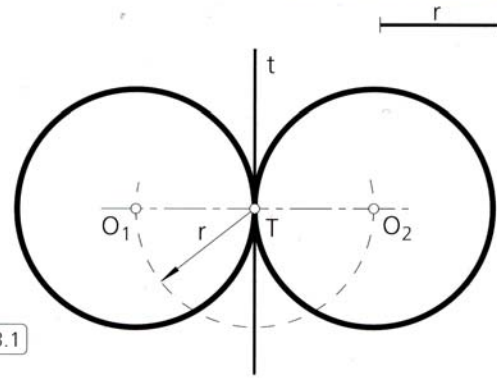


### 3 TRAZADO DE CIRCUNFERENCIAS TANGENTES DE RADIO DADO

#### 3.1 Por un punto $T$ de una recta $t$ .

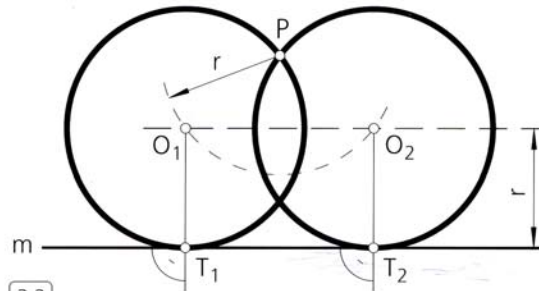
Se traza la perpendicular a la recta  $t$  por el punto  $T$  y se lleva el radio  $r$  en los dos sentidos, obteniendo así los puntos  $O_1$  y  $O_2$ , centros de las dos posibles soluciones.



3.1

#### 3.2 A una recta $m$ y que pasen por un punto $P$ exterior.

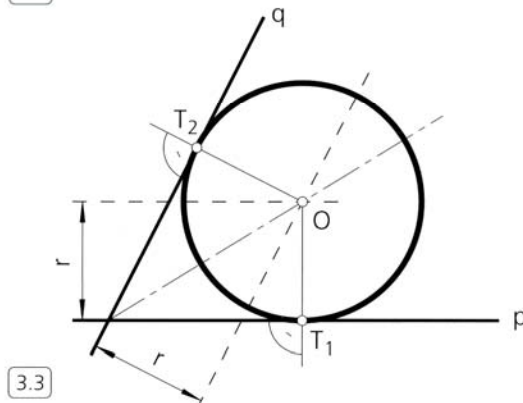
- Existen dos soluciones. Los centros de ambas han de equidistar de la recta  $m$  y del punto  $P$ .
- Por ello, se traza la paralela a  $m$  distante el radio  $r$ , y con centro en  $P$ , un arco de radio  $r$ ; los puntos de intersección de ambas ( $O_1$  y  $O_2$ ) son los centros de las soluciones, cuyos puntos de tangencia ( $T_1$ ,  $T_2$ ) con la recta se determinan trazando las perpendiculares a la recta  $m$ .



3.2

#### 3.3 A dos rectas $p$ y $q$ que se cortan.

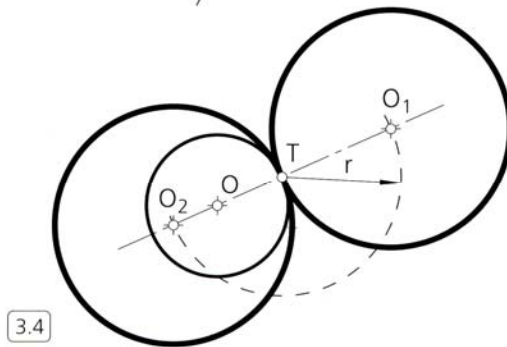
- Se trazan rectas paralelas a las dadas a una distancia igual al radio  $r$ , cortándose en  $O$ , centro de la solución que muestra la figura, que, lógicamente, pertenece a la bisectriz del ángulo.
- Son posibles cuatro soluciones: una en cada región de plano determinado por las rectas al cortarse.



3.3

#### 3.4 Por un punto $T$ de una circunferencia de centro $O$ .

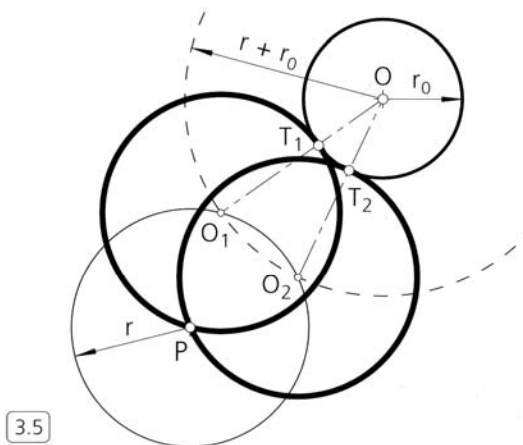
- Dada la circunferencia de centro  $O$  y un punto  $T$  de ella, es posible dibujar dos circunferencias de un radio  $r$  conocido, tangentes a la dada en  $T$ .
- Sobre la recta  $OT$  y a partir del punto  $T$  se toma la magnitud  $r$  en los dos sentidos:  $TO_1 = TO_2$ .



3.4

#### 3.5 A una circunferencia de centro $O$ y que pasen por un punto exterior $P$ .

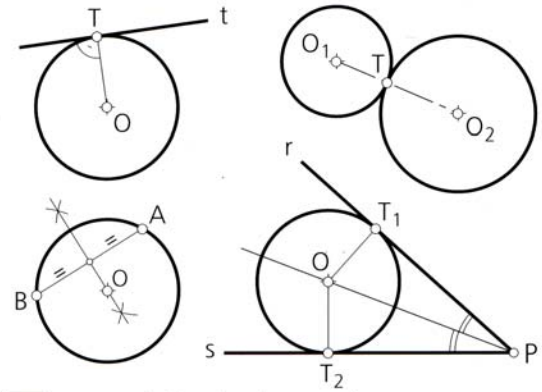
- Con centro en  $O$  (centro de la circunferencia dada de radio  $r_0$ ) se traza la circunferencia de radio  $r + r_0$ , y haciendo centro en  $P$  otro arco de circunferencia de radio  $r$ . La intersección de ambas circunferencias determina los centros  $O_1$ ,  $O_2$  de las soluciones.
- Según sean los datos, el problema puede tener cuatro soluciones. Las otras dos -cuando sea posible- se obtienen trazando el arco de circunferencia de radio diferencia:  $r - r_0$ .



3.5

## 1 PROPIEDADES FUNDAMENTALES

- «Si una recta es tangente a una circunferencia, el radio en el punto de tangencia es perpendicular a la recta».
- «Si dos circunferencias son tangentes, el punto de contacto se encuentra en la recta que une los centros».
- «El centro de cualquier circunferencia que pase por dos puntos está en la mediatriz del segmento que los une».
- «El centro de cualquier circunferencia tangente a dos rectas se encuentra en la bisectriz del ángulo que forman».



1 Propiedades fundamentales

## 2 RECTAS TANGENTES A LA CIRCUNFERENCIA

### 2.1 Por un punto $T$ de la circunferencia.

- La recta tangente en un punto  $T$  de la circunferencia es la recta perpendicular al radio  $OT$ .
- Por cada punto de la circunferencia se puede trazar una tangente y sólo una.

### 2.2 Paralelas a una dirección $d$ .

Las rectas paralelas a ella, y tangentes a la circunferencia de centro  $O$ , son aquéllas que pasan por los puntos  $P$  y  $Q$ , obtenidos al trazar por  $O$  el diámetro perpendicular a la dirección dada.

### 2.3 Desde un punto $P$ exterior a la circunferencia.

- Los puntos de contacto ( $T_1, T_2$ ) de las tangentes con la circunferencia han de ser vértices de un ángulo recto, cuyos lados (radio y tangente) pasen respectivamente por el centro de la circunferencia y por  $P$ .
- El lugar geométrico de estos vértices es la circunferencia de diámetro  $OP$  (arco capaz de  $90^\circ$ ).
- Por tanto, se traza la circunferencia de centro el punto medio ( $M$ ) de  $OP$  que corta a la dada en los puntos  $T_1$  y  $T_2$ . Éstos, unidos con el punto exterior  $P$ , definen las dos rectas tangentes ( $t_1, t_2$ ) que son simétricas respecto a  $OP$ .

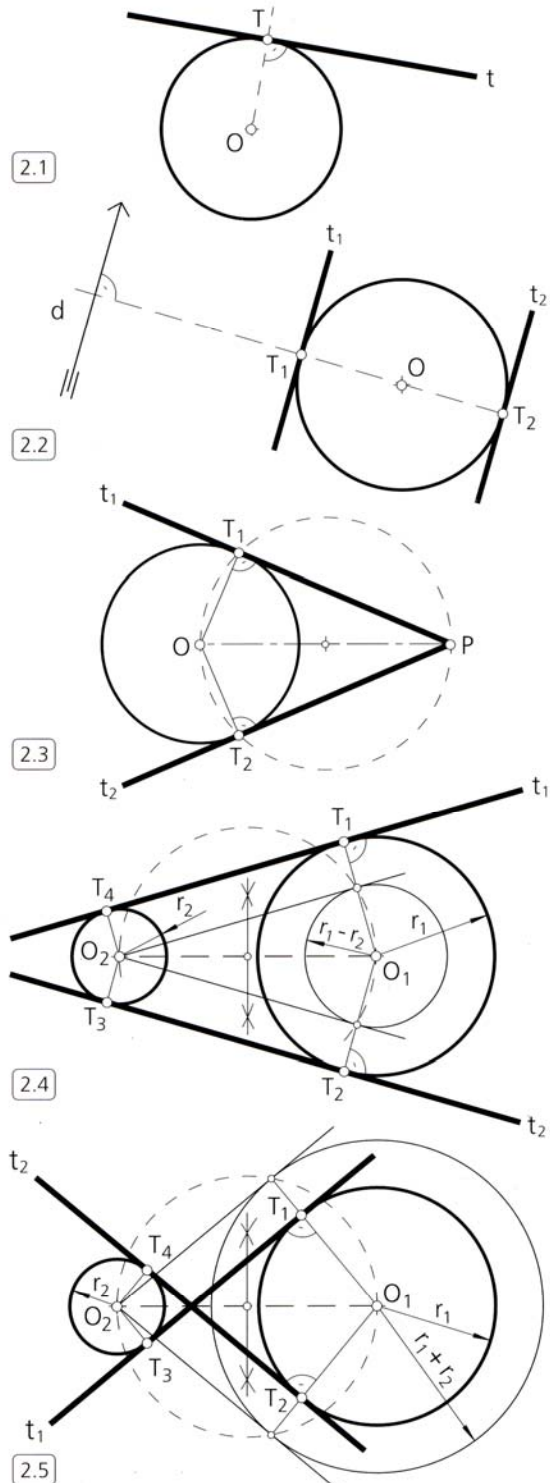
### 2.4 Rectas tangentes exteriores a dos circunferencias.

- Son las rectas que dejan a las dos circunferencias en un mismo semiplano.
- Suponiendo  $r_1 > r_2$ , y la distancia entre centros mayor que  $r_1 - r_2$ , las tangentes son paralelas a las tangentes trazadas desde  $O_2$  a la circunferencia auxiliar de centro  $O_1$  y radio  $r_1 - r_2$ .

### 2.5 Rectas tangentes interiores a dos circunferencias.

Las rectas tangentes resultan ser paralelas a las trazadas desde  $O_2$  a la circunferencia auxiliar de centro  $O_1$  y radio  $r_1 + r_2$ .

## RECTAS TANGENTES



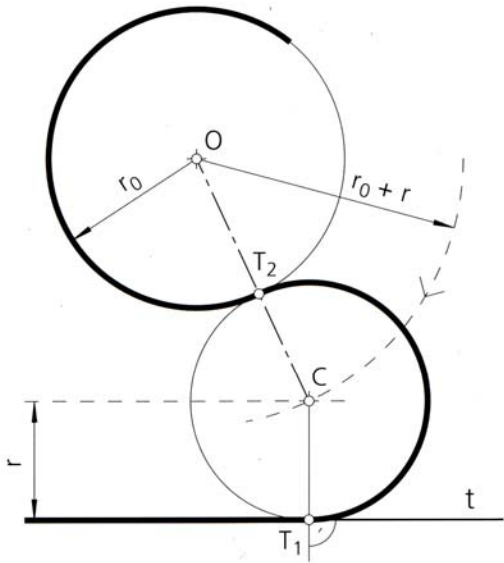
**5.3 Enlazar varios puntos  $A, B, C, D, \dots$  no alineados, mediante arcos de circunferencia, conociendo el radio  $r$  de uno de los arcos.**

Se trata de ir uniendo los puntos de una poligonal ( $A-B-C-D, \dots$ ), con arcos de circunferencia tangentes entre sí.

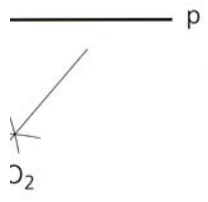
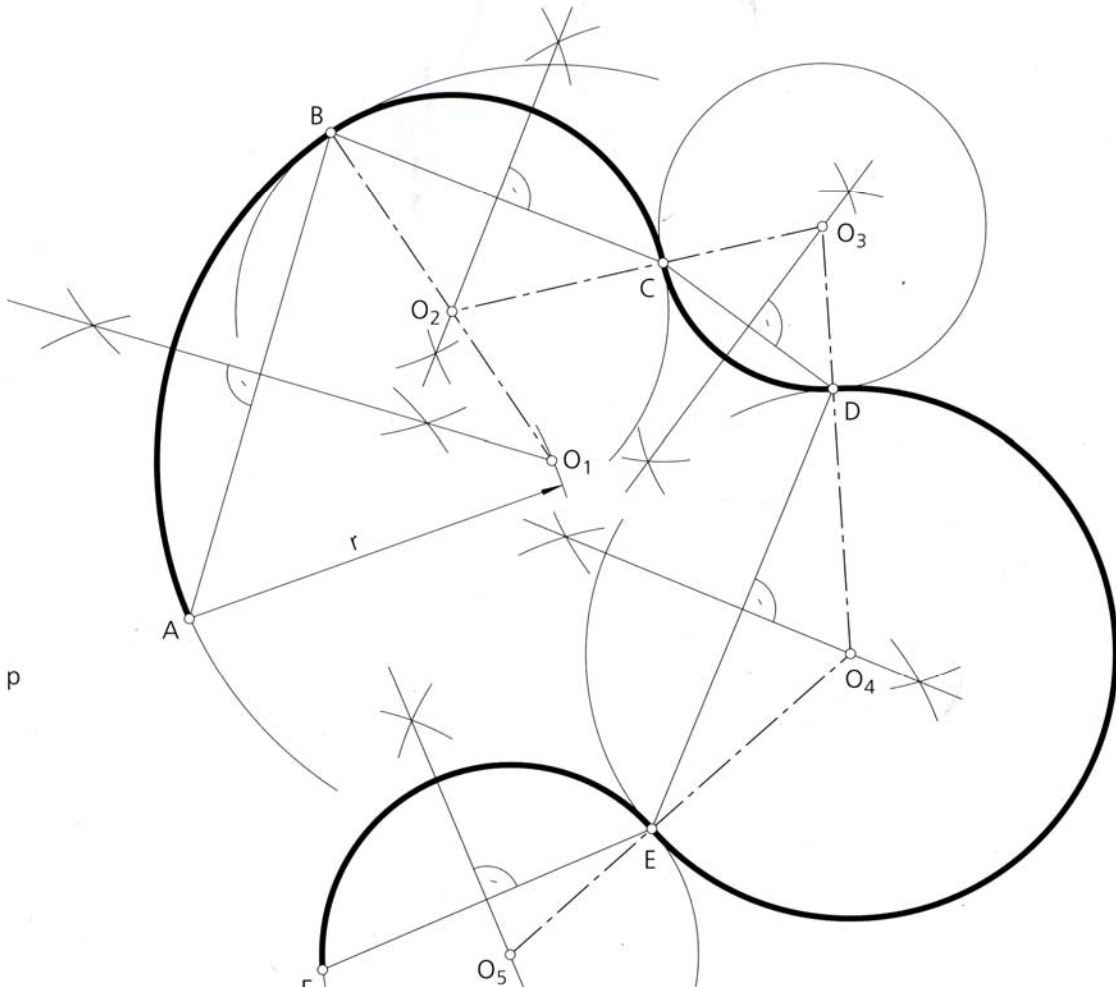
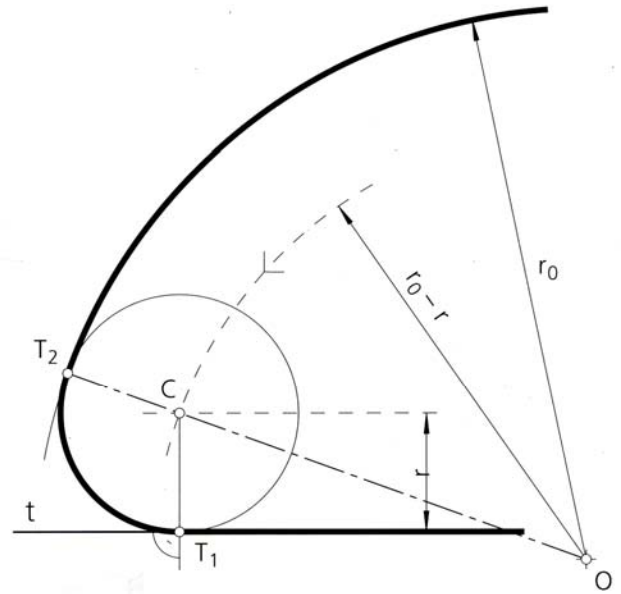
Para ello se ha de tener en cuenta que los centros de las circunferencias están en la mediatriz de cada segmento, y también que, para que la curva sea tangente a la anterior, ha de estar en la recta que une los centros de ambas. El punto de intersección de las rectas –mediatriz y línea de centros– determina el centro del arco de circunferencia que pasa por los dos puntos considerados.

El procedimiento de construcción es como sigue:

- Se comienza trazando la mediatriz del segmento  $\overline{AB}$  y, con centro en  $A$  y radio  $r$  (dado), se traza un arco que corta a la mediatriz en el punto  $O_1$ , centro del arco que pasa por dichos puntos.
- Se unen los puntos  $B$  y  $C$ , trazando la mediatriz del segmento que corta a la recta  $O_1B$  en el punto  $O_2$ . Con este centro se traza el arco  $BC$ , que es tangente al anterior en  $B$ .
- Se unen los puntos  $C$  y  $D$  trazando la mediatriz del segmento, que corta a la recta  $O_2C$  en el punto  $O_3$ . Con centro en  $O_3$  se traza el arco  $CD$ , tangente al anterior en  $C$  y así sucesivamente.



5.2

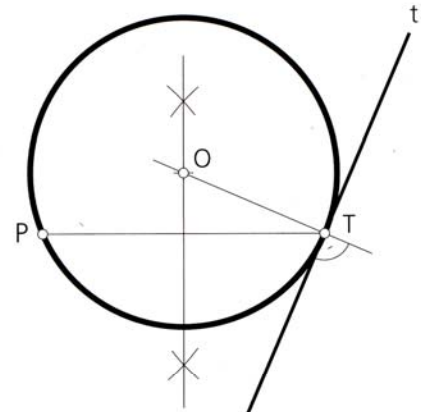


## 4 TRAZADO DE CIRCUNFERENCIAS TANGENTES DE RADIO DESCONOCIDO

## CIRCUNFERENCIAS TANGENTES DE RADIO DESCONOCIDO

### 4.1 Circunferencia que pasa por un punto $P$ y es tangente a una recta $t$ en un punto $T$ de ella.

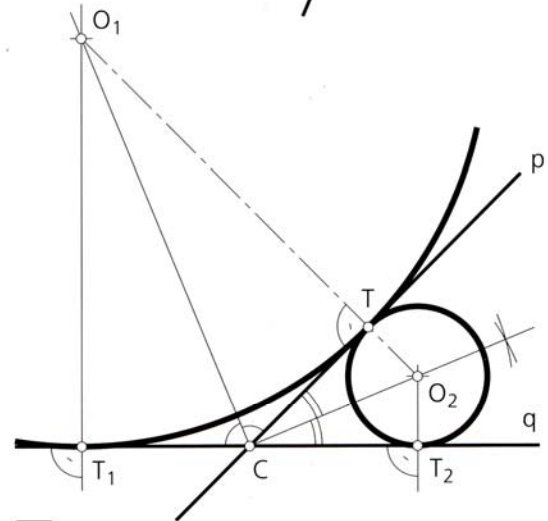
El centro  $O$  de la circunferencia solución, estará en la perpendicular a la recta  $t$  por el punto  $T$  y en la mediatriz del segmento  $PT$ .



4.1

### 4.2 Circunferencias tangentes a dos rectas $p$ y $q$ conociendo el punto $T$ de tangencia en una de ellas.

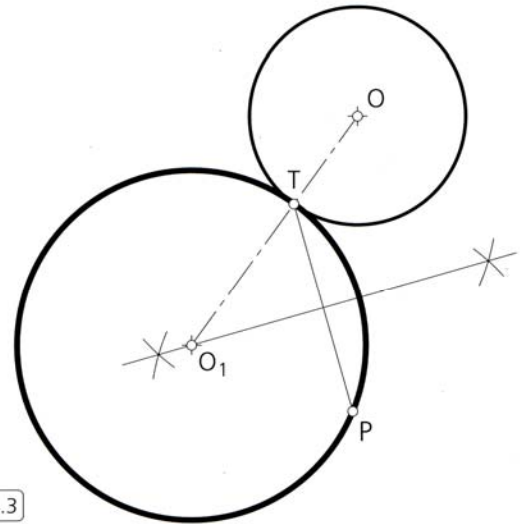
- El problema tiene dos soluciones. Los centros de ambas circunferencias ( $O_1$  y  $O_2$ ) serán los puntos comunes a la perpendicular trazada por  $T$  a la recta  $p$ , y a las bisectrices de los ángulos que forman las rectas  $p$  y  $q$ .
- Como siempre, los puntos de tangencia ( $T_1$  y  $T_2$ ) de cada solución con la recta  $q$ , se determinan trazando las perpendiculares por los centros ( $O_1$  y  $O_2$ ) de ambas soluciones.



4.2

### 4.3 Circunferencia que pasa por un punto $P$ y es tangente a una circunferencia $O$ en un punto $T$ de la misma.

El problema queda resuelto al determinar la intersección de la recta  $OT$  (unión del centro de la circunferencia con el punto de tangencia dado) con la mediatriz  $TP$ , lo que determina el punto  $O_1$ , centro de la circunferencia solución.



4.3

## 5 ENLACES

Se llama enlace o empalme, en los trazados geométricos, a la unión de rectas con curvas o de curvas entre sí, efectuadas por medio de su punto de tangencia. Este punto común es el que permite la transición suave de unas a otras sin brusquedades de ningún tipo.

### 5.1 Enlazar dos rectas paralelas $p$ y $q$ mediante dos arcos de igual radio, conociendo los puntos de tangencia $P$ y $Q$ sobre ellas.

- Al ser los arcos iguales, el enlace se producirá en el punto medio  $M$  del segmento  $PQ$ .
- Los centros de los arcos se encontrarán en la intersección de las perpendiculares a las rectas  $p$  y  $q$  por los puntos de tangencia  $P$  y  $Q$ , con las mediatrices de los segmentos  $PM$  y  $MQ$  respectivamente.

### 5.2 Enlazar una recta y un arco de circunferencia de centro $O$ y radio $r_0$ por medio de un arco de circunferencia de radio $r$ .

- Pueden darse dos casos: que la circunferencia solución sea tangente exterior o que sea interior a la circunferencia dada.
- En ambos casos se trazan la paralela a  $t$ , a la

