0 Método de Gauss

Programa:

Sistemas de ecuacións

Como sabes, unha ecuación é unha igualdade na que algunhas cantidades descoñecidas son sustituidas por incógnitas.

Hai varios tipos de ecuacións dependendo de cales sexan as operacións que lles afectan ás incógnitas: De primeiro grao, de segundo grao, irracionais, etc.

Cando as *incógnita*s só están multiplicadas por números e logo sumados eses productos, as ecuacións chámanse **liniais**, $(2x+5y=4)$.

Un conxunto de ecuacións lineais relativas a unha mesma situación forma un **sistema de ecuacións lineais**:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2m}x_{2m} = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nm}x_m = b_n \end{array}\right\}$$

Exemplo:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y=4 \\ -x+5y=-1 \end{array}\right\}$$

Exemplo:

$$\left.\begin{array}{r} 3x+2y-z+2w=1 \\ 5x+y+3z-4w=-3 \\ -y+2z-w=0 \end{array}\right\}$$

Ecuac. equivalentes

Definición: O conxunto formado por tódolos valores das incógnitas que verifiquen as ecuacións chamarémoslle **conxunto de solucións**.

Definición: Diremos que dúas ecuacións son **equivalentes** cando teñen o mesmo conxunto de solucións.

Cando resolvemos unha ecuación ou un sistema, imos transformando as ecuacións noutras equivalentes, pero máis simples, ata finalmente termos despexadas as incógnitas.

Hai moitas transformacións que se poden efectuar nunha ecuación ou nun sistema, sen cambia-lo seu conxunto de solucións:

Nunha ecuación:

- Multiplicar ou dividir toda a ecuación por un número.
- Sumar un número ós dous membros da ecuación.

En xeral, tódalas transformacións que afecten por igual ós dous membros da ecuación son transformacións permitidas.

Nun sistema:

- Substituír unha das ecuacións pola suma desa ecuación e outras ecuacións multiplicadas por números.
- Substituír unha variable por unha expresión equivalente.

Exemplo:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y=4 \\ -x-y=-1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1^a+2^a \rightarrow x=3 \\ \text{Substituindo} \rightarrow y=-2 \end{array}$$

O conxunto de solucións dese sistema está formado só polo elemento (3,-2):

$$S=\{(3,-2)\}$$

Exemplo:

$$\left.\begin{array}{r} y=2x \\ x^2-y=0 \end{array}\right\} \quad x^2-2x=0$$

$$x(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \Rightarrow y_1=0 \\ x_2=2 \Rightarrow y_2=4 \end{cases}$$

O conxunto de solucións é:

$$S=\{(0,0),(2,4)\}$$

- Despexar unha variable en varias ecuacións e iguala-las expresións que se obteñen.

Resolucion de sistemas 2x2

Un dos métodos máis empregados para a resolución de sistemas é o de reducción:

$$\left.\begin{array}{r}2x+5y=4\\3x+6y=2\end{array}\right\}\begin{array}{c}\xrightarrow{1^a\cdot 3}\\\xrightarrow{2^a\cdot(-2)}\end{array}\left.\begin{array}{r}6x+15y=12\\-6x-12y=-4\end{array}\right\}\xrightarrow{1^a+2^a}\left.\begin{array}{r}6x+15y=12\\3y=8\end{array}\right\}$$

$$3y=8\rightarrow y=\frac{8}{3}$$

$$6x+15\cdot\frac{8}{3}=12\rightarrow x=-\frac{14}{3}$$

Se te fixas, o papel do *x* e do *y* ó resolve-lo sistema é case decorativo. Podemos formulalo todo sen escribilas, soamente tendo en conta o papel que xogan os distintos coeficientes:

$$\left(\begin{array}{cc|c}2&5&4\\3&6&2\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}6&15&12\\-6&-12&-4\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}6&15&12\\0&3&8\end{array}\right)$$

$$3y=8\rightarrow y=\frac{8}{3}$$

$$6x+15\cdot\frac{8}{3}=12\rightarrow x=-\frac{14}{3}$$

Este xeito de resolver un sistema de ecuacións lineais, xeralizado para calquera número de ecuacións e incógnitas, coñécese co nome de: **Método de Gauss**. Consiste, como podes ver, en aplica-lo método de reducción e simplifica-la escritura evitando escribi-las incógnitas.

Os sistemas lineais non sempre teñen solución única.

Exemplo:

$$\left.\begin{array}{r}2x+y=4\\-4x-2y=-8\end{array}\right\}\xrightarrow{2^a+1^a\cdot 2}\left.\begin{array}{r}2x+y=4\\0=0\end{array}\right\}$$

0=0 é unha identidade que non proporciona información sobre o valor das incógnitas.

Obtemos esa identidade porque a 2ª ecuación é equivalente a 1ª:

2ª=1ª·(-2).

Só podemos despexar unha das incognitas en función da outra:

$$y=4-2x$$

O conxunto de solucións do sistema está formado polos pares da forma (a,4-2a):

$$S=\{(0,4),(1,2),(2,0),(-1,6),\ldots\}=\{(a,b)\mid b=4-2a\}$$

Exemplo:

$$\left.\begin{array}{r}x+2y=4\\x+2y=2\end{array}\right\}\xrightarrow{2^a-1^a}\left.\begin{array}{r}x+2y=4\\0=-2\end{array}\right\}$$

Obtemos unha igualdade falsa, 0=-2. Débese a que as dúas ecuacións son incompatibles, calquera que sexan os valores de *x* e *y*, x+2y non pode ser igual a 4 e a 2 o mesmo tempo:

O sistema non ten solución, o conxunto de solucións é: $S=\emptyset$

Método de Gauss

Vexamos como funciona cun sistema de 3x3 (3 ecuacións e 3 incógnitas):

$$\left.\begin{array}{r}2x-3y+z=12\\x+5y+2z=-1\\5x+y-2z=-5\end{array}\right\}$$

1.- Escribir o sistema sen as *incógnitas*. É preferible que, de ser posible, o elemento 1,1 (1ª fila, 1ª columna) sexa 1 ou -1. Para conseguilo, cambiámo-la orde das ecuacións ou das incógnitas:

$$\left.\begin{array}{r}2x-3y+z=12\\x+5y+2z=-1\\5x+y-2z=-5\end{array}\right\}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&5&2&-1\\2&-3&1&12\\5&1&-2&-5\end{array}\right)$$

Exemplo:

Os elementos 1, -3 e -2 forman a diagonal da matriz dos coeficientes do sistema anterior:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{1}&5&2\\2&\mathbf{-3}&1\\5&1&\mathbf{-2}\end{pmatrix}$$

Fíxate que cada fila corresponde a unha ecuación e cada columna os coeficientes dunha das incógnitas.

Chamaremoslle **matriz** a un conxunto de números colocados por filas e columnas como o anterior.

Os elementos que teñen os índices iguais (1ª fila 1ª columna, 2ª fila 2ª columna, ...) forman a **diagonal** principal da matriz.

O obxectivo do Método de Gauss é ir transformando a matriz dos coeficientes do sistema ata que tódolos elementos situados por debaixo da diagonal sexan 0.

2.- Facemos 0 os elementos por debaixo do 1,1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 12 \\ 5 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right) \to \begin{array}{r} \\ 2^a - 1^a \cdot 2 \to \\ 3^a - 1^a \cdot 5 \to \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & -13 & -3 & 14 \\ 0 & -24 & -12 & 0 \end{array}\right)$$

Podemos simplifica-la terceira fila (ecuación):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & -13 & -3 & 14 \\ 0 & -24 & -12 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{r} \\ \\ 3^a : 12 \to \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & -13 & -3 & 14 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

3.- Facemos 0 ós situados por debaixo do elemento 2,2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & -13 & -3 & 14 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{r} \\ \\ 3^a \cdot 13 - 2^a \cdot 2 \to \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & -13 & -3 & 14 \\ 0 & 0 & -7 & -28 \end{array}\right)$$

4.- Continúase ata que tódolos elementos por debaixo da diagonal sexan 0. Neste caso xa rematamos.

5.- Na última ecuación só nos queda unha incógnita co coeficiente non nulo.

Agora xa podemos escribi-lo sistema do xeito habitual e resolvelo:

$$\left.\begin{array}{r} x + 5y + 2z = -1 \\ -13y - 3z = 14 \\ -7z = -28 \end{array}\right\} \to \begin{array}{l} z = \dfrac{-28}{-7} = 4 \\ -13y - 12 = 14 \Rightarrow y = \dfrac{26}{-13} = -2 \\ x - 10 + 8 = -1 \Rightarrow x = 1 \end{array}$$

No caso anterior, a matriz dos coeficienntes quedou triangular (3 columnas e 3 filas non nulas) pero eso non ter por que ser así:

- Se aparece algunha fila na que tódolos elementos sexan 0 agás o termo independente, o sistema é imcompatible.
- Se quedan menos filas non nulas que incógnitas, o sistema é indeterminado. Para resolvelo, deixamos tantas incógnitas como filas non nulas e transformamos as demais en parámetros:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \text{Sistema indeterminado}$$

$$\left.\begin{aligned}x-y+3z+2t&=5\\2z-4t&=-2\end{aligned}\right\}\xrightarrow[t=\beta]{y=\alpha}\left.\begin{aligned}x+3z&=5+\alpha-2\beta\\2z&=-2-4\beta\\y&=\alpha\\t&=\beta\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}x&=8+\alpha+4\beta\\z&=-1-2\beta\\y&=\alpha\\t&=\beta\end{aligned}\right\}$$

As solucións obtéñense dandolle valores os parámetros α e β

Clases de sistemas lineais

Atendendo ó número de solucións, un sistema de ecuacións lineais pode ser:

- **Compatible determinado:** O sistema ten unha única solución (ó aplicar Gauss a matriz queda triangular, tódolos elementos situados debaixo da diagonal son 0).
- **Compatible indeterminado:** O sistema ten moitas solucións (a matriz queda triangular pero con menos filas non nulas ca incógnitas).
- **Incompatible:** O sistema non ten solución (os elementos dunha fila da matriz son 0 agás o termo independente).

Exemplo:

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & -3 & 5\\0 & 2 & -1\\0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Exemplo:

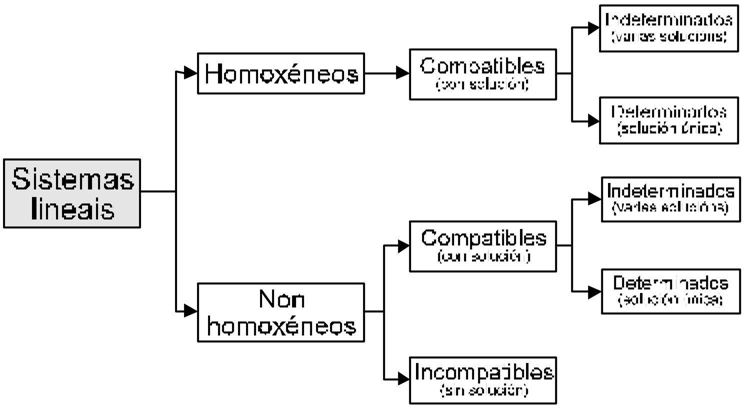
$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 8 & -2 & 5\\0 & 4 & -1 & 9\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Exemplo:

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & -3 & 5\\0 & 0 & 7\end{array}\right)$$

Un tipo especial de sistemas lineais, que chamaremos **sistemas homoxéneos** , é o que ten tódolos termos independentes 0.

Estes sistemas sempre teñen, polo menos, a solución na que as incógnitas valen 0 (solución trivial). Polo tanto, sempre son compatibles.



Problemas resoltos

O Método de Gauss é conceptualmente moi simple pero, para aplicalo, necesítase facer "mentalmente" moitas operación o que con moita frecuencia leva a erros. Máis adiante veremos outro método para a resolución de sistemas, a Regra de Cramer que, a pesares de necesitar un número equivalente de operacións ó Método de Gauss, a experiencia demostra que non da lugar a tantos erros con sistemas pequenos, 3x3 ou menores.

1 Resolve o seguinte sistema de ecuacións:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-z=-4 \\ -2x+y+3z=6 \\ 4x+5y+2z=5 \end{array}\right\}$$

Solución: Utilizarémo-lo método de Gauss.

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-z=-4 \\ -2x+y+3z=6 \\ 4x+5y+2z=5 \end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 5 \end{array}\right) \to \begin{array}{r} \\ 2^a+1^a\cdot 2 \\ 3^a-1^a\cdot 4 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 6 & 21 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ 3^a\cdot 5+2^a\cdot 3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 33 & 99 \end{array}\right) \to \begin{cases} z=\dfrac{99}{33}=3 \\ 5y+3=-2 \Rightarrow y=\dfrac{-5}{5}=-1 \\ x-2-3=-4 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

2 Resolve o seguinte sistema de ecuacións:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-y+3z=-6 \\ 3x+2y+4z=-4 \\ -x+4y-2z=8 \end{array}\right\}$$

Solución: Utilizarémo-lo método de Gauss. Poñémo-la 3ªecuación en primeiro lugar por ter coeficiente de *x* igual a -1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -2 & 8 \\ 2 & -1 & 3 & -6 \\ 3 & 2 & 4 & -4 \end{array}\right) \to \begin{array}{r} \\ 2^a+1^a\cdot 2 \\ 3^a+1^a\cdot 3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -2 & 8 \\ 0 & 7 & -1 & 10 \\ 0 & 14 & -2 & 20 \end{array}\right) \to \begin{array}{r} \\ \\ 3^a-2^a\cdot 2 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -2 & 8 \\ 0 & 7 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Obtemos unha fila de ceros, o que significa que esa ecuación era unha combinación das outras. Quedan dúas ecuacións e tres incógnitas, o sistema é indeterminado.

Só podemos despexar 2 *incógnitas* (tantas como ecuacións quedan) en función da outra, polo que convertemos a *z* nun parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -2 & 8 \\ 0 & 7 & -1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{z=t} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 8+2t \\ 0 & 7 & 10+t \end{array}\right) \to \begin{cases} 7y=10+t \Rightarrow y=\dfrac{10+t}{7} \\ -x+\dfrac{40+4t}{7}=8+2t \Rightarrow x=\dfrac{-16-10t}{7} \end{cases}$$

3 Resolve o seguinte sistema de ecuacións:

$$\left.\begin{array}{r} x+7y-z=-4 \\ 5x+y+3z=1 \\ 4x-6y+4z=2 \end{array}\right\}$$

Solución: Utilizaremo-lo método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -1 & -4 \\ 5 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & -6 & 4 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{r} \\ 2^a-1^a\cdot 5 \\ 3^a-1^a\cdot 4 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -1 & -4 \\ 0 & -34 & 8 & 21 \\ 0 & -34 & 8 & 18 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ 3^a-2^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -1 & -4 \\ 0 & -34 & 8 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Obtivemos unha fila de 0 agás o termo independente. O sistema é incompatible, non ten solución.

4 Resolve o seguinte sistema de ecuacións:

$$\left.\begin{array}{r} -2x+7y=3 \\ 5x+y=11 \\ 3x-3y=3 \end{array}\right\}$$

Solución: O método de Gauss pódese aplicar a calquera sistema, teña ou non tantas ecuacións coma incógnitas.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 7 & 3 \\ 5 & 1 & 11 \\ 3 & -3 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{r} \\ 2^a\cdot 2+1^a\cdot 5 \\ 3^a\cdot 2+1^a\cdot 3 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 7 & 3 \\ 0 & 37 & 37 \\ 0 & 15 & 15 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{r} \\ 2^a/37 \\ 3^a/15 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{r} \\ \\ 3^a-2^a \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Obtivemos unha fila de ceros pero quedan dúas ecuacións para dúas incógnitas polo que o sistema será determinado (solución única).

$$\begin{array}{l} y=1 \\ -2x+7=3 \Rightarrow x=\dfrac{3-7}{-2}=2 \end{array}$$

5 Estudia a compatibilidade do seguinte sistema de ecuacións segundo os valores do parámetro k:

$$\left.\begin{array}{r} -x+2y-4z=2 \\ 2x+ky-z=-1 \\ kx+8y+(k-3)z=-4 \end{array}\right\}$$

Solución: Temos que clasifica-lo sistema (compatible, incompatible, determinado ou indeterminado) en función dos valores de k.

Este tipo de problemas, como veremos no tema 3, resólvense de xeito máis doado por outros métodos.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -4 & 2 \\ 2 & k & -1 & -1 \\ k & 8 & k-3 & -4 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{r} \\ 2^a+1^a\cdot 2 \\ 3^a+1^a\cdot k \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & k+4 & -9 & 3 \\ 0 & 2k+8 & -3k-3 & 2k-4 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ 3^a-2^a\cdot 2 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & k+4 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & -3k+15 & 2k-10 \end{array}\right)$$

Estudiamos para que valores de k os elementos da diagonal da matriz son nulos:

$$\left.\begin{array}{l} k+4=0 \Leftrightarrow k=-4 \\ -3k+15=0 \Leftrightarrow k=\dfrac{-15}{-3}=5 \end{array}\right\}$$

Temos as seguintes posibilidades:

Caso I (os elementos da diagonal da matriz son distintos de 0): $k \neq -4$ e $k \neq 5$, o sistema é *compatible determinado*.

Caso II ($k = -4$): Sustituimos e vemos que pasa coa matriz.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 27 & -18 \end{array}\right) \to \underset{3^a+2^a\cdot 3}{} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{array}\right)$$ O sistema é *incompatible*.

Caso III ($k = 5$):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 9 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ O sistema é *compatible indeterminado*.

Problemas propostos

1 Resolve os seguintes sistemas de ecuacións:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+3z=1 \\ -5x-2y+4z=-7 \\ 2x+y-z=12 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 3x-y-z=7 \\ -2x+3y+z=4 \\ 5x-2y+2z=3 \end{array}\right\}$$

2 Resolve os seguintes sistemas de ecuacións:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+3z=-1 \\ 4x+y+5z=0 \\ x-2y-4z=3 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 3x-y-z=7 \\ -2x+3y+z=4 \\ 2x+4y=4 \end{array}\right\}$$

3 Resolve os seguintes sistemas de ecuacións:

$$\left.\begin{array}{r} x-y-z+w=0 \\ 2x+y+3z-w=9 \\ 5x-2y+z-w=0 \\ x+y+z+w=10 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x-y-z=-4 \\ 2x+y+3z=13 \\ 5x-2y+z=4 \\ x+y+z=6 \end{array}\right\}$$

4 Resolve os seguintes sistemas de ecuacións:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-3y-2z=3 \\ 3x+y-z=-4 \\ -5x+4y+3z=-5 \\ 7x+2y+z=5 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 2x-3y-3z=3 \\ 3x+y-z=-4 \\ -x+7y+3z=-10 \end{array}\right\}$$

Comproba se a solución do primeiro sistema tamén o é do segundo. ¿A que crees que se debe?