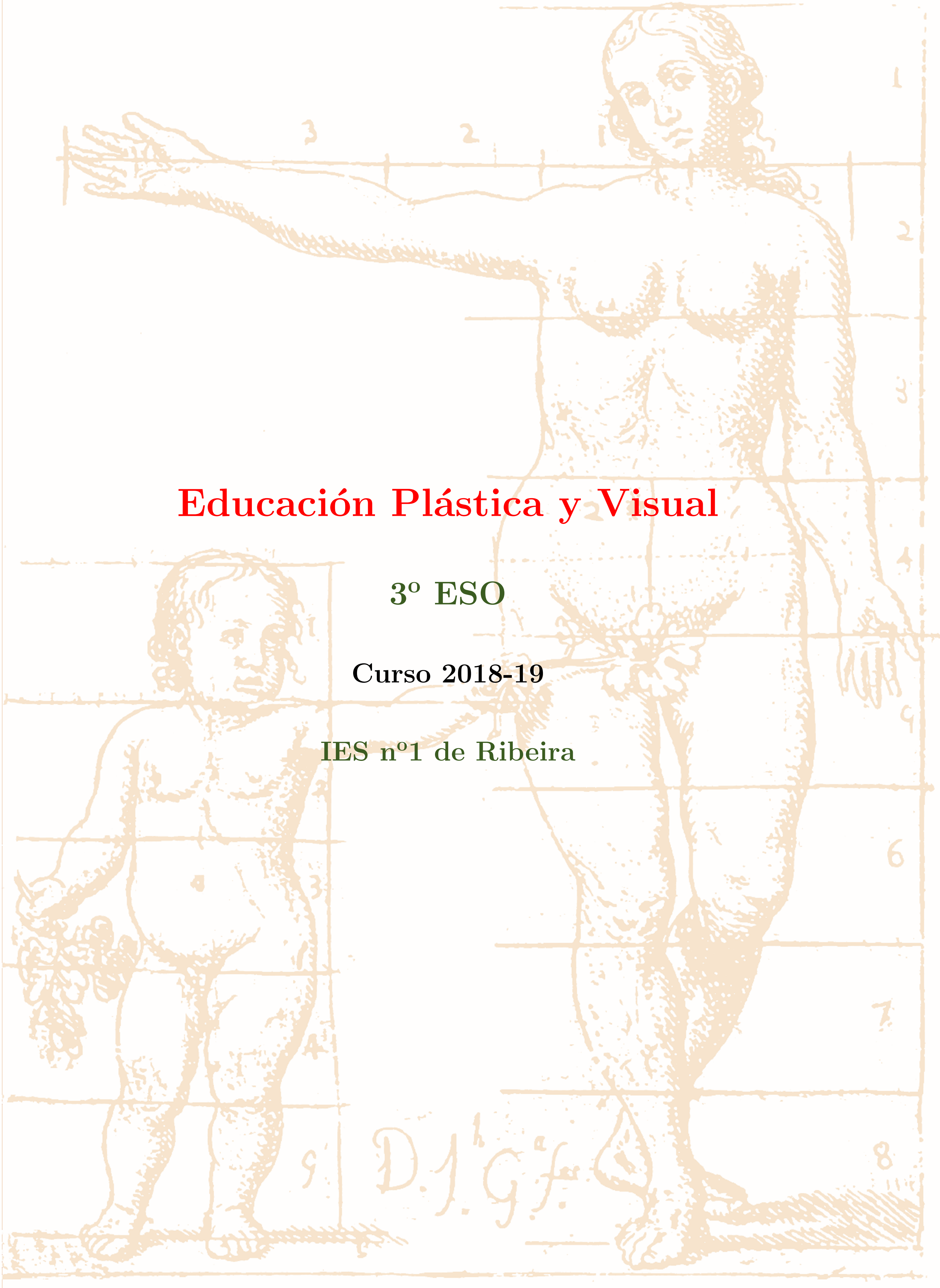


Educación Plástica y Visual

3º ESO

Curso 2018-19

IES nº1 de Ribeira

Índice general

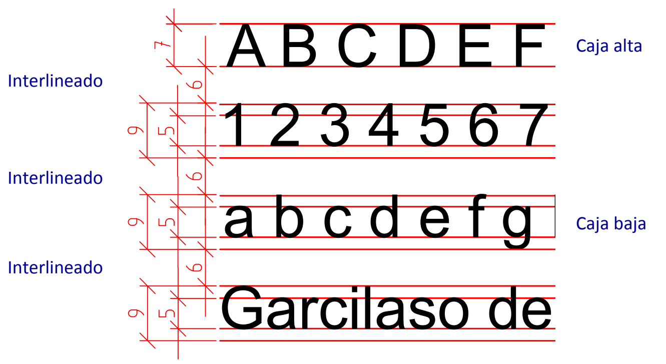
Tema 1

Rotulación

Una lámina al igual que un plano, tiene dos componentes, una es la parte gráfica dónde se define la forma y disposición de los dibujos y la otra, dónde se indican las medidas y otros aspectos del dibujo.

A continuación te indico la técnica del trazado a mano de los caracteres principales:

Antes de rotular, conviene trazar unas pautas suaves con el lápiz para que la rotulación quede en línea y para que, después de pasado a tinta, las pautas puedan borrarse fácilmente.

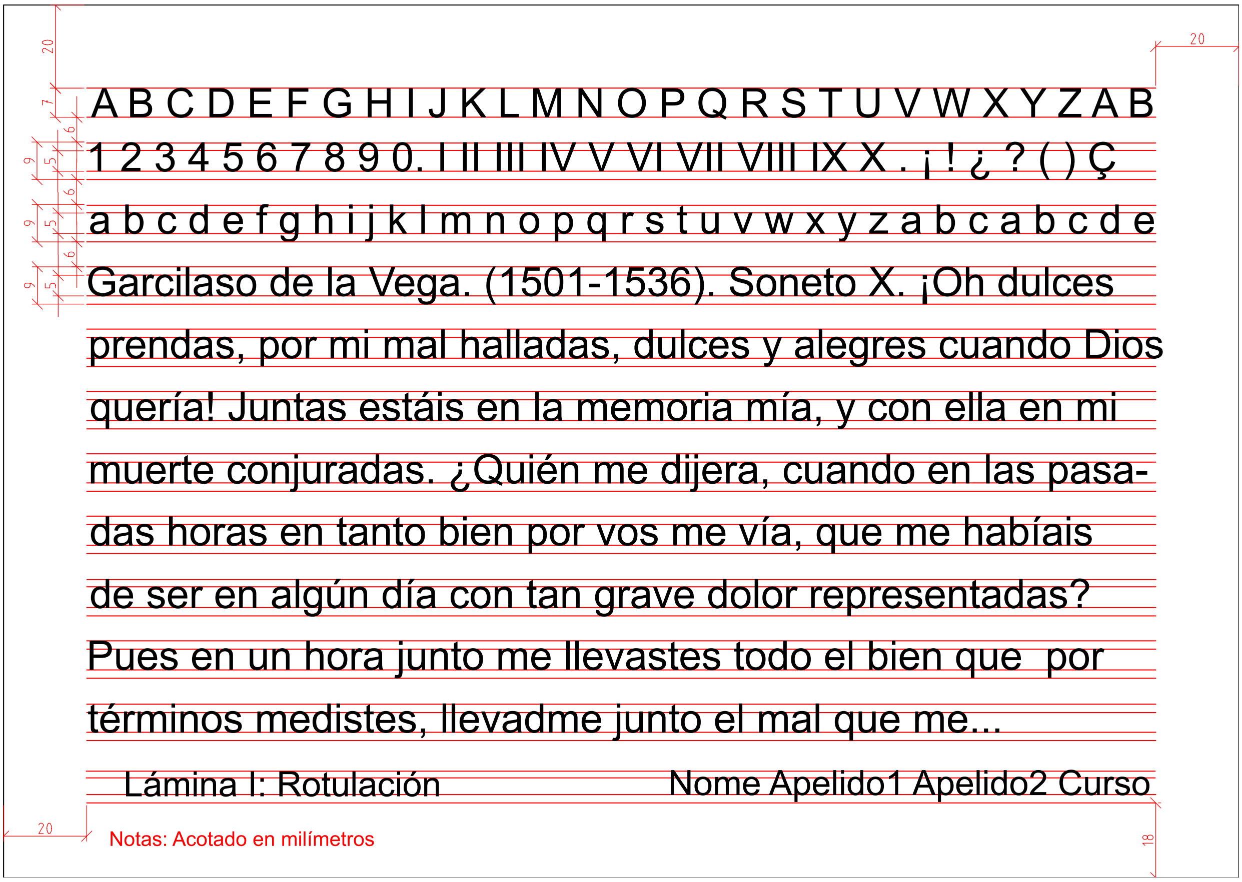


Fuente: ARIAL

1.1 Ejercicios

Lámina I. Una de las láminas que vas a repetir este verano, es la de rotulación. Los datos seguro que los recuerdas, empezaremos sacándole, $20\,mm = 2\,cm$ al margen de la lámina. Para seguir situando las pautas:

1. La primera línea de texto, tiene una altura de $7\,mm$, sólo tiene caja alta, ¿ te vas acordando?
2. Después de una separación de $6\,mm$, pasamos a la segunda línea de texto, la cual tiene una altura de $9\,mm$, contando con una caja alta igual a $9\,mm$(altura de las mayúsculas) y caja baja de $5\,mm$ (altura para las minúsculas).
3. A partir de esta línea de texto se repiten las medidas de la segunda línea.



Tema 2

Construcciones gráficas fundamentales

En geometría hay tres elementos simples con los que podemos construir cualquier forma más compleja: el punto, la línea y el plano.

2.0.1. El punto

Es el elemento geométrico más simple y queda definido en la intersección de dos rectas coplanarias[1]. Se designan con alguna letra mayúscula del abecedario: **A, B, C...**

2.0.2. La línea

Una línea esta formada por un número infinito de puntos que, si tienen la misma dirección, definen una **recta**. Se designan con letras minúsculas: r, s, t, m... Un punto interior de una recta la divide en dos **semirrectas**.

La posición de una recta la determinan dos puntos.

Por un punto pasan infinitas rectas, las cuales definen un **haz de rectas**.

Distinguimos los siguientes tipos de rectas:

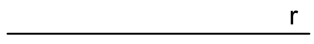
Segmento: parte de la recta delimitada entre dos puntos.

Líneas poligonales: se componen de varios segmentos y pueden ser abiertas o cerradas.

Línea curva: aquella cuyos puntos no están en la misma dirección.

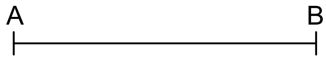
Mixta: cuando la recta combina partes rectas y curvas.

[1] rectas pertenecientes al mismo plano.

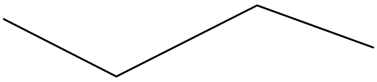


(a) Recta

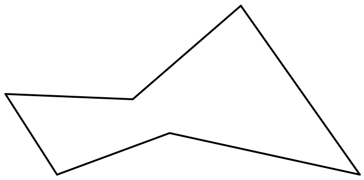
(b) Semirrecta



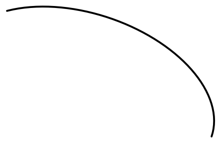
(c) Segmento



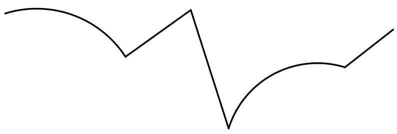
(d) Poligonal abierta



(e) Poligonal cerrada



(f) Curva



(g) Mixta

2.0.3. El plano

Un plano es un objeto ideal que solo posee dos dimensiones, y contiene infinitos puntos y rectas. Para definir un plano necesitamos una de estas condiciones: Dos rectas que se cortan, una recta y un punto o tres puntos no alineados.
Los planos se designan con letras del alfabeto griego: α(alfa), β(beta), etc.

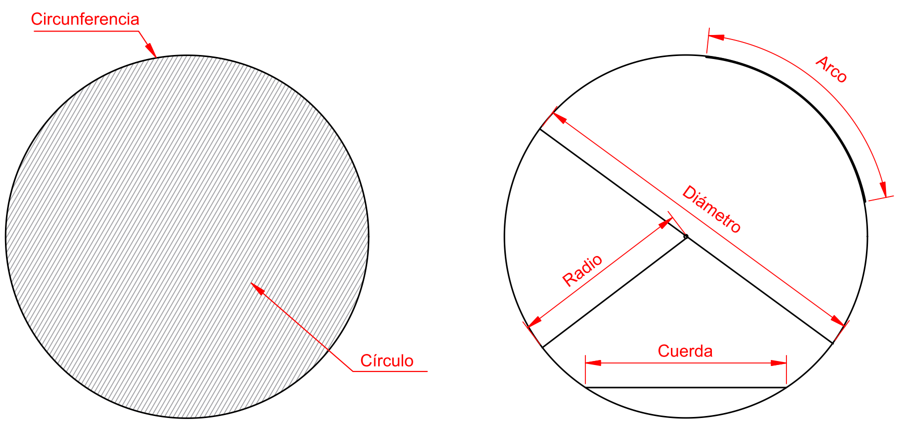
Por una recta pasan infinitos planos, definiendo una figura geometrica que denominamos **haz de planos**.
Las rectas de un mismo plano se llaman **coplanarias**, y pueden ser **secantes** o **paralelas**. Un caso particular de secantes son las rectas **perpendiculares**.

2.1 La circunferencia

Un **lugar geométrico** es un conjunto de puntos que tienen las mismas propiedades geométricas.

Así podríamos definir la circunferencia como el lugar geométrico de los puntos del plano que están a igual distancia de un punto interior llamado centro. A esta distancia constante la llamamos radio.

El *círculo* es el área o superficie plana contenida dentro de una circunferencia. Normalmente confundimos los términos geométricos de *circunferencia* y de *circulo*. En la imagen siguiente se muestra la diferencia, la circunferencia es la línea exterior (de color negro), mientras que el círculo es la parte interior (coloreada en gris), contenida por la circunferencia.



(a) (b)

Fig. 1.

2.1.1. Líneas notables de la circunferencia

Arco: Es un segmento de circunferencia, aunque en geometría *arco* es cualquier curva continua que une dos puntos.

Centro: Punto interior a la circunferencia que equidista de cualquier punto de la circunferencia.

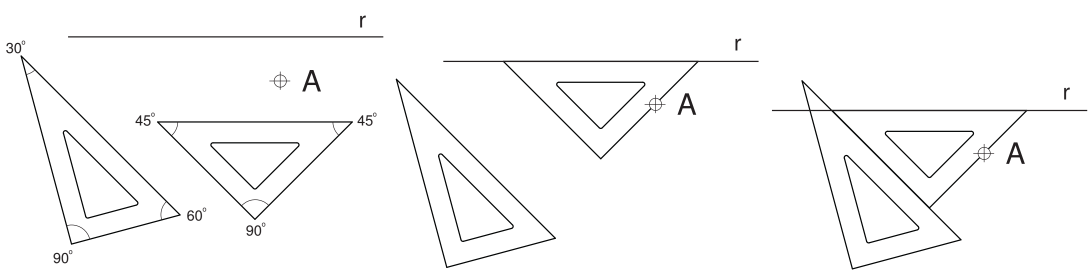
Cuerda: Es un segmento recto, cuyos extremos son dos puntos de la curva. La recta que contiene a una cuerda se denomina recta secante a la curva.

Diámetro: Es un segmento de recta que pasa por el centro y une dos puntos opuestos de una circunferencia.

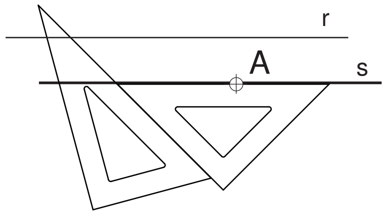
Radio: Es el segmento que une el centro de la circunferencia con un punto cualquiera de la misma.

2.1.2. Trazado de paralelas y perpendiculares

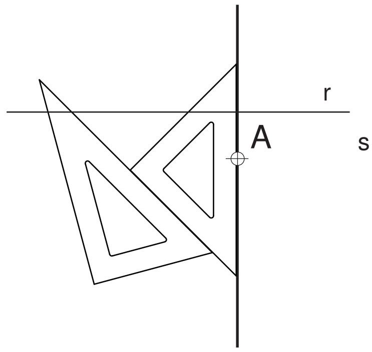
Aunque vamos a ver la sencillez con la que se trazan paralelas y perpendiculares con la escuadra y el cartabón, en tiempos de *Euclides* los instrumentos de dibujo eran la regla y el compás, por eso la mayoría de construcciones de la *geometría euclidea* se basan en estos dos instrumentos.



(a) (b) (c)



(d) Paralela



(e) Perpendicular

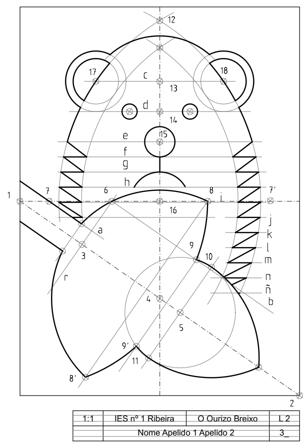
2.2 Ejercicios

2.2.1. Lámina 2: O Ourizo Breixo

En esta lámina aprenderemos a trazar paralelas y perpendiculares, haciendo uso de la escuadra y el cartabón. También haremos uso del compás para trazar arcos y circunferencias. Y veremos que son figuras simétricas con respecto a un eje.

Preparación:

- Colocar la lámina en posición vertical.
- Dibujar los márgenes: izquierda 2 cm, resto 0'5 cm y el cajetín siguiendo el modelo, con lo que tendremos un espacio de dibujo de 185 x 257 mm.



- Dibujar los ejes de simetría vertical y horizontal de la lámina. Aquí tienes que recordar que un *–eje de simetría–*, es una línea que divide una figura en dos partes iguales y simétricas, en el caso que nos ocupa, para el *eje vertical* dividimos $185/2 = 92'5$, que es dónde situamos, el punto 0. Para obtener el *eje horizontal* dividimos $257/2 = 128'5$, que es dónde colocamos el punto 1. A continuación solamente nos queda trazar perpendiculares por dichos puntos.
- Dibujar la diagonal **1,2** del rectángulo inferior.

Hoja:

Se construye sabiendo que la diagonal 1,2 que has trazado es su eje de simetría.

primera parte:

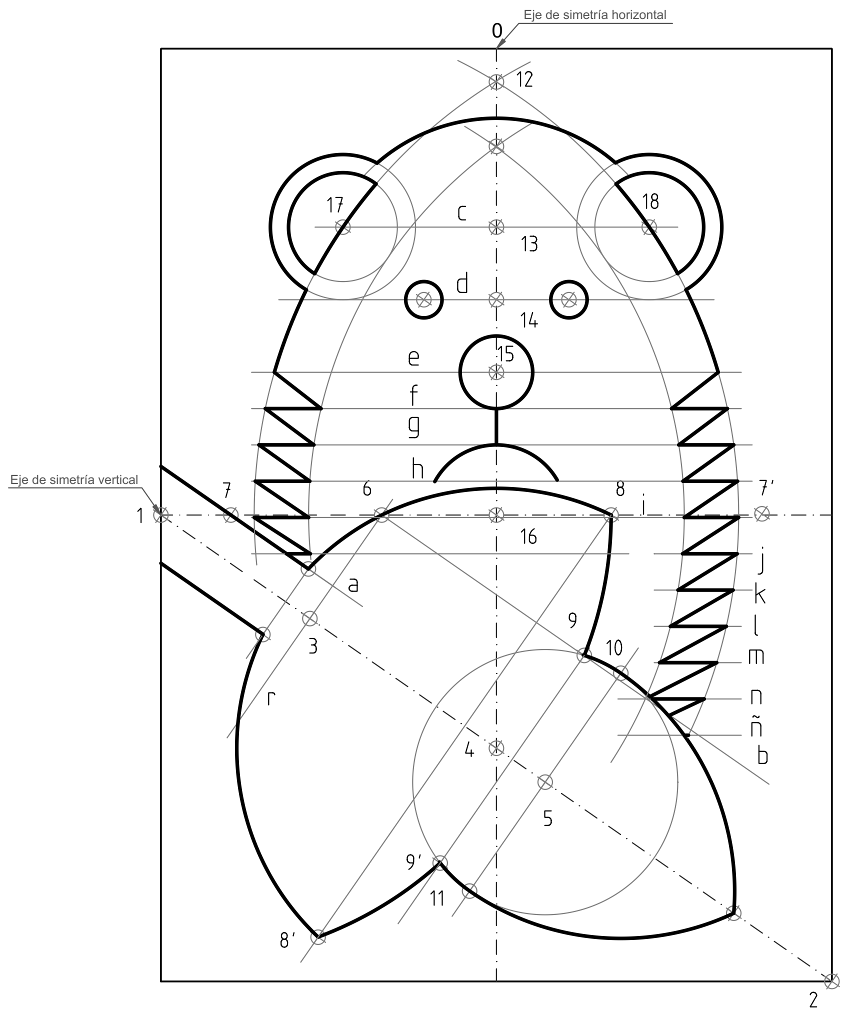
- Marcar en la diagonal los siguientes puntos:

- **3** (a 50 mm del origen izquierdo de la diagonal).
- **4** (en la intersección de la diagonal con el eje vertical de la lámina).
- **5** (a 129 mm del origen izquierdo de la diagonal).

- Trazar por el punto **3** la recta **r** perpendicular a la diagonal.
- Trazar las rectas **a** y **b** paralelas a la diagonal:
  - **a** (a 11 mm por encima). Localiza además el punto **7** en el eje horizontal.
  - **b** (por el punto **6**).

segunda parte:

- Dibujar el arco de circunferencia de centro **4** y radio $\overline{4,6}$ hasta encontrar **8**
- Dibujar el arco de circunferencia de centro **7** y radio $\overline{7,8}$ hasta encontrar **9** en la recta **b**
- Dibujar la circunferencia de centro **5** y radio $\overline{5,9}$
- Trazar por **5** la perpendicular a la diagonal y localizar **10** y **11** en la circunferencia
- Dibujar el arco de circunferencia de centro **11** y radio $\overline{11,10}$.



1:1	IES nº 1 Ribeira	O Ourizo Breixo	L 2
	Nome Apelido 1 Apelido 2		3_

tercera parte:

- Terminar el resto del dibujo sabiendo que existe simetría entre las dos partes.

Erizo:

- Dibujar el arco de circunferencia de centro **7** y radio **140 mm**
- Dibujar el arco de circunferencia de centro **7** y radio **125 mm**
- Dibujar al otro lado los arcos simétricos respecto al eje vertical del papel.
- Localizar **12**. Localizar también en el eje los siguientes puntos:
  - **13** a $40\,mm$ de **12**
  - **14** a $20\,mm$ de **13**
  - **15** a $20\,mm$ de **14**
  - **16**, intersección del eje vertical y el eje horizontal
- Dibujar por los puntos **13, 14 y 15** las rectas horizontales **c, d y e**
- Observa el dibujo y dibuja las rectas **f, g** y las siguientes a **10 mm**
- **orejas:**
  - Dibujar los arcos de circunferencia de centros **17** y **18** y radio **20 mm**
  - Dibujar los arcos concéntricos a los anteriores de radio **15 mm**
- **cabeza:**
  - Dibujar el arco de circunferencia de centro en **14** y radio **50 mm**
- **puas:**
  - Observa el modelo y haz lo mismo
- **cara:**
  - Puedes hacerla a tu gusto o siguiendo el modelo, pero teniendo en cuenta que tiene que ser simétrica con respecto al eje vertical.
    - **Ojos** están separados $20\,mm$ del eje y tienen un radio de **5 mm**
    - **Nariz** se dibuja con centro en **15** y radio **10 mm**
    - **Boca** observamos la muestra y hacemos lo mismo, centro en **16**

2.3 Perpendicularidad y Paralelismo

Dos rectas son perpendiculares cuando se cortan formando un ángulo de 90°.

2.3.1. Mediatriz de un segmento

Mediatriz de un segmento $\overline{AB}$, es la recta perpendicular al segmento en su punto medio. También se puede considerar la mediatriz como lugar geométrico, ya que cualquier punto de ella equidista de los extremos del segmento.

Dado el segmento $\overline{AB}$:

1. Con centro en A y radio arbitrario -*mayor a la mitad*- se trazan dos arcos de circunferencia.
2. Con centro en el otro extremo B y con el mismo radio anterior, se trazan otros dos arcos, que se cortan con los anteriores en los puntos D y E.
3. La recta s que une los puntos D y E es la perpendicular al segmento por el punto medio C.

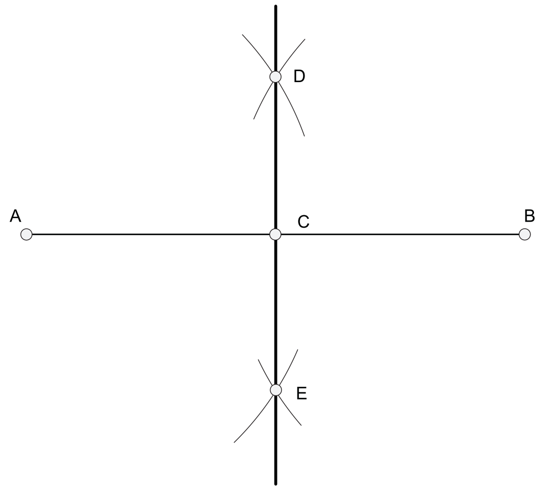


Fig. 2.

2.3.2. Perpendicular a semirrecta por unos de sus extremos

Dada la recta r y el extremo A:

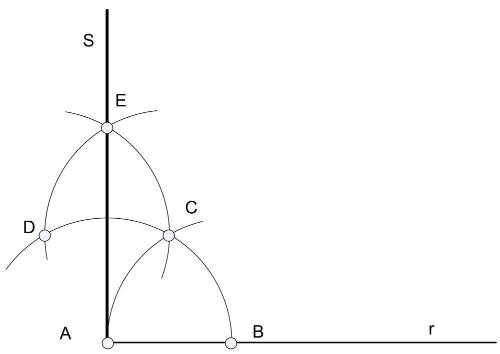


Fig. 3.

1. Con centro en el punto A y radio arbitrario se traza un arco que corta a la recta r en el punto B.
2. Con centro en el punto B y con el mismo radio anterior se traza un segundo arco que corta al anterior en el punto C.
3. Con centro en C y el mismo radio se traza un tercer arco que corta al primero en el punto D.
4. Con centro en el punto D y el mismo radio se traza un tercer arco que corta al tercero en el punto E.
5. La recta s que une el punto E con el A es la perpendicular a la recta r.

2.3.3. Perpendicular a una recta por un punto de la misma

Dada la recta r y el punto A:

1. Con centro en A y radio arbitrario se trazan dos arcos que cortan a la recta r en los puntos B y C.
2. Con centros en B y C y radio arbitrario se trazan sendos arcos que se cortan en el punto D.
3. La recta s que une los puntos D y A es la perpendicular buscada.

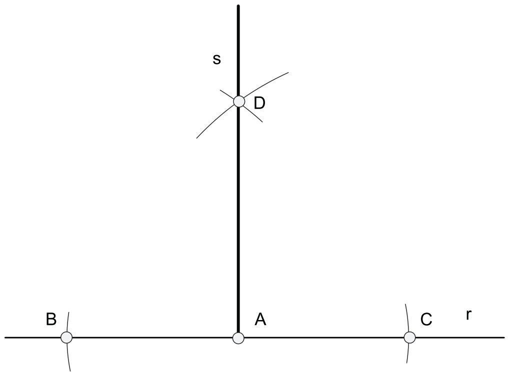


Fig. 4.

2.3.4. Perpendicular a una recta por un punto exterior a ella

Dada la recta r y el punto A:

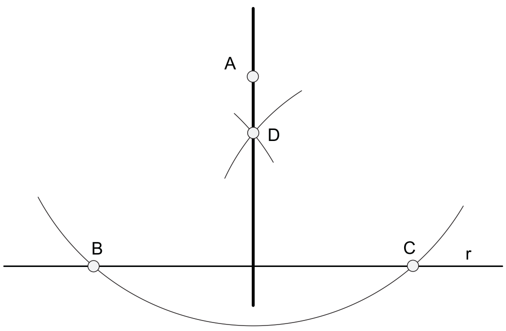


Fig. 5.

1. Con centro en A y radio arbitrario se trazan dos arcos que cortan a la recta r en los puntos B y C.
2. Con centros en B y C y radio arbitrario se trazan sendos arcos que se cortan en el punto D.
3. La recta s que une los puntos D y A es la perpendicular buscada.

2.3.5. Trazar por un punto exterior a una recta una paralela

En *geometría clásica*, las rectas o planos paralelos son equidistantes entre sí y por más que los prolonguemos no pueden encontrarse.

Dada la recta r y el punto A:

1. Se elige un punto B cualquiera de la recta r y se traza la semicircunferencia de centro B y radio BA, que cota a la recta r en C y D.
2. Con centro en D y radio CA se traza un arco que corta a la semicircunferencia en el punto E.
3. La recta s que une los puntos A y E es la paralela buscada.

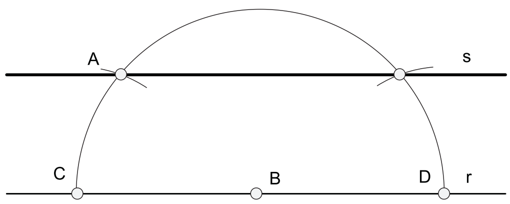


Fig. 6.

2.3.6. Trazar la paralela a una recta a una distancia dada

Dada la recta r y la longitud l:

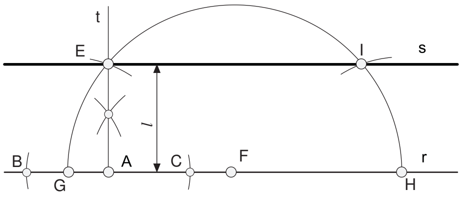
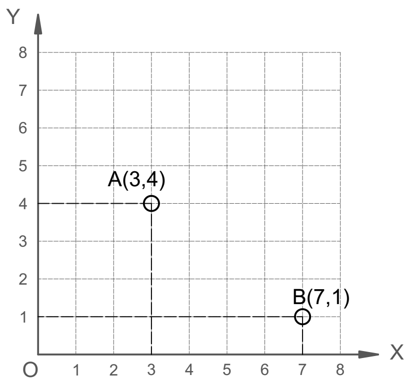


Fig. 7.

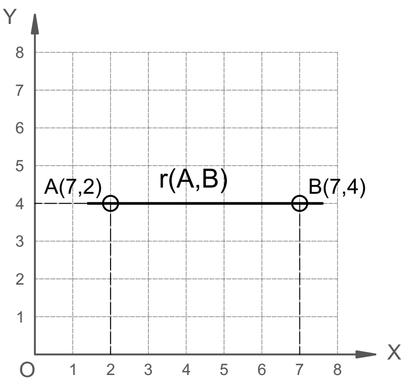
1. Se elige un punto cualquiera A de la recta r y se traza la perpendicular t a la recta r.
2. Sobre la perpendicular t se lleva la longitud l.
3. Quedando resumido el caso al apartado anterior.

2.4 Sistema de Coordenadas

Al igual que el planeta se halla dividido en meridianos y paralelos para poder situar cualquier punto de la superficie, la zona de trabajo se halla dividida en líneas imaginarias horizontales y verticales. Es algo parecido al *–juego de los barcos–*, donde el tablero se halla dividido en filas y columnas. En un sistema de coordenadas existen dos ejes, uno horizontal llamado eje de abscisas o eje X y otro vertical, llamado eje de ordenadas o eje Y. Ambos ejes son perpendiculares y se cortan en un punto, llamado origen de coordenadas O, punto de coordenadas $(0, 0)$.



(a)



(b)

Por ejemplo, el punto A representado en la *figura 1.9(a)*, tiene como coordenadas los valores 3 en el eje X y 4 en el eje Y, por tanto sus coordenadas son $(3, 4)$ y el punto $B(7, 1)$.
En la *figura 1.9.(b)*, tenemos el punto $A(7, 2)$ y el punto $B(7, 4)$ que unidos definen la recta $r(A, B)$.
Pero la mayor parte del tiempo en un dibujo, por comodidad, no se dibuja haciendo referencia directa al origen sino al último punto introducido. Para representar estas coordenadas utilizaremos el símbolo **@**.

Resumiendo:

– Los Puntos Absolutos se introducen haciendo referencia directa al origen.

– Los Puntos Relativos se introducen haciendo referencia al ultimo punto introducido .

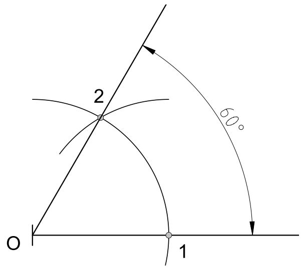
2.4.1. Trazado de ángulos con el compás

Con una regla y un compás es posible trazar los mismos ángulos que en el apartado anterior, basándonos en tres construcciones básicas:

Ángulo de 90º: Perpendicular a una recta por uno de sus puntos que hemos visto en la página 12, figura 2.3.2.

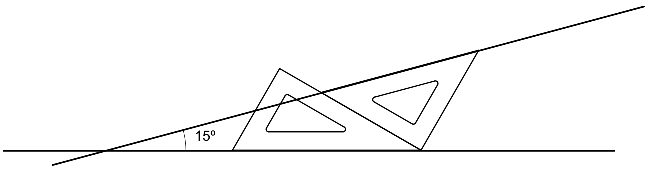
Ángulo de 45º: Trazando la bisectriz en la construcción anterior.

Ángulo de 60º: Hacemos centro en el extremo O de una semirrecta para trazar un arco de radio cualquiera, que corte la semirrecta en el punto 1. Con el mismo radio y haciendo centro en el punto 1, fijamos sobre el arco la posición del punto 2; la semirrecta $O2$ define el angulo de 60º.

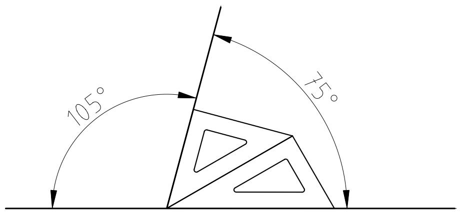


2.4.2. Trazado de ángulos con escuadra y cartabón

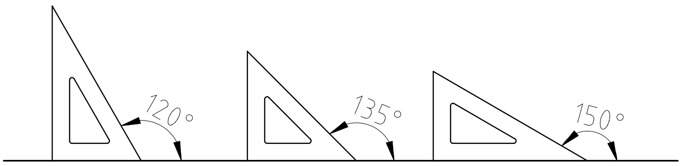
La utilización individual o combinada de la escuadra y el cartabón nos permite trazar líneas, con una inclinación respecto a la horizontal múltiplo de 15º.



(c)



(d)

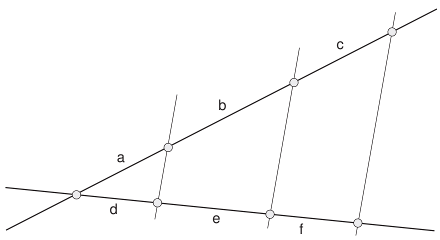


(e)

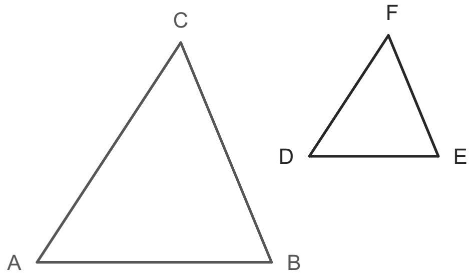
2.4.3. Teorema de Thales

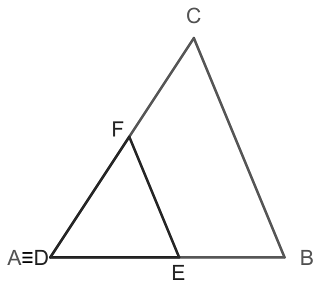
Los segmentos determinados por un haz de rectas paralelas sobre dos rectas que se cortan son directamente proporcionales.

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$$



Para saber si dos triángulos son semejantes, estos deben poder colocarse en posición del teorema de Thales.





2.4.4. División de un segmento en partes proporcionales a las dimensiones de otros segmentos

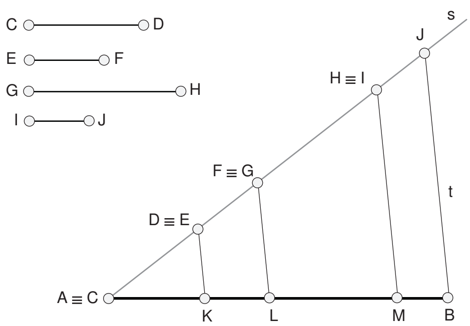


Fig. 8.

Dado el segmento $\overline{AB}$ y los segmentos $\overline{CD}$, $\overline{EF}$, $\overline{GH}$ e $\overline{IJ}$:

1. Por uno de los extremos A del segmento $\overline{AB}$ se traza una recta cualquiera s.
2. Sobre una recta s se van llevando, uno a continuación del otro, los segmentos $\overline{CD}$, $\overline{EF}$, $\overline{GH}$ e $\overline{IJ}$.
3. Se une el último punto J con el extremo B mediante la recta t, trazando a continuación paralelas a t por los puntos E, G e I.

2.4.5. División de un segmento en partes iguales

Dado el segmento $\overline{AB}$:

1. Por uno de los extremos A se traza una recta cualquiera s.
2. Sobre la recta s se llevan tantos segmentos iguales, de longitudes arbitrarias, como número de partes se quiera dividir el segmento –5 en esta ocasión–.
3. Se traza la recta t que une el último punto con el otro extremo B del segmento, y por los puntos 1, 2, 3, *etc*, de la recta s se trazan paralelas a t.

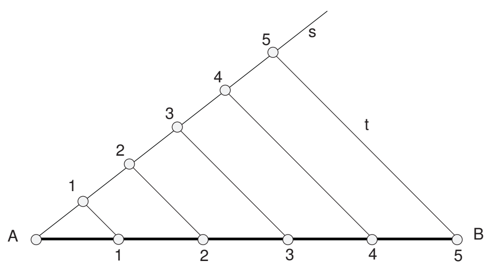


Fig. 9.

2.5 Ejercicios

Utiliza lápiz *2H*, para las líneas auxiliares y lápiz *B*, para la solución.

1. Define un segmento.

2. ¿ Qué diferencia existe entre un segmento y una semirrecta?

3. ¿Por qué se puede considerar la *mediatriz* como un lugar geométrico?

4. Dibuja unos ejes coordenados, que tengan $9\,cm$ para las **x** y $9\,cm$ para las **y**, cada unidad tendrá $1\,cm$. A continuación resuelve el siguiente ejercicio con regla y compás, dejando constancia de las construcciones auxiliares:

   a) Situar los siguientes elementos geométricos:
   - La recta r que viene determinada por los puntos $A(1,2)$ y $B(8,2)$
   - El punto $C(4'5, 7'5)$

   b) Trazar la perpendicular a la recta r por el punto C.

5. Dibuja unos ejes coordenados, que tengan $9\,cm$ para las **x** y $9\,cm$ para las **y**, cada unidad tendrá $1\,cm$. A continuación resuelve el siguiente ejercicio con regla y compás, dejando constancia de las construcciones auxiliares:

   a) Situar los siguientes elementos geométricos:
   - La recta r que viene determinada por los puntos $A(2,2)$ y $B(7,2)$
   - El punto $C(6,4)$

   b) Trazar por el punto $C(6,4)$, una paralela a la recta r.

6. Completa las siguientes frases:

   a) El punto es el elemento geométrico más simple y queda definido en ....
   b) Una línea esta formada por un número infinito de ....
   c) Un punto interior de una recta la divide en dos ....
   d) La posición de una recta la determinan ....
   e) Un segmento es ....
   f) Una línea se denomina curva, cuando ....
   g) Una línea poligonal abierta es ....
   h) Una línea poligonal cerrada es ....
   i) Un plano es ....
   j) Un lugar geométrico es ....
   k) Las rectas de un mismo plano se llaman ....

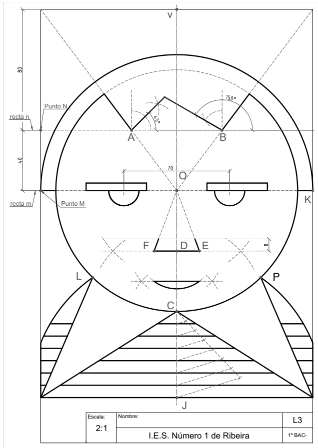
7. Divide mediante el teorema de Thales, el segmento $\overline{AB} = 5\,cm$ en tres partes iguales.

2.5.1. Lámina 3: O Rostro

En esta lámina recordaremos las siguientes construcciones: Perpendiculares y paralelas, Semicircunferencias y arcos, Mediatrices y Teorema de Thales.

Preparación de la lámina:

- Lámina en posición vertical
- Márgenes, 25 mm izquierda y resto a 5 mm
- Situación del cero absoluto en la esquina inferior izquierda del margen
- Recta vertical v, viene dada por la perpendicular en $V(90, 287)$ al margen horizontal
- Rectas horizontales n y m. Que vienen dadas por las perpendiculares al margen vertical por los puntos $N(0, 207)$ y $M(0, 167)$



Cara:

- Localiza el punto O *-en la intersección de las rectas v y m-*
- Dibujar la circunferencia de centro O y radio 80 mm

Pelo

- Localiza el punto K *-en la intersección de la recta m con el margen derecho-*
- Dibuja la semicircunferencia de centro O y radio $\overline{OK}$

Flequillo

- Unir el punto O con las esquinas superiores de los márgenes y localizar *-en la intersección de estas rectas con la recta n-* los puntos A y B
- Dibuja los ángulos: $\widehat{A} = 45^{\circ}$ y $\widehat{B} = 150^{\circ}$

Nariz

- Halla el punto C *-donde la circunferencia de la cara corta a la recta v-*
- Dibuja la mediatriz del segmento $\overline{OC}$ hallando el punto D
- Lleva 15 mm sobre la mediatriz a cada lado de D
- Dibuja el $\triangle FOE$ y repasar sólo una parte de los lados desiguales (8 mm).

Ojos

- Son semicircunferencias de radio $10\,mm$. Los centros G y H están sobre la recta m a $35\,mm$ del punto O
- Las cejas son rectángulos que vienen dados por sus coordenadas:
  - Rectángulo izquierdo:$(70,167),(30,167),(30,172)$ y $(70,172)$
  - Rectángulo derecho: $(110,167),(150,167),(150,172)$ y $(110,172)$

Boca

- Dibuja la mediatriz del segmento $\overline{DC}$
- Dibuja el arco de circunferencia de centro D y radio $25\,mm$ *-hasta cortar a la mediatriz-*

Cuerpo

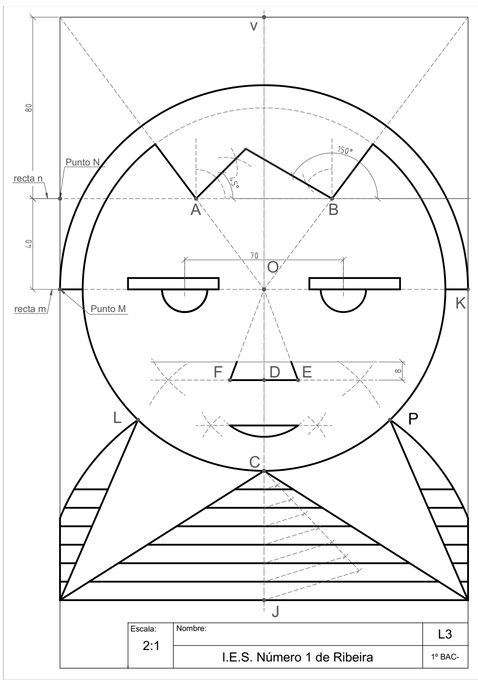
- Localiza el punto J *-en la intersección de la recta vertical v con el margen inferior-*
- Dibuja la circunferencia de centro J y radio $\overline{JD}$ localizando L y P.

Cuellos

- Unir L, C y P con las esquinas inferiores

Rayas

- Dividir el segmento $\overline{CJ}$ en 7 partes iguales *-utilizando el Teorema de Thales-*
- Dibujar paralelas horizontales por cada una de las divisiones obtenidas.



Tema 3

Polígonos

3.1 Triángulos

3.1.1. Definición

Podemos definir el *Triángulo* como una superficie plana limitada por tres rectas que se cortan dos a dos. Los puntos de intersección de las rectas se llaman *vértices* y los segmentos comprendidos entre los vértices se denominan *lados* del triángulo.

Los vértices se designan con letras mayúsculas en sentido antihorario y los lados con letras minúsculas, utilizando la misma letra del vértice opuesto.

3.1.2. Propiedades

a. La suma de los tres ángulos interiores de un triángulo vale 180º.

b. Cada lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos pero mayor que su diferencia.

c. En un triángulo rectángulo la hipotenusa es mayor que cada uno de sus catetos.

3.1.3. Clasificación

- Triángulos
  - Atendiendo a la forma
    - Equilátero: los tres lados son iguales
    - Isósceles: dos lados son iguales y el tercero distinto
    - Escaleno: los tres lados son desiguales
  - Atendiendo a los ángulos
    - Rectángulo: tiene un ángulo recto
    - Acutángulo: los tres ángulos son agudos
    - Obtusángulo: tiene un ángulo obtuso

3.1.4. Rectas y puntos notables

Altura es la perpendicular trazada desde un vértice al lado opuesto, por lo tanto un triángulo tiene tres alturas que se cortan en un punto llamado *ortocentro*.

Mediana es la recta que une un vértice con el punto medio del lado opuesto. Un triángulo tiene tres medianas que se cortan en un punto llamado *baricentro*.

Mediatriz ya lo dijimos en el tema anterior, es la perpendicular que divide el lado en dos partes iguales. Un triángulo tiene tres mediatrices. Las mediatrices se cortan en un punto llamado *circuncentro –se llama así por ser el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo–.*

Bisectriz es la línea que divide en dos partes iguales el ángulo. Un triángulo tiene tres bisectrices interiores. Las tres bisectrices interiores de un triángulo se cortan en un punto llamado *incentro –se llama así por ser el centro de la circunferencia inscrita al triángulo–.*

3.2 Ejercicios

Utiliza lápiz *2H*, para las líneas auxiliares y lápiz *B*, para la solución.

1. Dibuja unos ejes coordenados, que tengan $11\,cm$ para las **x** y $11\,cm$ para las **y**, cada unidad tendrá $1\,cm$. A continuación sitúa el $\triangle$ que viene definido por los vértices: $A\,(2,6)$, $B\,(8,10)$ y $C\,(6,2)$.
   a) Clasificar el triangulo atendiendo, tanto a la forma como a los ángulos.
   b) Dibuja las alturas de dicho triangulo y sitúa su ortocentro
2. Dibuja unos ejes coordenados, que tengan $11\,cm$ para las **x** y $11\,cm$ para las **y**, cada unidad tendrá $1\,cm$. A continuación sitúa el $\triangle$ que viene definido por los vértices: $A\,(2,1)$, $B\,(9,1)$ y $C\,(5'5,7)$.
   a) Clasificar el triangulo atendiendo, tanto a la forma como a los ángulos.
   b) Dibuja las bisectrices de dicho triangulo y sitúa su incentro.
   c) Dibuja la circunferencia inscrita.
3. Tenemos un campo triangular sin vallar y queremos atar una cabra de forma que no salga del campo pero que acceda al máximo de pasto posible. Dónde pondríamos el poste?

3.3 Cuadriláteros

3.3.1. Definición

Un *cuadrilátero* es una superficie plana limitada por cuatro rectas que se cortan dos a dos, los puntos de intersección se llaman *vértices* y los segmentos comprendidos entre éstos se denominan *lados*.
Al igual que en los triángulos, sus vértices se designan con letras mayúsculas y sus lados con minúsculas.

3.3.2. Propiedad

La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero vale 360^o.

3.3.3. Clasificación

$$
\text{– Cuadriláteros}\left\{\begin{array}{l}
\text{– Paralelogramos}\left\{\begin{array}{l}\text{– Cuadrado}\\ \text{– Rectángulo}\\ \text{– Rombo}\\ \text{– Romboide}\end{array}\right.\\[2em]
\text{– Trapecios}\left\{\begin{array}{l}\text{– Isósceles}\\ \text{– Rectángulo}\\ \text{– Escaleno}\end{array}\right.\\[2em]
\text{– Trapezoides}
\end{array}\right.
$$

- Paralelogramos: Tienen sus lados paralelos dos a dos. A su vez se clasifican en:
  - Cuadrado: los cuatro lados son iguales y los cuatro ángulos miden 90^{o}. Las diagonales son iguales y perpendiculares entre sí; se cortan en su punto medio.
  - Rectángulo: los lados opuestos son iguales entre sí y los cuatro ángulos miden 90^{o}. Las diagonales son oblicuas entre sí y de igual longitud.
  - Rombo: los cuatro lados son iguales y los ángulos opuestos miden lo mismo. Las diagonales son perpendiculares entre sí pero de distinta longitud.
  - Romboide: los lados y ángulos opuestos son iguales entre sí. Las diagonales tienen distinta longitud y son oblicuas entre sí.
- Trapecios: tienen solo dos lados paralelos, que reciben el nombre de bases. Pueden ser:
  - Isósceles: los lados que no son las bases son iguales; también tienen los ángulos iguales dos a dos. Tiene un eje de simetría.
  - Rectángulo: tiene dos ángulos rectos, coincidiendo la altura con uno de sus lados.
  - Escaleno: no tiene ninguna característica de los dos anteriores.
- Trapezoides: cuadriláteros que tienen todos sus lados y ángulos distintos.

3.4 Poligonos Regulares

3.4.1. Definiciones

Polígono es el espacio limitado por una línea quebrada, cerrada y plana. Cada segmento de la línea quebrada se denomina *lado* y los puntos de intersección de los lados *vértices*.

Si todos los lados son iguales el polígono se llama *equilátero*; si los ángulos y lados son iguales, el polígono se llama *regular*. Nosotros nos referiremos sólo a los polígonos regulares.

Un polígono es *cóncavo* si al trazar cualquier recta sólo lo corta en dos puntos. El polígono es *convexo* si existe alguna recta que lo corte en mas de dos puntos.

Se dice que un polígono está *inscrito* en una circunferencia si todos sus vértices están en ella. El polígono está *circunscrito* si todos sus lados son tangentes a la circunferencia.

3.4.2. Propiedades

a) La suma de los ángulos internos de un polígono de n lados es igual al producto de 180º por el número de lados menos dos: $\varphi = 180^{o}(n-2)$

b) La suma de los ángulos externos de un polígono es igual a 360º.

3.4.3. Clasificación

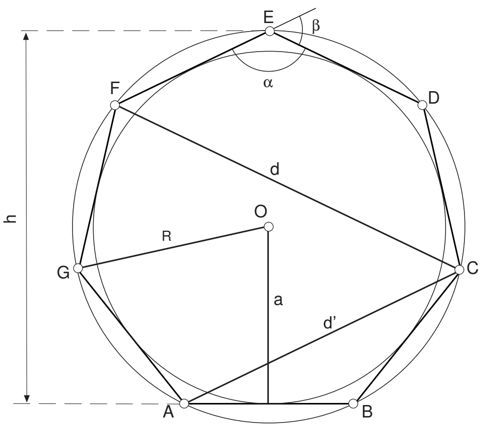
Según el número de lados:

Polígono	Nº lados		
Triángulo	3	*Cuadrilátero*	4
Pentágono	5	*Hexágono*	6
Heptágono	7	*Octógono*	8
Eneágono	9	*Decágono*	10
Endecágono	11	*Dodecágono*	12
Pentadecágono	15		

El triángulo regular se llama triángulo *equilátero* y el cuadrilátero regular *cuadrado.*

El resto de polígonos se nombran indicando el número de lados que tienen.

3.4.4. Líneas notables



Diagonal es la recta d' que une dos vértices no consecutivos.

Diagonal principal en los polígonos de un número par de lados, es la recta d que une dos vértices opuestos.

Perímetro es la suma de las longitudes de todos los lados de un polígono. $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EF}+\overline{FG}+\overline{GA}$

Radio es la recta R que va del centro a un vértice cualquiera. Coincide con el radio de la circunferencia c circunscrita.

Apotema es la recta a que une el centro con el punto medio de uno de sus lados. Coincide con el radio de la circunferencia c' inscrita en el polígono.

Altura en un polígono con un número de lados impar, es la recta h perpendicular a uno de los lados trazada desde el vértice opuesto. En polígonos con un número par de lados, la altura es la distancia entre lados opuestos paralelos.

3.5 Ejercicios

3.5.1. Lámina 4: Construcción de Polígonos Regulares a partir del lado

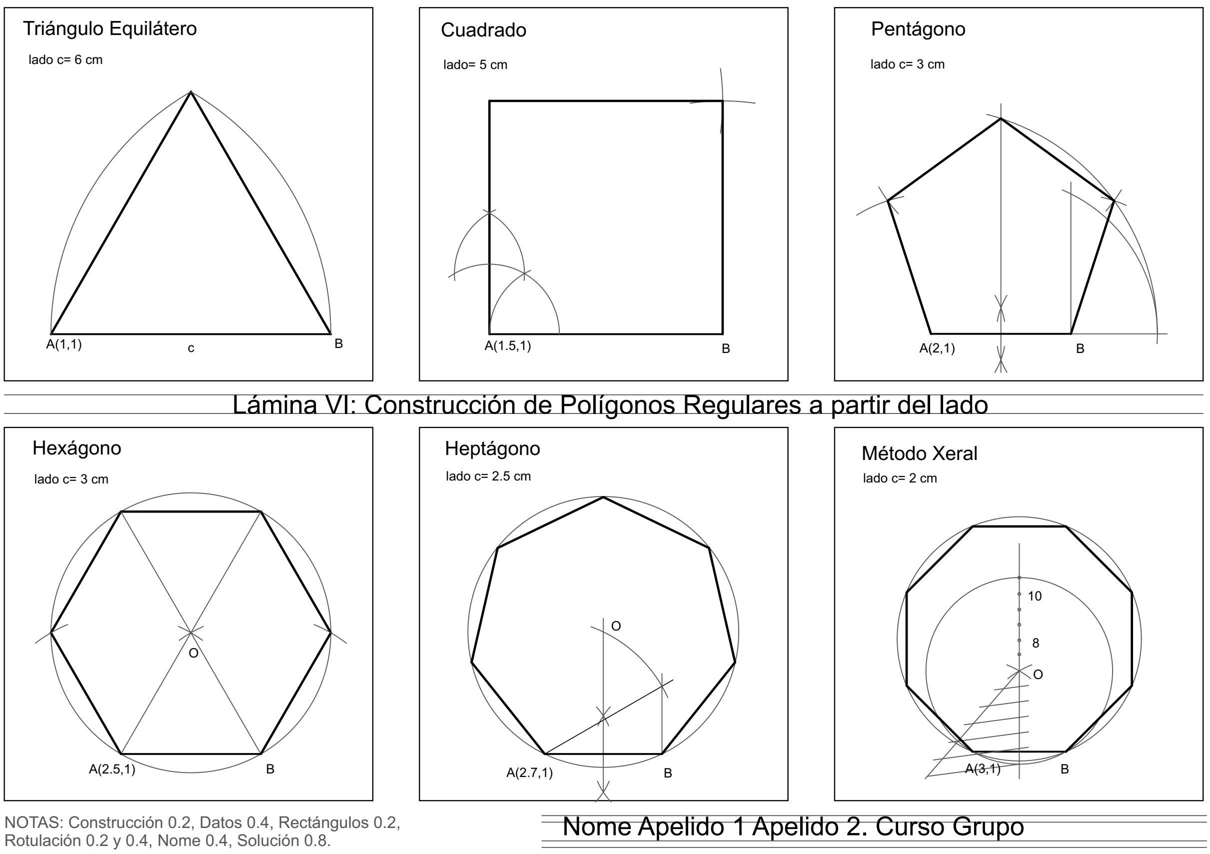
En esta lámina, le quitamos $2\,cm$ *al margen y luego dividimos según las cotas: horizontalmente,* $7'9, 1, 7'9, 1, 7'9$ *y verticalmente,* $8, 1, 8$

1. **Triángulo Equilátero**. Lado $\overline{AB} = 6\,cm$. Las coordenadas del vértice A son $(1, 1)$.

   Con centro en A y radio igual al lado $\overline{AB}$ trazamos un arco que nos cortará a otro con el mismo radio y centro en B.

2. **Cuadrado**. Lado $\overline{AB} = 5\,cm$. Las coordenadas del vértice A son (1.5, 1).

   Levantamos una perpendicular con el compás por A y llevamos la medida del lado $\overline{AB}$, obteniendo el vértice D. Por último trazamos dos arcos con centro en D y en B y radio igual al lado, que se cortaran en el vértice C.



3. **Pentágono**. Lado $\overline{AB} = 3\,cm$. Las coordenadas del vértice A son $(2, 1)$.

   Se traza la mediatriz m del segmento $\overline{AB}$, cuyo punto medio es M, y se dibuja la perpendicular s al lado $\overline{AB}$ por el extremo A, llevando a continuación la medida del lado $\overline{AB}$, punto P. A continuación trazamos un arco con centro en M y radio $\overline{MP}$, que corta a la prolongación del segmento $\overline{AB}$ en el punto N. Trazamos un tercer arco con centro en B y radio $\overline{BN}$, hasta cortar al primer arco en E y a la mediatriz en D, vértices ambos del pentágono. Por último con centros en B y D, y radio $\overline{AB}$ se trazan dos arcos que se cortarán en C.

4. **Hexágono**. Lado $\overline{AB} = 3\,cm$. Las coordenadas del vértice A son (2.5, 1).

   Dibujamos un triángulo equilátero a partir del lado $\overline{AB}$, obteniendo el vértice O. Con centro en O y radio $\overline{AB}$, trazamos una circunferencia que contendrá seis veces dicho lado.

5. **Heptágono**. Lado $\overline{AB} = 2.5\,cm$. Las coordenadas del vértice A son (2.7, 1).

   Trazamos la mediatriz m del segmento $\overline{AB}$ y la perpendicular s al lado $\overline{AB}$ por B. Con vértice en A se construye un ángulo de 30º, cuyo lado corta en R a la perpendicular s. Desde B, y con radio $\overline{BR}$ se describe un arco que corta a la mediatriz m en O, centro de la circunferencia que contiene siete veces el lado.

6. **Método General**. Lado $\overline{AB} = 2\,cm$. Las coordenadas del vértice A son (3, 1).

   Dibujamos un triángulo equilátero a partir del lado $\overline{AB}$, obteniendo el vértice O. Con centro en O y radio $\overline{AB}$, trazamos una circunferencia que contendrá seis veces dicho lado. Trazamos la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ que cortará a la circunferencia anterior en el punto C. Dividimos el radio $\overline{OC}$ en seis partes iguales, siendo los puntos $7, 8, \cdots$ y 12 los centros de las circunferencias que contienen a los polígonos de $7, 8, \cdots$ y 12 lados respectivamente.

   Para la lámina dibujaremos un Octógono.

3.5.2. Lámina 5: Construcción de Polígonos Regulares a partir de la circunferencia circunscrita

A esta lámina, como en la anterior le quitamos $2\,cm$ *al margen y luego dividimos según las cotas: horizontalmente,* $7'9, 1, 7'9, 1, 7'9$ *y verticalmente,* $8, 1, 8$. *Todas las circunferencias se dibujaran con radio* $3\,cm$*, menos la última que será de* $2,5\,cm$.

1. **Triángulo Equilátero**. Radio $\overline{AB} = 3\,cm$. Las coordenadas del centro O son $(4, 4)$.

   Dibujamos un diámetro que corta a la circunferencia en los puntos A y B. Con centro en B y radio $\overline{BO}$ trazamos un arco que corta a la circunferencia en los puntos M y N. Unimos los puntos del $\triangle\, A, M$ y N.

2. **Cuadrado**. Radio $\overline{AB} = 3\,cm$. Las coordenadas del centro O son $(4, 4)$.

   Trazamos el diámetro $\overline{AC}$ y el diámetro $\overline{DB}$ que se cortan perpendicularmente. Unimos los puntos A, B, C y D.

3. **Pentágono**. Radio $\overline{AB} = 3\,cm$. Las coordenadas del centro O son $(4, 4)$.

   Trazamos el diámetro $\overline{AC}$ y el diámetro $\overline{DB}$ que se cortan perpendicularmente. Dibujamos la mediatriz m del segmento $\overline{DB}$ obteniendo el punto M. Con centro en M y radio $\overline{MA}$ trazamos un arco que corta al diámetro $\overline{CD}$ en el punto S. El segmento $\overline{AS} = \frac{1}{5}$ de la longitud de la circunferencia.

4. **Hexágono**. Radio $\overline{AB} = 3\,cm$. Las coordenadas del centro O son $(4, 4)$.

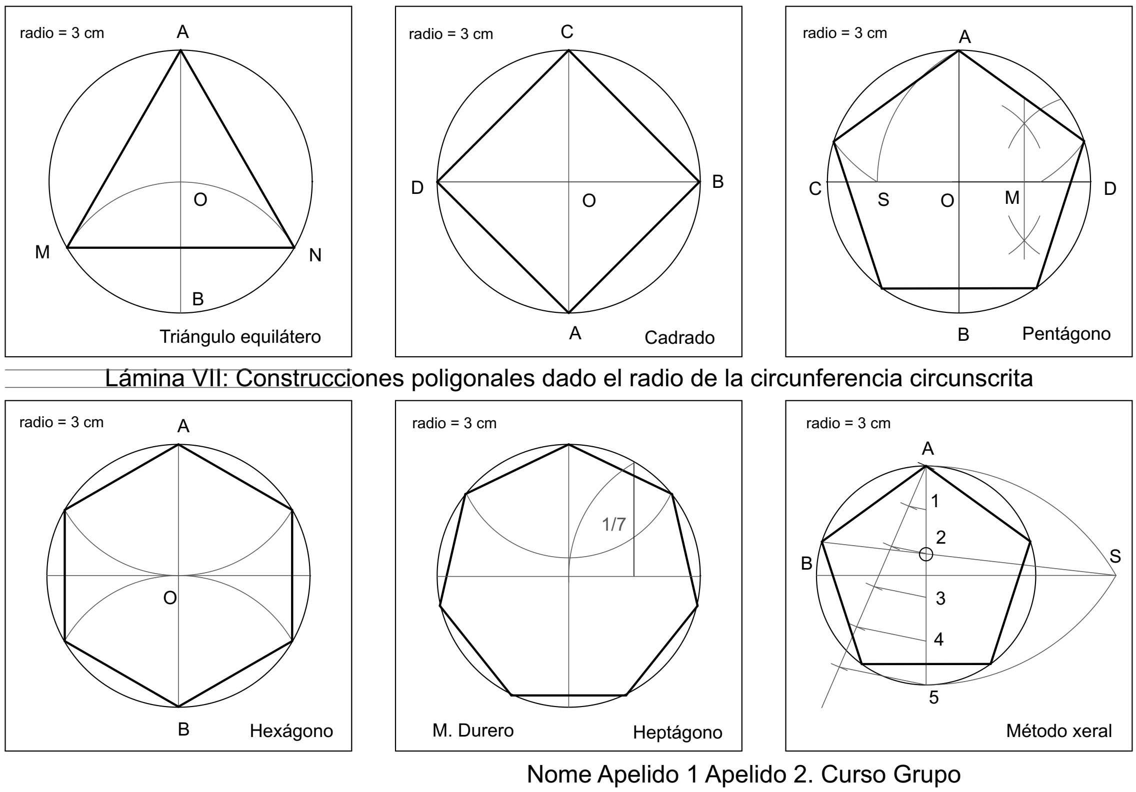
   Como sabemos que el radio es aproximadamente $r = \frac{1}{6}$ de la longitud de la circunferencia, sólo tenemos que llevar este, a partir de cualquier punto de la circunferencia. Por sentido estético y como en el resto de la lámina, los polígonos están orientados perpendicularmente al margen horizontal, hacemos lo mismo trazando el diámetro $\overline{AB}$

5. **Heptágono**. Método de Alberto Durero. Radio $\overline{AB} = 3\,cm$. Las coordenadas del centro O son $(4,4)$.

   Se traza un diámetro cualquiera $\overline{AB}$ y a continuación se dibuja la mediatriz del radio $\overline{OB}$, que cortará a la circunferencia en los puntos C y D, siendo M el punto medio de $\overline{OB}$. El segmento $\overline{CM} = \dfrac{1}{7}$ de la longitud de la circunferencia.

6. **Método General**. Radio $\overline{AB} = 2,5\,cm$. Las coordenadas del centro O son $(3,4)$.

   Trazamos el diámetro $\overline{AB}$ y lo dividimos – Teorema de Thales – en tantas partes como queramos dividir la circunferencia – en este caso en ocho –. Con centros en A y B y radio el diámetro de la circunferencia trazamos dos arcos que se cortan en C. Unimos el punto C con la segunda división del diámetro y prolongamos hasta que corte en D a la circunferencia. El segmento $\overline{AD} \simeq \dfrac{1}{8}$ de la longitud de la circunferencia.



Tema 5

Tangencias

Podríamos definir la tangente como la recta que sólo tiene un punto e común con una curva, es decir la toca en un solo punto que se llama punto de tangencia.[1]

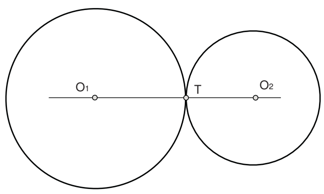
5.0.1. Propiedades

a) Si dos circunferencias son tangentes, el punto de tangencia se encuentra en la recta que une los centros.

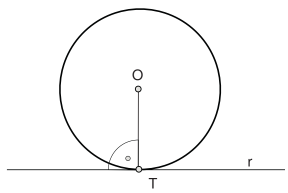
b) Si una recta es tangente a una circunferencia, el radio en el punto de tangencia es perpendicular a la tangente.

c) El centro de cualquier circunferencia que pase por dos puntos de ella, está en la mediatriz del segmento.

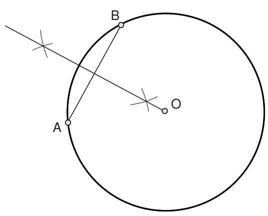
d) El centro de cualquier circunferencia tangente a dos rectas se encuentra en la bisectriz del ángulo que forman.



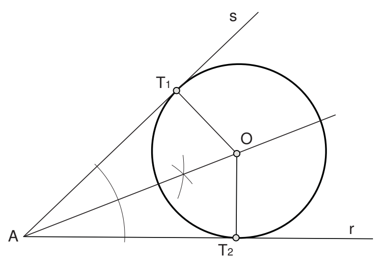
(a)



(b)



(c)



(d)

[1]Otra definición podría ser, la de posición límite de una recta secante.

5.1 Lámina 6

En la lámina modelo que se adjunta, la primera cara está dedicada a facilitar de una manera gráfica los datos; la segunda cara indica como se debe entregar.

Tangente por un punto P de la circunferencia

1. Una vez situados los datos, $O(5, 4'5)$ y $P(7'5, 2'8)$ unimos el centro de la circunferencia O con el punto dado P.

2. Trazamos la perpendicular al radio $\overline{OP}$ –*en esta ocasión lo haremos con el compás, para recordar construcciones anteriores*–

Tangentes a una circunferencia desde un punto exterior

1. Situamos los datos, circunferencia, $O(5'1, 4)$ y $r = 3\,cm$ y el punto $P(10, 5'5)$

2. Trazamos el *arco capaz de 90º* para $\overline{OP}$. Para lo cual trazamos la mediatriz de $\overline{OP}$ y dibujamos la circunferencia con centro en M, que cortara a la circunferencia dada en los puntos de tangencia T_1 y T_2; para comprobar que T_1 y T_2 son los puntos de tangencia, solo tenemos que unirlos con el centro y ver que estos radios son perpendiculares a las tangentes.

Tangentes exteriores comunes a dos circunferencias

1. Situamos los datos, circunferencia, $O_1(3, 4)$ y $r = 1'5\,cm$ y circunferencia, $O_2(8'5, 4)$ y $r = 3\,cm$. Lo que hacemos a continuación es resolver el caso por reducción[2] les restamos a las dos circunferencias el radio $r_1 = 1'5$, con lo cual la primera circunferencia se convierte en un punto que coincide con su centro y a partir de O_2, tenemos una circunferencia de radio $3 - 1'5\,cm$. Resolvemos este caso de tangencia como en el caso anterior, obteniendo los puntos de tangencia 1 y 2.

2. Pero ahora tenemos que llevar los puntos de tangencia sobre las circunferencias dadas, para ello unimos O_2 con 1 y prolongamos hasta que la linea corte a la circunferencia dada en T_1. De la misma forma unimos O_2 con 2 y prolongamos hasta que la línea corte a la circunferencia dada en T_2.

Tangentes interiores comunes a dos circunferencias

1. Situamos los datos, circunferencia, $O_1(3'5, 4)$ y $r = 2'5\,cm$ y circunferencia, $O_2(9, 4)$ y $r = 1'5\,cm$. En esta ocasión lo que vamos a hacer es sumar los radios y procederemos de forma análoga al caso anterior:

   a) Tangentes de O_2 a la circunferencia suma $2'5+1'5$, obteniendo los puntos de tangencia 1 y 2.

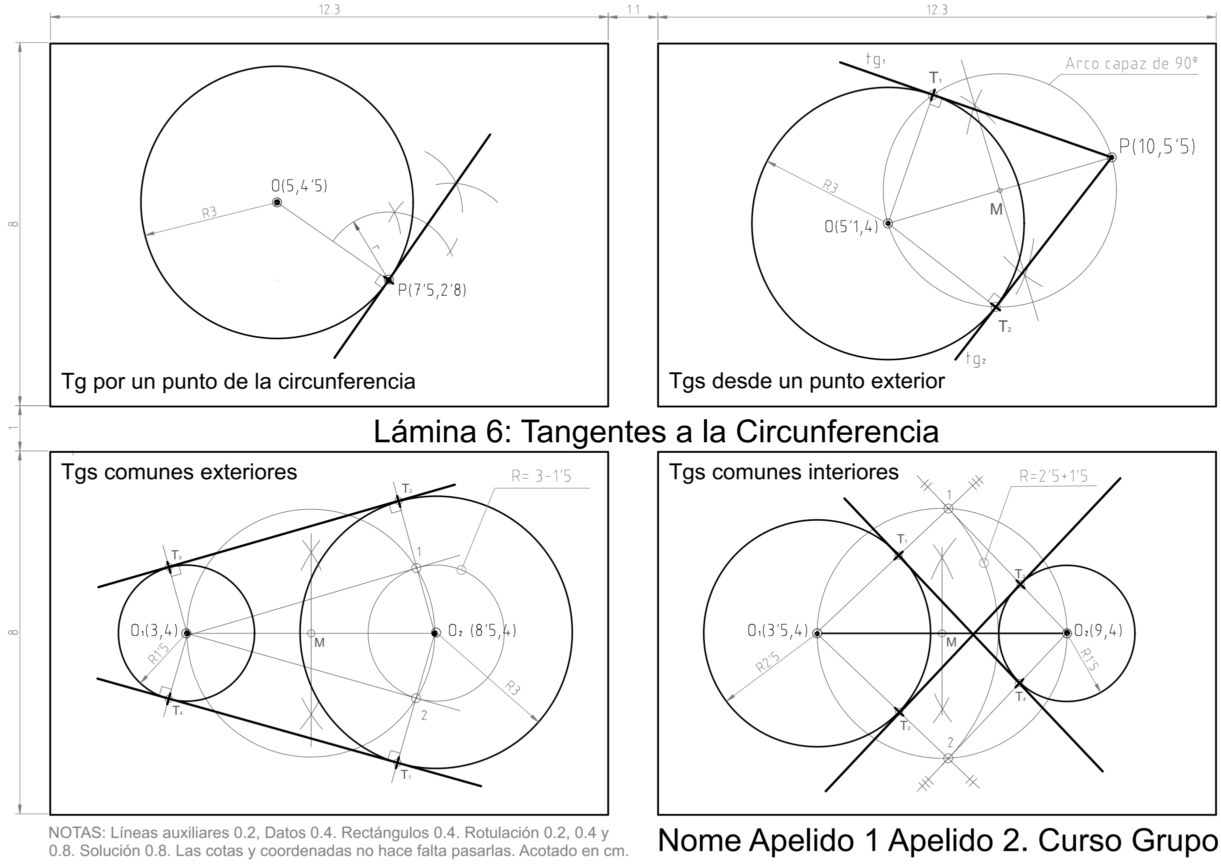
   b) Unimos los puntos anteriores con O_1 obteniendo los puntos de tangencia T_1 y T_2 sobre la circunferencia dada.

[2] En este método de resolución de problemas, se sustituye un problema por otro, éste por otro y asís sucesivamente hasta llegar a un problema conocido.

2. Para obtener los puntos de tangencia T_3 y T_4:

   a) T_3, trazamos la paralela a $\overline{O_1T_2}$ por O_2.

   b) T_4, trazamos la paralela a $\overline{O_1T_1}$ por O_2.



Tema 6

Semejanza y Escalas

Dos figuras son semejantes cuando tienen sus ángulos iguales y sus lados proporcionales. Al cociente determinado por dos lados homólogos[1] *se le denomina* ***razón de semejanza****.*

6.1 Escalas

Las escalas pueden considerarse como la razón de la semejanza entre dos figuras, la del dibujo y la real. Esta relación, se representa por un cociente donde el numerador representa la medida del dibujo y el denominador la medida de la realidad.

$$Escala = \frac{Dibujo}{Realidad}$$

6.1.1. Clases de escalas

– Reducción: reducen el objeto real al dibujarlo –el numerador es menor que el denominador–

– Ampliación: aumentan el objeto real –el numerador es mayor que el denominador–

– Tamaño natural: dibujo y objeto tienen las mismas medidas –se representa por $E = 1 : 1$

Ejemplo práctico

Imaginemos que queremos dibujar en una lámina A_4 –210 x 297 mm– esta clase en la que estamos ahora, con unas medidas de $5'8$ x $9\,m$.

Elección de la escala:

1. Pasamos todo a milímetros. Clase: 5800 x 9000 mm
2. Establecemos una relación entre lados homólogos: $\dfrac{210}{5800}$ y $\dfrac{297}{9000}$
3. Reducimos el numerador a la unidad: $\dfrac{1}{27'61}$ y $\dfrac{1}{30'30}$

[1] Se llaman elementos correspondientes u homólogos a los elementos que ocupan la misma posición en los dos polígonos.

4. Elegimos la escala de mayor reducción, puesto que es la que nos permite dibujar todas las medidas: $\frac{1}{30'30}$, pero como tenemos que dejar algo de margen en el dibujo para que este respire, elegimos la *escala* $\frac{1}{50}$

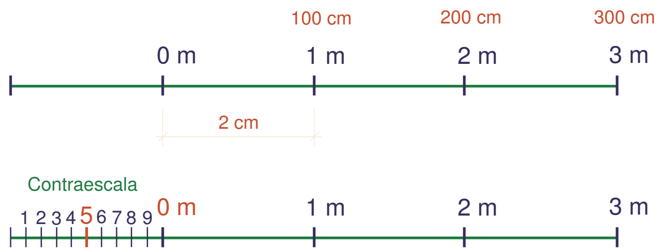
Construcción de la escala:

1. En primer lugar hallamos el cociente $\frac{1}{50} = 0'02$.

   Esto quiere decir que $0'02$ *la unidad que sea* en el dibujo, equivale a 1 *la unidad que sea* en la realidad.

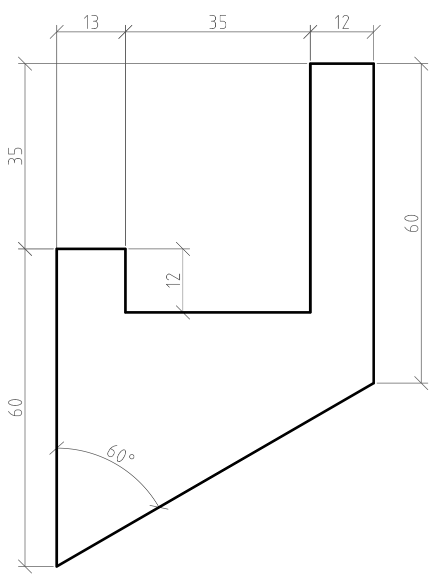
2. En segundo lugar eliminamos la parte decimal, para no operar con centésimas, multiplicamos ambas expresiones por 100 y ahora tenemos: 2 *la unidad que sea* en el dibujo, equivale a 100 *la unidad que sea* en la realidad.

3. En tercer lugar elegimos la unidad, podemos elegir la que queramos, pero a efectos prácticos elegimos el *centímetro*. Y tenemos que $2\,cm$ en el dibujo son $100\,cm$ en la realidad ó lo que es lo mismo, $1\,m$.



6.1.2. Ejercicio resuelto:

1. Dado el siguiente croquis acotado en metros:



   a) Razona una escala adecuada para dibujar la figura en un papel de tamaño A_4

   b) Dibuja la escala

Hay que hacer notar que los ángulos se conservan, por lo tanto el ángulo de 60º que aparece en el croquis, se conservará a cualquier escala que lo dibujemos.

Solución:

1. Si sumamos las cotas tenemos un rectángulo de 95 x 60 m, que tenemos que dibujarlo en un formato A_4 que mide 29′7 x 21 cm al cual vamos a restarle un margen de 2 cm con lo que nos quedará un espacio de trabajo de 17 x 25′7 cm; lógicamente necesitamos una escala, y esta la hallamos estableciendo una proporción entre el croquis y el formato del papel, ambas en la misma unidad, de la siguiente manera:

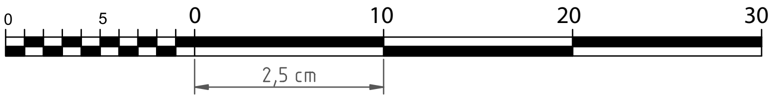
$$E_1 = \frac{17}{6000} \qquad E_2 = \frac{25'7}{9500}$$

Dividiendo la primera escala por 17 y la segunda por 25′7, tenemos:

$$E_1 = \frac{1}{352'9} \qquad E_2 = \frac{1}{369'6}$$

De las dos escalas elegimos la que tiene mayor reducción: $E_2 = 1 : 369'6$. Ahora redondeamos, teniendo en cuenta los márgenes que tenemos que dejar alrededor del dibujo y tenemos que la escala puede ser $E_D = 1 : 400$.

2. En primer lugar hallamos el cociente $E_D = \frac{1}{400} = 0'0025$. Para quitar la parte decimal multiplicamos por 1000 y tenemos que, eligiendo como unidad el cm. Cada 2′5 cm en el dibujo son 1000 cm ó 10 m en la realidad.



3. Como vimos en el primer apartado, sumando las cotas tenemos un rectángulo de 95 x 60 m, ahora sabemos que en la escala que hemos elegido 10 m vienen representados por 2′5 cm, luego 1 m vendrá representado por 0′25 cm con lo que tendremos un rectángulo que medirá 23′7 x 15 cm. Como tenemos que centrarlo en otro rectángulo que mide 25′7 x 17 cm. Tendremos que restar los lados semejantes y dividir por dos.

$$25'7 - 23'75 = 1'95/2 \simeq 1\,cm \tag{6.1}$$

$$17 - 15 = 2/2 = 1\,cm \tag{6.2}$$

Los margenes los empezamos a contar siempre desde el origen de coordenadas (vértice inferior izquierdo). Llevamos $O(1,1)$, 1 cm para las X y 1 cm para las Y.

6.2 Ejercicios

1. A qué escala estará dibujado el plano del Instituto, si sabemos que la puerta principal de entrada tiene de ancho 3′40 m, y en el plano hemos medido con la regla 68 mm.

   Solución: Es 1:50

2. Calcula la escala del plano sabiendo que el largo real de una mesa es de 1′5 m y que su representación en el dibujo es de 15 cm.

   Solución: Es 1:10

3. Calcula la altura real de un edificio de cinco plantas sabiendo que la escala del plano es $1:500$ y que su representación en el dibujo es de $3\,cm$.

   Solución: 15 m

4. La altura de una farola es de $8\,m$, si quiero dibujarla a escala $1:100$, ¿ cuántos centímetros tendré que trazar en el plano?.

   Solución: 8 cm

5. El ancho total real de una autovía es de $24\,m$. Si el plano en el que se encuentra dibujada está a escala $1:200$, ¿ cuántos milímetros tendrá en el dibujo?.

   Solución: 120 mm

6. Una pieza que realmente tiene una longitud de $100\,cm$ está representada en un dibujo por un segmento de $4\,cm$. ¿A qué escala está dibujado el plano?

   Solución: E 1:25

7. En un plano de carreteras realizado a escala $1:50.000$, la distancia entre dos ciudades, medida con una regla graduada es de $45\,mm$. ¿Cuál será la distancia en la realidad? Solución: 2’25 Km