Sistemas de ecuacións lineais

Por F. Rodríguez Mayo

Sistemas lineais

- Vimos que os métodos de redución, substitución e igualación como permiten resolver sistemas de 2 ecuacións con 2 incógnitas.
- Pero, ¿qué pasa cos sistemas maiores?
- Resolve o sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y - z = 5 \\ -x + y + 3z = 10 \\ 5x - 2y + z = 4 \end{array}\right\}$$

Sistemas lineais

Podemos, por exemplo, aplicar varias veces o método de redución elexindo pares de ecuacións do sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x+3y-z&=5\\ -x+y+3z&=10\\ 5x-2y+z&=4 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x+3y-z&=5\\ -x+y+3z&=10 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{2ª por 2}]{\text{Elimino x:}} \left.\begin{aligned} 2x+3y-z&=5\\ -2x+2y+6z&=20 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{sumando}} 5y+5z=25$$

$$\left.\begin{aligned} -x+y+3z&=10\\ 5x-2y+z&=4 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{1ª por 5}]{\text{Elimino x:}} \left.\begin{aligned} -5x+5y+15z&=50\\ 5x-2y+z&=4 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{sumando}} 3y+16z=54$$

Finalmente obtemos dúas ecuacións con dúas incógnitas:

$$\left.\begin{aligned} 5y+5z&=25\\ 3y+16z&=54 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\substack{\text{Elimino y:}\\ \text{1ª por 3}\\ \text{2ª por -5}}} \left.\begin{aligned} 15y+15z&=75\\ -15y-80z&=-270 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{sumo}} -65z=-195 \rightarrow \mathbf{z=3}$$

Substituindo calculo x e y:

$$5y+5\cdot 3=25 \rightarrow 5y=10 \rightarrow \mathbf{y=2}$$

$$-x+2+3\cdot 3=10 \rightarrow -x=-1 \rightarrow \mathbf{x=1}$$

Sistemas lineais

Realmente é un procedemento bastante “lioso”. Pero podemos facelo máis doado:

- Podemos simplificar a escritura evitando escribir as incógnitas (só operamos cos coeficientes).
- E podemos trasformalo nun proceso ordenado.

$$\left.\begin{aligned} 2x+3y-z&=5\\ -x+y+3z&=10\\ 5x-2y+z&=4 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{ecuación arriba}]{\text{Escribo só os coeficientes. Trasladamos a 2ª}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 10\\ 2 & 3 & -1 & 5\\ 5 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

- A esa caixa de números chamámoslle *matriz*.
- O noso obxectivo é despexar z. É dicir, que a última fila desa matriz quede: (0 0 nº | nº)

Sistemas lineais

- Faremos as mesmas transformacións que faciamos ao aplicar o método de redución pero escribindo menos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 10 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 5 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{2^a+1^a\cdot 2 \\ 3^a+1^a\cdot 5}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 5 & 5 & 25 \\ 0 & 3 & 16 & 54 \end{array}\right) \xrightarrow{2^a\cdot 3-3^a\cdot 5} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 5 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & -65 & -195 \end{array}\right)$$

- En só dous pasos despexamos z.
- Para terminar, volvemos escribir o sistema do xeito habitual e calculamos o valor das incógnitas:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 5 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & -65 & -195 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} -x+y+3z=10 \\ 5y+5z=25 \\ -65z=-195 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} z=\dfrac{-195}{-65}=3 \\ 5y+5\cdot 3=25 \rightarrow 5y=10 \rightarrow y=2 \\ -x+2+3\cdot 3=10 \rightarrow -x=-1 \rightarrow x=1 \end{array}\right.$$

Sistemas lineais

- Ese xeito de resolver un sistema coñécese como ***Método de Gauss***.
- É un xeito automatizado de aplicar sucesivamente o método de redución.
- O obxectivo é trasformar a matriz noutra que teña, debaixo da diagonal, todos os elementos 0:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right) \to \ldots \to \left(\begin{array}{ccc|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_1 \\ 0 & A_{22} & A_{23} & B_2 \\ 0 & 0 & A_{33} & B_3 \end{array}\right)$$

- Segundo o tipo de sistema obteremos un destes tres tipos de matriz:
  - ✓ Sistema determinado: $\left(\begin{array}{ccc|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_1 \\ 0 & A_{22} & A_{23} & B_2 \\ 0 & 0 & A_{33} & B_3 \end{array}\right)$
  - ✓ Sistema indeterminado: $\left(\begin{array}{ccc|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_1 \\ 0 & A_{22} & A_{23} & B_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$
  - ✓ Sistema incompatible: $\left(\begin{array}{ccc|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_2 \\ 0 & 0 & 0 & B_3 \end{array}\right)$

Sistemas lineais

Resolve, polo Método de Gauss, o sistema:

$$\left.\begin{aligned} 3x - y - 2z &= 1 \\ -2x + 2y + 4z &= 6 \\ 7x - 2y - z &= 7 \end{aligned}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 4 & 6 \\ 4 & -2 & -1 & 7 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{r} \\ 2^a \cdot 3 + 1^a \cdot 2 \\ 3^a \cdot 3 + 1^a \cdot (-4) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 20 \\ 0 & -2 & 5 & 17 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ 2^a + 3^a \cdot 2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 20 \\ 0 & 0 & 18 & 54 \end{array}\right)$$

É un sistema determinado (matriz triangular). Escribímolo do xeito habitual e calculamos o valor das incógnitas:

$$\left.\begin{aligned} 3x - y - 2z &= 1 \\ 4y + 8z &= 20 \\ 18z &= 54 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} z = \dfrac{54}{18} = 3 \\ 4y + 8 \cdot 3 = 20 \rightarrow 4y = 20 - 24 \rightarrow y = \dfrac{-4}{4} = 1 \\ 3x - (-1) - 2 \cdot 3 = 1 \rightarrow 3x = 1 - 1 + 6 \rightarrow x = \dfrac{6}{3} = 2 \end{array}\right.$$

Sistemas lineais

Resolve, polo Método de Gauss, o sistema:

$$\left.\begin{aligned} 5x - 3y + 2z &= 10 \\ 2x + y + 4z &= 2 \\ x - 2y - z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Reordenamos as ecuacións para facilitar os cálculos, escribindo a 3ª en primeiro lugar (coeficiente de x, 1):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{2^a+1^a\cdot(-5) \\ 3^a+1^a\cdot(-2)}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{2^a/7} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[3^a+2^a\cdot(-5)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

É un sistema determinado (matriz triangular). Escribímolo do xeito habitual e calculamos o valor das incógnitas:

$$\left.\begin{aligned} x - 2y - z &= 2 \\ y + z &= 0 \\ z &= -2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} & z = -2 \\ & y + (-2) = 0 \rightarrow y = 2 \\ & x - 2\cdot 2 - (-2) = 2 \rightarrow x = 2 + 4 - 2 \rightarrow x = 4 \end{aligned}\right.$$

Sistemas lineais

Resolve, polo Método de Gauss, o sistema:
$$\left.\begin{array}{r} -x+3y-z=5 \\ -2x+y+z=-1 \\ 3x+y-3z=7 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[3^a+1^a\cdot 3]{2^a+1^a\cdot(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & -11 \\ 0 & 10 & -6 & 22 \end{array}\right) \xrightarrow[2^a+3^a\cdot 2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

É un sistema indeterminado (matriz case-triangular). Só podemos escribir dúas incógnitas en función da terceira:

$$\left.\begin{array}{r} -x+3y-z=1 \\ -5y+3z=-11 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} z=t \\ -5y+3t=-11 \to -5y=-11-3t \to y=\dfrac{-11-3t}{-5} \\ -x+3\left(\dfrac{11+3t}{5}\right)-t=5 \to \dfrac{33+9t}{5}-t-5=x \to x=\dfrac{8+4t}{5} \end{array}\right.$$

Sistemas lineais

Resolve, polo Método de Gauss, o sistema:

$$\left.\begin{aligned} 4x - 3y + z &= 2 \\ 2x + y + 5z &= -1 \\ 6x - 2y + 6z &= 4 \end{aligned}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \\ 6 & -2 & 6 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{r} \\ 1^a+2^a\cdot(-2) \\ 3^a\cdot 2+1^a\cdot(-3) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -9 & 4 \\ 0 & 5 & 9 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ 2^a+3^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

É un sistema incompatible (matriz cunha fila de 0^s agás o termo independente). NON ten solución.

Sistemas lineais

Un estadio de futbol dispón de tres tipos de asentos, A, B e C. Os prezos de cada un son 10, 20 e 30 € respectivamente. Un día a recadación foi de 4250 € e o número de espectadores foi de 200. Se os espectadores dos asentos A estivesen nos B e os B en A obteríase 4000 € ¿Cantos espectadores habia en cada tipo de asento?

Formulamos un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{x} \rightarrow \text{espectadores en asentos A} \\ \mathrm{y} \rightarrow \text{espectadores en asentos B} \\ \mathrm{z} \rightarrow \text{espectadores en asentos C} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=200 \\ 10x+20y+30z=4250 \\ 20x+10y+30z=4000 \end{array}\right\}$$

Por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 1 & 2 & 3 & 425 \\ 2 & 1 & 3 & 400 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{r} \\ 2^a-1^a \\ 3^a-1^a\cdot 2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & 2 & 225 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ 2^a+3^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & 2 & 225 \\ 0 & 0 & 3 & 225 \end{array}\right)$$

É un sistema compatible determinado. Ten solución única:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=200 \\ y+2z=225 \\ 3z=225 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} z=225/3=75 \\ y+2\cdot 75=225 \rightarrow y=225-150 \rightarrow y=75 \\ x+75+75=200 \rightarrow x=200-150 \rightarrow x=50 \end{array}\right.$$

Sistemas lineais

Con 450 gramos de medicamento fabricáronse 60 pastillas de tres tipos: grandes, medianas e pequenas. As pastillas grandes pesan 20 gramos, as medianas 10 gramos e as pequenas 5 gramos. Se o total de pastillas grandes e medianas é a metade do número de pastillas pequenas. ¿Cantas se fabricaron de cada tipo?

Formulamos un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x \to \text{nº de pastillas grandes} \\ y \to \text{nº de pastillas medianas} \\ z \to \text{nº de pastillas pequenas} \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y+z=60 \\ 20x+10y+5z=450 \\ x+y=\dfrac{z}{2} \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y+z=60 \\ 4x+2y+z=90 \\ 2x+2y-z=0 \end{array}\right\}$$

Por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 4 & 2 & 1 & 90 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[2^a+3^a]{1^a+2^a} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 0 & 60 \\ 6 & 4 & 0 & 90 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[2^a \div 2]{1^a \div 3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 20 \\ 3 & 2 & 0 & 45 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{1^a \cdot (-2)+2^a} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & 45 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

É un sistema compatible determinado. Ten solución única:

$$\left.\begin{array}{r} x=5 \\ 3x+2y=45 \\ 2x+2y-z=0 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x=5 \\ 3\cdot 5+2y=30 \to 2y=45-15 \to y=15 \\ 2\cdot 5+2\cdot 15-z=0 \to -z=-40 \to z=40 \end{array}\right.$$

Sistemas lineais

O propietario dunha granxa de coellos dispón de tres marcas de pienso coas composicións que aparecen na táboa.

	Proteínas	Graxas
Marca A	20%	10%
Marca B	10%	20%
Marca C	30%	5%

Ten comprobado que debe subministrar a cada coello 300 gr diarios de comida contendo 55 gr de proteínas e 40 gr de graxas. ¿Canto de pienso de cada marca debe utilizar?

$$\left.\begin{array}{l} x \to \text{nº de pastillas grandes} \\ y \to \text{nº de pastillas medianas} \\ z \to \text{nº de pastillas pequenas} \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y+z=60 \\ 20x+10y+5z=450 \\ x+y=\dfrac{z}{2} \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y+z=60 \\ 4x+2y+z=90 \\ 2x+2y-z=0 \end{array}\right\}$$

Por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 4 & 2 & 1 & 90 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[2^a+3^a]{1^a+2^a} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 0 & 60 \\ 6 & 3 & 0 & 90 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[2^a \div 3]{1^a-2^a} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 0 & -30 \\ 2 & 1 & 0 & 30 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

É un sistema compatible determinado. Ten solución única:

$$\left.\begin{array}{r} 3x=30 \\ 2x+y=30 \\ 2x+2y-z=0 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x=30/3=10 \\ 2\cdot 10+y=30 \to y=30-20 \to y=10 \\ 2\cdot 10+2\cdot 10-z=0 \to -z=-40 \to z=40 \end{array}\right.$$