VIBRACIÓNS E ONDAS

PROBLEMAS

1. Un sistema cun resorte estirado 0,03 m sóltase en t=0 deixándoo oscilar libremente, co resultado dunha oscilación cada 0,2 s. Calcula:

a) A velocidade do extremo libre ó cabo de 19 s

b) A aceleración do extremo libre ó cabo de 19 s (Considérase que o amortecemento é desprezable)

c) Representa graficamente a variación da velocidade e aceleración co tempo.

a) Ao ceibar o resorte describe un MHS, polo tanto correspóndelle unha ecuación para a elongación:

$$x = A \cdot sen(\omega t + \theta_0)$$

No instante inicial, a elongación é máxima e $A \cdot sen(\omega t + \theta_0) = 1$, e como t=0⇒$\theta_0$=(π/2)rad, quedando a ecuación : $x = A \cdot sen\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ e do mesmo xeito: $v = A \cdot \omega \cdot sen(\omega t + \frac{\pi}{2})$

$\mathrm{A=0,03\ m\ ;\ \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,2} = 10\pi\ rad \cdot s^{-1}}$

substituíndo os datos anteriores e o tempo transcorrido:

$$v = A \cdot \omega \cdot cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}03 \cdot 10\pi \cdot cos\left(10\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}03 \cdot 10\pi \cdot cos\left(10\pi \cdot 19 + \frac{\pi}{2}\right) = 0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} =$$

b) Os mesmos razoamentos son aplicables neste caso, quedando:

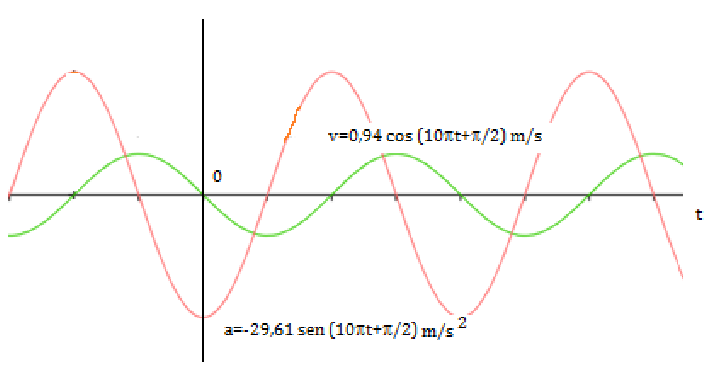
$$a = -A\omega^2 sen\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -0{,}03 \cdot (10\pi)^2 \cdot sen\left(10\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) = -0{,}03 \cdot (10\pi)^2 \cdot sen\left(10\pi \cdot 19 + \frac{\pi}{2}\right)$$

a=- 29,61 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

A velocidade é mínima e a aceleración máxima (pero negativa), atopándonos na situación inicial, xa que transcorreu un número enteiro de períodos.

NOTA.- Por erros de redondeo na calculadora ou ordenador, pode darse o caso de que o resultado da velocidade non resulte exactamente 0.

c) As representacións gráficas da velocidade e da aceleración en función do tempo serían como as seguintes:



2. Un corpo de 50 g de masa, sometido a un movemento harmónico simple, realiza 10 oscilacións por segundo. Calcula:

a) A aceleración no centro de oscilación.

b) A aceleración nun dos seus extremos, sabendo que a amplitude do movemento é de 9 cm.

c) A enerxía cinética no centro de oscilación.

a) A ecuación do movemento harmónico simple é: $x = A\ sen(\omega t+\theta_0)$

onde A é a amplitude do movemento, θ_0 un desfasamento constante ó longo do tempo, e ω a pulsación.

Sabemos que a velocidade, no movemento harmónico simple, é a derivada da elongación con respecto ó tempo: $v = A\cdot\omega\cdot cos(\omega t+\theta_0)$

E que a aceleración é a derivada da velocidade con respecto ó tempo: $a = -A\ \omega^2 sen\ (\omega t+\theta_0)$

No centro de oscilación, a elongación é cero, logo : $0 = A\cdot sen(\omega t+\theta_0)$

É dicir: $sen(\omega t+\theta_0) = 0$; Logo a aceleración será: $a_0 = 0$

b) Nos extremos da oscilación, a elongación é máxima, $x=\pm A$.

É dicir: $sen(\omega t+\theta_0) = \pm 1$

Logo o módulo da aceleración será $|a| = |A\ \omega^2|$

A = 9 cm = 0,09 m ; Sabemos, polos datos do problema que $f = 10$ osc·s^{-1} = 10 Hz ;

$\omega = 2\pi/T = 2\pi f = 62{,}83$ rad·s^{-1}

substituíndo, obtemos: $|a| = 0'09\cdot 3947{,}61 = 3{,}5\cdot 10^2$ m·s^{-2}

c) Para o cálculo da enerxía cinética no centro de oscilación temos en conta que o módulo da velocidade nese punto é máximo: $|v_{max}| = |A\cdot\omega| = 0{,}09\cdot 62{,}83 = 5{,}65$ m·s^{-1}

$E_{cinética} = \frac{m\cdot v^2}{2} = \frac{0{,}050\cdot 5{,}65^2}{2} = 0{,}80$ J

3. Un corpo de 10 g de masa desprázase cun movemento harmónico simple de 80 Hz de frecuencia e de 1 m de amplitude. Acha:

a) A enerxía potencial cando a elongación é igual a 70 cm.

b) O módulo da velocidade cando se atopa nesa posición.

c) O módulo da aceleración nesa posición.

a) A enerxía potencial dun corpo sometido a movemento harmónico simple é:

$E_p = \frac{k\cdot x^2}{2} = \frac{m\cdot\omega^2\cdot x^2}{2}$

$m = 10$ g = $0{,}010$ kg, $x = 70$ cm = $0{,}7$ m ; $f = 80$ Hz ;

$\omega = 2\pi/T = 2\pi\cdot f = 2\cdot 3'14\cdot 80 = 502{,}65$ rad.s^{-1}

$E_p = \frac{m\cdot\omega^2\cdot x^2}{2} = \frac{0{,}01\cdot 502{,}65^2\cdot 0{,}7^2}{2} = 6{,}2\cdot 10^2$ J

b) Como sabemos, a enerxía mecánica é a suma da enerxía cinética e da enerxía potencial e, como a forza causante do movemento vibratorio harmónico é unha forza conservativa, permanecerá constante ó longo de todo o percorrido, de xeito que na posición de equilibrio atoparíase totalmente en forma de enerxía cinética e nos extremos en forma de enerxía potencial.

Polo tanto $E_{mecánica} = E_{Pmáx} = ½\ m·\omega^2·A^2$

Substituíndo $E_m = ½\ 0{,}01·502{,}65^2·1^2 = 1263{,}29$ J

Calculamos agora a enerxía cinética nese punto como diferenza entre a enerxía mecánica e a enerxía potencial nese punto

$E_c = E_m - E_P = ½\ m·v^2$

$E_c = 1263{,}29 – 619{,}02 = 644{,}27\ J = ½\ 0{,}01·v^2$

de onde resolvendo obtemos a velocidade

$v = \sqrt{\frac{2·644{,}27}{0{,}01}} = 3{,}6·10^2$ m·s^{-1}

c) O módulo da aceleración podemos calculalo a partir de:

$$|a| = |\omega^2 \cdot x| = 502{,}65\ ^2 \cdot 0{,}7 = 1{,}77 \cdot 10^5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

4. Un resorte mide 22,86 cm cando se lle colga unha masa de 70 g e 19,92 cm cando se lle colga unha masa de 40 g. Acha:

a) A constante do resorte.

b) A frecuencia das oscilacións se se lle colga unha masa de 80 g

c) A lonxitude do resorte ó colgarlle unha masa de 100 g.

Dato: g= 9,8 ms^{-2}.

a) Pola lei de Hooke sabemos que o alongamento do resorte é directamente proporcional á forza aplicada

$F = -k·x$; sendo $x = (l - l_0)$ o alongamento e k a constante do resorte

$$F_1 = kx_1; 0{,}07 \cdot 9{,}8 = k \cdot (0{,}2286 - l_0)$$
$$F_2 = kx_1; 0{,}04 \cdot 9{,}8 = k \cdot (0{,}1992 - l_0)$$

Resolvendo , obtemos: $l_0 = 0{,}16$ m; $k = 10$ N·m^{-1}

b) A forza recuperadora do resorte é a causante da oscilación e polo tanto temos

$$kx = m\omega^2 x \Rightarrow k = m\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Ó pendurarlle a masa de 80 g : $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10}{0{,}08}} = 11{,}18\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$

Como f = ω/2π = 1,78 Hz

c) A elongación producida por unha masa de 100 g será:

$$x = \frac{m \cdot g}{k} = \frac{0,1 \cdot 9,8}{10} = 0,098 \text{ m} = 9,8 \text{ cm}$$

Polo que a lonxitude do resorte será: $l_0+x= 0,16+0,098= 0,258$ m=*25,8* cm

5. Un péndulo eléctrico está formado por unha esfera metálica de 1 g colgada dun fío moi fino de 1'5 m. Faise oscilar nunha rexión na que existe un campo eléctrico uniforme vertical e cárgase a esfera con +1,3. 10^{-8} C. Cando o campo é vertical de abaixo arriba, a esfera efectúa 100 oscilacións en 314 s e se o campo está dirixido de arriba abaixo, tarda 207 s en dar 100 oscilacións. Calcular:

a) Intensidade do campo eléctrico.

b) Valor de "g" no lugar da experiencia.

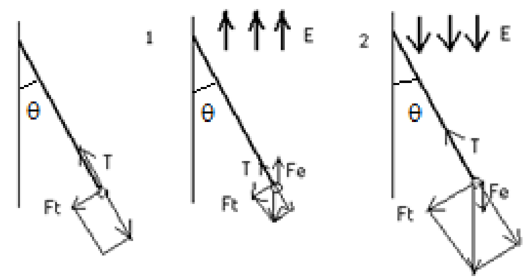
c) O período do péndulo se a experiencia se fai na Lúa, en ausencia de campo electrostático.

(**Dato**: g_L= 1,63 ms^{-2})

a) Aplicando consideracións derivadas da dinámica do péndulo simple poderemos deducír a dependencia do período do mesmo coa F_t responsable de dito movemento harmónico, que debe cumprír as condicions de forza elástica derivadas da lei de Hooke.

Suporemos as habituais consideracións de oscilacións pequenas para chegar ó cumprimento de M.H.S.(senθ ≅ θ= x/l)

$$F_t = -(P - F_e)\text{sen}\phi = -(P - F_e)\phi = -(P - F_e)\frac{x}{l}$$



Para o caso 1:

$$F_t = -kx; k = \frac{P - F_e}{l}$$

$$k = m\omega^2 = \frac{P - F_e}{l}$$

$$m\left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 = \frac{P - F_e}{l} \Rightarrow$$

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{P - F_e}}$$

Para o caso 2 resulta:

$$F_t = -kx; k = \frac{P + F_e}{l}$$

$$k = m\omega^2 = \frac{P + F_e}{l}$$

$$m\left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2 = \frac{P + F_e}{l} \Rightarrow T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{P + F_e}}$$

Tendo en conta que F_e= E·q , resulta un sistema de 2 ecuacións con 2 incógnitas: g e E.

$$T_1 = \frac{314\text{ s}}{100\text{ osc}} = 3{,}14\text{ s}\;;\; T_1 = \frac{207\text{ s}}{100\text{ osc}} = 2{,}07\text{ s}$$

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{P-F_e}} = 2\pi\sqrt{\frac{10^{-3}\cdot 1{,}5}{10^{-3}\cdot g - E\cdot 1{,}3\cdot 10^{-8}}}$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{P+F_e}} = 2\pi\sqrt{\frac{10^{-3}\cdot 1{,}5}{10^{-3}\cdot g + E\cdot 1{,}3\cdot 10^{-8}}}$$

$$E = 3\cdot 10^5\, N/C$$

$$g = 9{,}9\text{ m·s}^{-2}$$

b) Por resolución derivada do apartado anterior obtense *g= 9,9* m·s^{-2}.

c) Se o experimento se fai na Lúa en ausencia de campo eléctrico, calculamos o período, tendo en conta que g_L=1,63 m·s^{-2})

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_L}} = 2\pi\sqrt{\frac{1{,}5}{1{,}63}} = 6{,}02\text{ s}$$

6. Un punto material de 20 g de masa oscila cun M.H.S de amplitude 2 cm e frecuencia 10 osc/s, coincidindo o inicio dos tempos co punto onde a velocidade é nula. Calcular:

a) A velocidade e aceleración máximas.
b) A velocidade e aceleración no instante t = 1/120 s
c) A enerxía mecánica nese instante.

a) Por iniciarse a contar o tempo no punto onde a velocidade é nula, no punto no que $x=\pm A$.

A ecuación do movemento será: $x = A\cdot sen(\omega t\pm\theta_0)= A\cdot sen(\omega t\pm\pi/2)= \pm A\cdot cos\omega\, t$

A ecuación da velocidade será: $v = \pm A\ \omega\, sen\ (\omega t)$ e a velocidade será máxima cando o valor absoluto de $cos\ (\omega t) = 1$, é dicir cando pasa pola orixe.

O modulo da velocidade máxima será $v_{máx} = |\pm A\cdot\omega|$

Como f = ω /2π ⟹ ω = 2π·f = 20π rad·s^{-1}

Entón substitúese e acadamos o módulo da velocidade máxima: $v_{máx} = 1{,}26$ m·s^{-1};

Ó derivar a velocidade obtemos a aceleración $a = \pm A\omega^2\cdot cos\ (\omega t)$ e terá o seu máximo valor cando $cos\ (\omega t) = 1$; é dicir, ó pasar polos extremos, sendo o seu valor en módulo $a_{máx} = |\pm A\cdot\omega^2|$

$a_{máx} = 78{,}96$ m·s^{-2}

b) Unha vez vistas as ecuacións en función do tempo, só queda substituír. No instante t = 1/120 s serán

$v\ =\ 0'02\cdot 20\pi\cdot sen\ (20\pi\cdot\frac{1}{120}) = 0{,}63$ m·s^{-1}

$a\ =\ 0'02\cdot(20\pi)^2\cdot cos(20\pi\cdot\frac{1}{120})$ a = $68{,}4$ m·s^{-2}

c) A enerxía mecánica será: $E\ =\ ½\ kA^2\ =\ \frac{m\cdot\omega^2\cdot A^2}{2} = \frac{0{,}020\cdot(20\pi)^2\cdot 0{,}02^2}{2} = 1{,}58\cdot 10^{-2}$ J

7. Un péndulo está constituído por unha pequena esfera, de dimensións que consideramos desprezables, de masa 200 g, suspendida dun fío inextensible, e sen masa apreciable, de 2 m de longo. Calcular:

a) O período para pequenas amplitudes.

b) Supoñamos que no momento de máxima elongación a esfera elévase 15 cm por encima do plano horizontal que pasa pola posición de equilibrio. Calcula a velocidade o pasar pola vertical.

c) Xustifica e representa graficamente as variacións da enerxía cinética e potencial nun movemento harmónico simple. Pode considerarse un m.h.s. o que describe o péndulo nas condicións do apartado b)?.

Dato: g= 9,8 m·s^{-2}.

a) Ó período do péndulo simple, supoñendo un movemento harmónico simple, é

$T = 2\pi(l/g)^{1/2}$; $T = 2\pi\cdot(2/9,8)^{1/2} = 2,84$ s

b) Ó desprezar as perdas de enerxía por rozamento, aplícase o principio de conservación da enerxía mecánica de xeito que no punto máis alto estará toda en forma de E_P e no máis baixo en forma de E_C.

Usando a aproximación para pequeñas alturas, no punto máis alto: $E_P = mgh = 0,2\cdot 9,8\cdot 0,15 = 0,294$ J

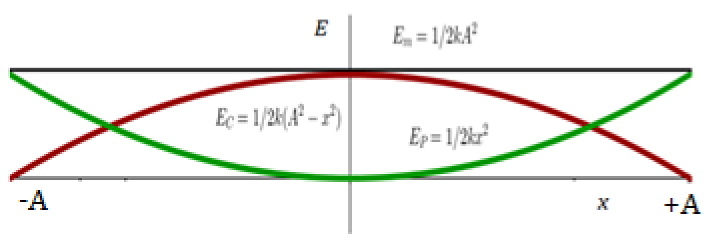
No punto máis baixo: $E_c = 0,294$ J

$½\, mv^2 = mgh \Longrightarrow v = (2gh)^{1/2}$; $v = 1,71$ m·s^{-1}

c) Nun M.H.S. a representación da enerxía cinética: $E_c = ½mv^2 = ½m\omega^2(A^2-x^2) = ½\; k(A^2-x^2)$ presenta un máximo cando $x=0$ e un mínimo cando x=±A, que coinciden, respectivamente, cos puntos de máxima velocidade (x=0) e velocidade nula ($x=\pm A$).

A enerxía potencial: $E_P=½kx^2$ será máxima cando $x=\pm A$, nos puntos de máxima elongación, e será nula cando $x=0$, no punto central de equilibrio.

A constante k sería: $k=m\cdot\omega^2=m\cdot 4\pi^2/T^2=0,98$ N·m^{-1}.



Neste caso (supoñendo que se trata dun M.H.S), a amplitude sería: $A= 0,76$ m . A amplitude angular é de 22º, o que , estritamente, non cumpre o requisito do M.H.S que debe cumprir a lei de Hooke :

$F=-kx \rightarrow sen\,\theta=\theta$(rad)

8. Unha masa de 2 kg suxeita a un resorte de constante recuperadora k= 5. 10^3 N/m sepárase 10 cm da posición de equilibrio e déixase en liberdade. Calcular:

a) A ecuación do movemento.

b) A aceleración ós 0,1 s de iniciado o movemento.

c) A enerxía potencial ós 0,1 s de iniciado o movemento.

a) A ecuación xeral do movemento harmónico simple é: $x = A sen\ (\omega t + \theta_0)$

Como nos din que o movemento comenza dende unha posición afastada 10 cm da posición de equilibrio, quere dicir que $x_0 = A = 0,1$, e como $t_0 = 0$, ó substituír, $\theta_0 = \pi/2$ rad

Por outra banda como nos dan a constante do resorte e esta é $k = m\cdot\omega^2$ ó substituír obtemos

$\omega = 50$ rad·s^{-1} .

A ecuación queda $x= 0,1\cdot sen(50t+\pi/2)$ m

b) Por derivación obtemos a ecuación para a aceleración:

$v=dx/dt= 0'1\cdot 50\cdot cos(50t+\pi/2)$

$a=dv/dt=-0,1\cdot 50^2\cdot sen(50t+\pi/2)$

Sustituíndo para $t=0,1$s obtemos $a= -70,9$ m·s^{-2}

Tamén poderíamos aplicar: $a=-\omega^2 x=-70,9$ m·s^{-2}

c) $E_P = ½\ kx^2$

Substituíndo t polo seu valor de 0,1 s na ecuación do movemento obtemos $x = 0,028$ m,

e logo $E_p = 2,1$ J

9. Un punto material de 500 g describe un MHS de 10 cm de amplitude realizando dúas oscilacións completas cada segundo. Calcular:

a) A elongación de dito punto no instante 0,5 s despois de alcanzar a máxima separación.

b) A velocidade e aceleración 0,5 s despois de alcanzar a máxima separación.

c) A enerxía cinética que terá o punto móbil ó pasar pola posición de equilibrio.

a) A partir da frecuencia $\theta = \omega/2\pi$ obtemos a pulsación $\omega = 4\pi$ rad·s^{-1}

e tamén o período $T = 1/f = 0,5$ s

Como o período é tempo que tarda o móbil en repetir tódalas características do movemento coincide co tempo indicado no enunciado, quere dicir entón que se atopará na posición da que partiu

$x_0 = A = +0,1$ m => $x_{t = 0'5} = +0,1$ m

Podemos obtelo directamente a partir da ecuación do movemento:

$x_{t = 0'5} = 0,1\cdot sen\ (4\pi\cdot 0,5 + \pi/2) = +0,1$ m

b) A velocidade e a aceleración obtense a partir da ecuación do movemento:

$v=dx/dt= 0,1\cdot 4\pi\cdot cos\ (4\pi\cdot t + \pi/2)= 0,1\cdot 4\pi\cdot cos\ (4\pi\cdot 0,5 + \pi/2)=0$

$a=dv/dt=-0,1\cdot(4\pi)^2\cdot sen(4\pi\cdot t + \pi/2)= -0,1\cdot(4\pi)^2\cdot sen(4\pi\cdot 0,5 + \pi/2)=-15,8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$

Tamén se poden empregar as ecuacións en función de x:

$$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = 4\pi\sqrt{0,1^2 - 0,1^2} = 0$$

$$a = -\omega^2 x = -16\pi^2(0,1) = -15,8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

c) A enerxía cinética expresada en función da posición do móbil ten a expresión

$E_C = ½\ m\cdot\omega^2\cdot(A^2-x^2)$

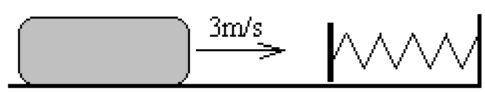
Como na posición de equilibrio $x = 0$, substituíndo obteremos $E_c = 0,40$ J

10. No sistema da figura, un corpo de 2 kg móvese a 3 m·s^{-1} sobre un plano horizontal.

a) Determinar a velocidade do corpo ó comprimirse 1cm o resorte, de constante k=10 000 N·m^{-1} (Non se ten en conta a fricción).

b) Cal é a compresión máxima do resorte?

c) A qué distancia se igualan as enerxías cinética e potencial do resorte?



a) No momento do contacto do corpo co resorte, toda a enerxía do conxunto atópase na forma de enerxía cinética. Ó irse comprimindo o resorte, esta enerxía cinética vaise transformando en enerxía potencial de xeito que cando estea no máximo de compresión toda a enerxía estará en forma potencial.

$E_m = E_{Cmax} = E_{Pmax}$

$E_{Cmax} = ½mv_{max}{}^2 = ½\ 2\cdot 3^2 = 9$ J

Nas posicións intermedias: $E_m = E_C + E_P= ½mv^2+ ½kx^2$

Logo, cando se ten comprimido 1 cm teremos

$9 = ½\ 2\cdot v^2 + ½\ 10000\cdot 0,01^2$

$v = 2,92$ m.s^{-1}

b) No momento da máxima compresión, a enerxía cinética é 0, polo que toda a enerxía mecánica será debida á enerxia potencial:

$E_m= 9= ½kx^2$

$9= ½10000\cdot x^2$; $x = 0,042$ m, que será o valor da amplitude (máxima compresión)

c) A distancia que fai que $E_C = E_P$ será a que faga que:

$E_C = ½\ m\cdot\omega^2\cdot(A^2-x^2)$ sexa igual a $E_P=½kx^2$

$½\ m\cdot\omega^2\cdot(A^2-x^2)= ½kx^2$

$½\ k(A^2-x^2)= ½kx^2$

$A^2-x^2 =x^2;\ x=\frac{A}{\sqrt{2}} = \frac{A\sqrt{2}}{2}= 0,030$m

11. Un péndulo ten unha lonxitude de 1 m e un corpo colgado no seu extremo de 1 kg é desviado da súa posición de equilibrio quedando solto a medio metro de altura.

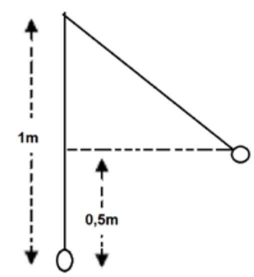
a) Calcula-la súa velocidade no punto máis baixo aplicando o principio de conservación da enerxía mecánica.

b) Calcula-la súa velocidade valorando a aplicación das ecuacións do M.H.S.

c) Deducir en qué condicións o movemento do péndulo sería harmónico simple e calcular a lonxitude que debería ter o fío para que o período fose de 1s (Dato: g= 9,8 m·s^{-2}).

a) Como a enerxía mecánica se conserva $\Delta Ep + \Delta Ec = 0$.
Polo tanto, en valor absoluto, $m\cdot g \cdot \Delta h = \frac{1}{2}\, m\cdot v^2$

de onde $v = \sqrt{2gh}$; $v = (2\cdot 9{,}8\cdot 0{,}5) = 3{,}13$ m.s^{-1}



b) Nun M.H.S., a ecuación correspondente para a velocidade é $v=A\cdot\omega\cdot\cos(\omega t)$,

sen ter en conta o desfasamento inicial.

A amplitude é $A=1.\mathrm{sen}\,[\arccos(L-h)] =1.\mathrm{sen}\,[\arccos(0{,}5)] =1.\mathrm{sen}60^o = 0'866$m

Por outra banda, $\omega=2\pi/T=\frac{2\pi}{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} = \sqrt{\frac{g}{l}}=3{,}13$ rad.s^{-1}

Como para a v máxima o coseno é 1 (en valor absoluto), temos $v_{max} = A\cdot\omega = 2{,}7$ m·s^{-1}

Comentario: Vemos unha diferenza apreciable no cálculo por ambos métodos. O método das enerxías sempre é aplicable, mentres que o amplo ángulo (60º) fai desaconsellable o uso das ecuacións do MHS.

O movemento non é un M.H.S.

c) Para que o péndulo se comporte como un M.H.S. debería cumprir:

$F=-kx$, e polo tanto: $\mathrm{sen}\theta=\theta$ (rad)

Nese caso, a amplitude angular máxima estaría entorno ós 15º, o que representa que A debería ser:

0,26 m, e a altura máxima debería ser de: $h=l-l\cdot\cos 15= 0{,}34$ m

Aplicando a ecuación do período poderíamos calcular a lonxitude necesaria para conseguir que T= 1.

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$; $l = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{1^2\cdot 9{,}8}{4\pi^2}=0{,}25$ m

12. Unha partícula de masa 50 g, describe un M.H.S. de amplitude 10 cm e período 2,0 s. Se comezamos a estudar o movemento no instante no que pasa pola posición de equilibrio e se dirixe cara ás elongacións negativas, calcular:

a) A posición, a velocidade, a aceleración e a forza elástica no instante 0,50 s

b) O tempo transcorrido ata que pasa por vez primeira pola posición 5,0 cm

c) A enerxía cinética en función do tempo.

a) Condicións iniciais para *t = 0: x = 0 ; v < 0*.

Impomos as condicións iniciais para calcular a fase inicial empregando, por exemplo, a función seno:

$x = A\,sen(\omega t + \theta_0)$

$0 = A\,sen\,\theta_0 \rightarrow sen\,\theta_0 = 0 \rightarrow \theta_0 = 0$ rad *ou* $\theta_0 = \pi$ rad

Por dirixirse cara ás elongacións negativas, o ángulo correcto é o que fai que en t=0 v sexa menor que 0.

$v = A\omega\,cos(\omega t + \theta_0)$

En *t = 0,* $v = A\omega\,cos\,\theta_0 \rightarrow A\omega\,cos\,0 > 0 \rightarrow A\omega\,cos\,\pi < 0$

Polo tanto, a fase inicial é: $\theta_0 = \pi$ rad

Cálculo da frecuencia angular: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi\ \mathrm{s}^{-1}$

Ecuacións da posición, velocidade, aceleración e forza:

$$x = 0{,}10\,sen(\pi t + \pi)\ \mathrm{m}$$

$$v = 0{,}10\pi\,cos(\pi t + \pi)\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

$$a = -\omega^2 x = -\pi^2 x\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

$$F = -kx = ma = -5 \cdot 10^{-2}\pi^2 x\ \mathrm{N}$$

Para t = 0,50s → $x = -0{,}10$ m ;

$v = 0$ m·s^{-1} ;

$a = 0{,}10\pi^2$ m·s^{-2} ;

$F = 5 \cdot 10^{-3}\pi^2$ N

b) $5{,}0 \cdot 10^{-2} = 0{,}10\,sen(\pi t + \pi)$; $sen(\pi t + \pi) = \frac{1}{2} \rightarrow \pi t + \pi = \frac{13\pi}{6}$ rad $\rightarrow t = \frac{7}{6}$ **s**

No instante calculado, v > 0, que é a condición que ten que cumprir a velocidade a primeira vez que pasa pola posición 5,0cm.

c) $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m[A\omega\,cos(\omega t + \pi)]^2 = 2{,}5 \cdot 10^{-4}\pi^2 cos^2(\pi t + \pi)$ J

13. A aceleración dun punto material que se move sobre o eixe X ven dada pola expresión: $\boldsymbol{a} = -9 \cdot \boldsymbol{x}$, onde x mídese en cm e a en cm·s^{-2}. Sabendo que a amplitude do movemento é 3 cm e que no instante inicial a elongación é máxima para x>0, calcular:

a) A ecuación do movemento do punto material.

b) A velocidade e a aceleración máximas. Indica os puntos da traxectoria ós que corresponden estes valores.

c) Os puntos da traxectoria no que se iguala a enerxía cinética á enerxía potencial elástica.

a) Dado que $a = -\omega^2 x$ e tendo en conta a expresión $a = -9 \cdot x \Longrightarrow \omega = 3\ s^{-1}$

Condicións iniciais: para $t = 0$; $x = A$; $v = 0$.

Ecuación xeral: $x = A sen(\omega t + \theta_0)$

Impondo as condicións iniciais para calcular θ_0: $A = A sen\theta_0 \Longrightarrow sen\varphi_0 = 1 \Longrightarrow \theta_0 = \pi/2$ rad

$x = 3\cdot 10^{-2} sen(3t + \pi/2) = 3\cdot 10^{-2} cos(3t)$ m

b) $v = -9\cdot 10^{-2} sen3t$ m·s^{-1}

$a = -9\cdot 10^{-2}\cdot x$ m·s^{-2}

Os módulos destes valores máximos serán:

$|v_{máx}| = 9\cdot 10^{-2}$ m·s^{-2} ;corresponde ó centro de oscilación, cando $sen\ 3t = \pm 1 \Longrightarrow sen\ 3t = sen\ (\frac{2n+1}{2})\pi$

$3t = \frac{2n+1}{2}\pi \Longrightarrow t = \frac{(2n+1)\pi}{6}$ s

$|a_{máx}| = 27\cdot 10^{-4}$ m·s^{-2} ; corresponde ós extremos, cando $cos\ 3t = \pm 1 \Longrightarrow cos\ 3t = cos\ n\pi$

$3t = n\pi \Longrightarrow t = \frac{n\pi}{3}$ s

c) $E_C = E_P$

$½\ mv^2 = ½\ kx^2$

$v^2 = \omega^2\cdot(A^2 - x^2)$

$k = m\cdot\omega^2$

$½\ m\cdot\omega^2(A^2 - x^2) = 1/2 m\cdot\omega^2\cdot x^2 \rightarrow x = A/\sqrt{2} = 2{,}1\cdot 10^{-2}$ m

14. Un oscilador harmónico ten velocidades de 20 e 40 cm·s^{-1} cando as súas elongacións son, respectivamente, 6,0 e 5,0 cm. Calcular:

a) A amplitude, o período e a frecuencia do movemento.

b) A aceleración nas dúas elongacións indicadas.

c) A enerxía mecánica, sabendo que a masa é de 20 g.

a) Se aplicamos o Principio de Conservación da Enerxía mecánica obtemos: $v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$

Aplicada a cada par de valores: $\frac{{v_1}^2}{{v_2}^2} = \frac{A^2 - {x_1}^2}{A^2 - {x_2}^2} \rightarrow \frac{(20\cdot 10^{-2})^2}{(40\cdot 10^{-2})^2} = \frac{A^2 - (6{,}0\cdot 10^{-2})^2}{A^2 - (5{,}0\cdot 10^{-2})^2} \rightarrow A = 6{,}3\cdot 10^{-2}$ m

A partir da ecuación ${v_1}^2 = \omega^2(A^2 - {x_1}^2)$, resulta $\omega = 10{,}4$ s^{-1}.

Por outra parte, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

Despexando T e f resulta: $T = 0{,}60$ s ; $f = 1{,}7$ Hz *b)* $a = -\omega^2 \cdot x$

Substituíndo os dous valores das elongacións , obtemos: a_1=*-6,5* m·s^{-2} e a_2=*- 5,4* m·s^{-2}

c) Supoñendo ausencia de rozamento, a única forza que actúa é a elástica, que por ser conservativa cumpre a Conservación da Enerxía Mecánica.

$$E = E_C + E_P = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m \cdot \omega^2 \cdot A^2 \rightarrow E = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 10^{-3} \cdot 10{,}4^2 \cdot (6{,}3 \cdot 10^{-2})^2 = 4{,}3 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{J}$$

15. Unha onda unidimensional propágase segundo a ecuación: y= 2 cos 2π [(t/4) - (x/1,6)]; onde as distancias "x" e "y" mídense en metros e o tempo en segundos. Determinar:

a) O módulo da velocidade de propagación.

b) A diferenza de fase, nun instante dado, de dúas partículas separadas 120 cm na dirección de avance da onda.

c) A aceleración máxima.

a) Da ecuación da onda sacamos os seguintes datos: *A = 2* m; *T = 4* s; *λ = 1,6* m

como a velocidade de propagación da onda é: *f= λ/T = 1,6/4 = 0,4* m.s^{-1}

b) Considerando que cando hai unha distancia *x = λ,* a diferenza de fase é *2π.*

A diferenza de fase vén dada por *2π·(x/λ) = 2π·(1,2/1,6) = (3π/2)* rad

c) A aceleración máxima obtense a partir da ecuación da onda:

y= 2 cos 2π [(t/4) - (x/1,6)]

v= dy/dt=- 2·2π (1/4)· sen 2π [(t/4) - (x/1,6)]

a= dv/dt= -2·[2π (1/4)]^2· cos 2π [(t/4) - (x/1,6)]

que será máxima cando o *sen 2π [(t/4) - (x/1,6)]=1*, resultando

$|a_{max}|$ = *4,93* m·s^{-2}

16. Unha onda que se propaga por unha corda cunha velocidade de 2,0 m·s^{-1} no sentido positivo do eixo X, ten unha amplitude de 4,0·10^{-2} m e unha frecuencia de 4,0 Hz. Calcula:

a) A ecuación do movemento ondulatorio.

b) A diferenza de fase entre dous estados de vibración da mesma partícula cando o intervalo de tempo transcorrido é de 2,0 s. Razoa se están en fase ou en oposición de fase.

c) A diferenza de fase, nun instante dado, entre dúas partículas separadas 2,25 m. Razoa se están en fase ou en oposición de fase.

a) Ecuación xeral utilizando a función cos: $y\ (x,t) = A\,cos\ (\omega t - kx)$

Cálculo de ω e k: $\omega = 2\pi f = 8\pi\ \mathrm{s}^{-1}$

$$\lambda = \frac{v}{f} = 0{,}5\ \mathrm{m}\ ;\ k = \frac{2\pi}{\lambda} = 4\pi\ \mathrm{m}^{-1}$$

$$y\ (x,t) = 4{,}0 \cdot 10^{-2}\ cos(8\pi t - 4\pi x)\ \mathrm{m}$$

b) Fase: $\theta = (8\pi t - 4\pi x)$ rad

En t$_1$: $\theta_1 = (8\pi t_1 - 4\pi x)$ rad

En t₂: : $\theta_2 = (8\pi t_2 - 4\pi x)$ rad

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = 8\pi(t_2 - t_1) = 16\pi\, rad = 8 \cdot 2\pi \text{ rad}$$

Dado que $\Delta t = 2{,}0$ s é un múltiplo enteiro de T (T=0,25 s) ($\Delta t = 2{,}0 = 8T$), podemos concluír que ambos estados de vibración están en fase.

Por outra parte, a diferenza de fase é un múltiplo enteiro de 2π ($\Delta\theta = 8 \cdot 2\pi$rad), o que confirma que están en fase. Evidentemente, ambas condicións son equivalentes.

c) En x_1: $\theta_1 = (8\pi t - 4\pi x_1)$ rad
   En x_2: $\theta_2 = (8\pi t - 4\pi x_2)$ rad
   $|\Delta\theta| = |\theta_2 - \theta_1| = |4\pi(x_2 - x_1)| = 9\pi$ rad
   Dado que $\Delta x = 2{,}25$ m é un múltiplo impar de λ/2 ($\Delta x = 9 \cdot \lambda/2$) podemos concluír que ambas partículas están en oposición de fase.
   Por outra parte, a diferenza de fase é un múltiplo impar de π ($|\Delta\theta| = 9\pi$ rad), o que confirma que están en oposición de fase. Evidentemente, ambas condicións son equivalentes.

17. A ecuación dunha onda transversal que se propaga nunha corda é: $y\,(x,t) = 10\,\text{sen}\,\pi\,(x - 0{,}2t)$, onde ***x*** e ***y*** exprésanse en cm e ***t*** en s. Calcular:

a) A amplitude, a lonxitude de onda, a frecuencia e a velocidade de propagación da onda.
b) Os valores máximos da velocidade e da aceleración das partículas da corda.
c) En qué sentido se propaga a onda? Cal será a ecuación da onda transversal se se propaga en sentido contrario?. Explicar.

a) $y\,(x,t) = 10\,sen\,(\pi x - 0{,}2\pi t)$

Comparando coa ecuación xeral $y\,(x,t) = A\,sen\,(kx - \omega t)$ resulta: *A = 0,10* m

$k = \pi$ cm⁻¹ →$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 2 \cdot 10^{-2}$m

$\omega = 0{,}2\pi \text{ s}^{-1}$ →$f = \frac{\omega}{2\pi} = 0{,}1$Hz

$v = \lambda \cdot f = 2 \cdot 10^{-3}$m·s^{-1}

b) $v = \frac{dy\,(x,t)}{dt} = -A\omega\,cos\,(kx - \omega t)$

$|v_{máx}| = A\omega = 2 \cdot 10^{-2}\pi$ m·s^{-1}

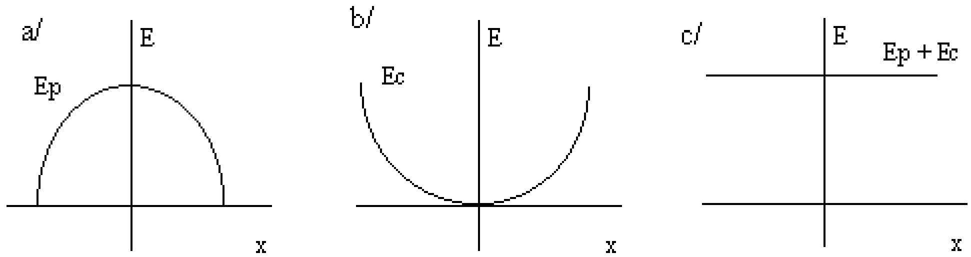
$$a = \frac{dv\,(x,t)}{dt} = -A\omega^2\,sen(kx - \omega t)$$

$|a_{máx}| = A\omega^2 = 4 \cdot 10^{-3}\pi^2$ m·s^{-2}

c) No sentido positivo do eixo X, xa que a velocidade de propagación da onda é positiva. Se se propaga no sentido negativo do eixo X, $y\,(x,t) = 10\,sen\,(\pi x + 0{,}2\pi t)$, xa que a velocidade de propagación da onda é negativa.

VIBRACIÓNS E ONDAS. CUESTIÓNS

1. Nun movemento harmónico simple, indica cal das seguintes gráficas se axusta correctamente á relación enerxía/elongación:



SOL. **c**

Nun oscilador harmónico a enerxía total do mesmo permanece constante e independente da elongación, sendo o seu valor $E= (1/2)\ k \cdot A^2$.

A gráfica a) sería incorrecta pois o máximo valor da enerxía potencial sería cando x=A. Cando x=0 a enerxía potencial sería nula.

A gráfica b) tamén é incorrecta pois a enerxía cinética máxima sería para x=0 ó pasar polo punto central do movemento.

2. De dous resortes elásticos con idéntica constante cólgase a mesma masa. Un dos resortes ten dobre lonxitude que o outro, entón, o corpo vibrará:

a) Coa mesma frecuencia.
b) O de dobre lonxitude con frecuencia dobre.
c) O de dobre lonxitude coa metade da frecuencia.

SOL. **a**

O período de vibración dun resorte elástico ven dado por: $T= 2\pi(m/k)^{1/2}$

Se a masa e as constantes son iguais, o período de ambos, e polo tanto, a súa frecuencia serán iguais, ó non influír a lonxitude do resorte.

Pola mesma razón, a non influenza da lonxitude do resorte, as outras dúas opcións son falsas.

3. Cando un movemento ondulatorio se reflicte, a súa velocidade de propagación:
a) Aumenta; b) Depende da superficie de reflexión; c) Non varía.

SOL. **c**

A reflexión é un fenómeno ondulatorio polo que as ondas modifican a dirección na velocidade de propagación ó chocar contra unha superficie. Polo tanto, sen producirse cambio no módulo da súa velocidade de propagación, ó non cambiar o medio de propagación.

4. Se se cambian á vez o ton e a intensidade dun son procedente dunha trompeta, ¿cales das seguintes magnitudes teñen que cambiar necesariamente?.
a) Frecuencia e lonxitude de onda; b) Só a frecuencia; c) Amplitude, frecuencia e lonxitude de onda.

SOL. **c**

As cualidades do son as que se refiren, intensidade e ton, están directamente relacionadas coa amplitude (intensidade) e coa frecuencia(ton). Por outra banda, frecuencia e lonxitude de onda para unha velocidade de propagación determinada, tamén están relacionadas entre si ($v = \lambda\nu$).

Por isto, unha modificación de ton e intensidade supoñen unha modificación de amplitude, frecuencia e lonxitude de onda.

5. A enerxía que transporta unha onda é proporcional a:
a) A frecuencia; b) A amplitude; c) Os cadrados da frecuencia e da amplitude.

SOL. **c**

Un movemento ondulatorio é un movemento vibratorio que se propaga. De acordo coa ecuación que determina a enerxía do movemento vibratorio dunha partícula:

$E = (1/2)kA^2 = (1/2)m\omega^2 \cdot A^2 = (1/2)m4\pi^2\nu^2A^2$, proporcional ó cadrado de frecuencia e amplitude

6. Un movemento harmónico sinxelo determinado é a proxección doutro movemento circular uniforme. A aceleración centrípeta no movemento circular é:
a) Maior ou igual á aceleración no MHS; b) Sempre menor; c) Menor ou igual á aceleración no MHS.

SOL.: **a**

A aceleración no MHS é unha función sinusoidal, máxima no punto de elongación máxima ($a = \omega^2 \cdot A$) e nula no punto de equilibrio (onde a velocidade é máxima).

A aceleración centrípeta do movemento circular uniforme correspondente, $a = \omega^2 r$ será igual á devandita aceleración do MHS cando $r = A$, e será sempre maior para valores $r < A$.

7. Unha onda sen rozamentos amortécese de tal xeito que a amplitude é proporcional á inversa da raíz cadrada da distancia á orixe. Isto débese a que é unha onda:
a) Esférica; b) Cilíndrica; c) Lineal.

SOL.: **b**

Tendo en conta que a intensidade do movemento ondulatorio é a relación entre a potencia (ou enerxía por unidade de tempo) e a superficie normal á dirección de propagación, teremos para ondas cilíndricas: $I = P/(2\pi R.h)$

A intensidade é proporcional á enerxía e esta é directamente proporcional ao cadrado da amplitude de oscilación ($E = 1/2\ k.A^2$), resultando que I será directamente proporcional a A^2 e inversamente proporcional a R. Polo tanto, A será inversamente proporcional a $R^{1/2}$.

8. Escoitando un coro, atopamos nunha nota mantida que se producen altibaixos de sonoridade. Popularmente dise que é debido a que alguén "desentoa". Na realidade, o que pasa é que alguén:
a) Está dando unha frecuencia sonora diferente ó resto.
b) Está producindo unha intensidade diferente.
c) A composición das frecuencias que constitúen a súa voz nese momento é diferente á dos seus compañeiros.

SOL.: **a**

Unha das calidades do son, o ton, que nos permite distinguir os sons agudos dos graves, depende da súa frecuencia fundamental. Cando as frecuencias fundamentais das ondas que se compoñen son diferentes, a composición das ondas pasa por intervalos de tempo nas que se producen interferencias construtivas e outros nas que se producen destrutivas, interpretadas como altibaixos de sonoridade. Polo tanto "desentoar" supón modificar esta frecuencia fundamental.

9. A velocidade dunha onda:
a) Varía coa fase na que se atope o punto.
b) Varía coa distancia do punto á orixe.
c) Varía ao cambiar o medio de propagación.

SOL.: **c**

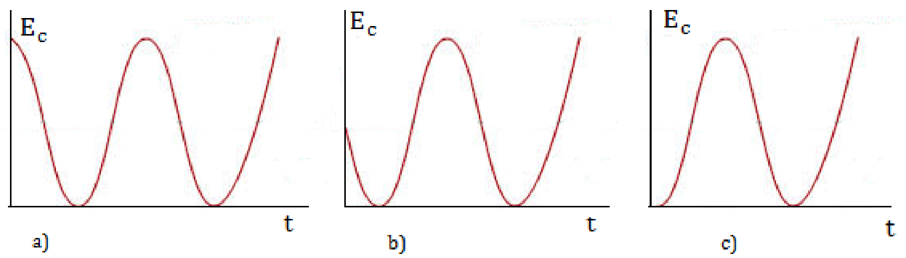
A velocidade dunha onda é o resultado do produto da lonxitude de onda pola frecuencia, e depende do medio no que se está a propagar a onda. Ao cambiar o medio de propagación producirase unha modificación da súa lonxitude de onda que implicará un cambio da velocidade da onda. A frecuencia non se modifica ao depender exclusivamente do foco emisor.

10. Na composición de dúas ondas luminosas das mesmas características prodúcense lugares onde non hai iluminación apreciable.
a) Isto é unha reflexión.
b) Prodúcese unha interferencia.
c) Non é certo, non se produce nunca.

SOL.: **b**

As interferencias prodúcense por superposición de dous movementos ondulatorios. Neste caso estamos a considera-lo comportamento ondulatorio da luz. Cando dúas ondas luminosas estacionarias producidas por focos distintos que se propagan polo mesmo medio se atopan nun mesmo punto, prodúcese o fenómeno das interferencias. Posto que a luz ten natureza electromagnética, as perturbacións mutuas preséntanse como reforzos ou diminucións dos campos eléctricos e magnéticos, equivalentes á composición construtiva ou destrutiva das mesmas.

11. As condicións iniciais dun oscilador harmónico son: tempo (t=0), elongación (x=0) e velocidade (v> 0). ¿Que perfil representa correctamente a variación da Ec co tempo nun período?.



SOL.:**a**

A enerxía cinética: $E_C= (1/2)mv^2 = (1/2)m\omega^2(A^2-x^2)$, ten o máximo valor cando x=0 que neste caso coincide con t=0, e para un período completo t=T. A gráfica correcta é a a).

12. A enerxía mecánica dun oscilador harmónico:

a) Duplícase cando se duplica a amplitude da oscilación.
b) Duplícase cando se duplica a frecuencia da oscilación.
c) Cuadriplícase cando se duplica a amplitude da oscilación.

SOL.:c

Como a enerxía mecánica dun oscilador harmónico é $E= (1/2)kA^2$, resulta que se duplicamos A, cuadriplícase E.

13. Unha corda colga do alto dunha torre alta de xeito que o extremo superior é invisible e inaccesible, pero o extremo inferior si se ve. ¿Cómo determinarías a lonxitude da corda?

a) É imposible.
b) Medindo a amplitude da oscilación.
c) Medindo o período da oscilación.

SOL.:**c**

Considerando un comportamento de péndulo simple, se medimos o período , $T= 2\pi\ (l/g)^{1/2}$, e coñecido g, poderemos calcular o valor de l.

(Nota: se a densidade lineal da corda non é desprezable, teriamos que aplicar a relación que nos da o período nun péndulo físico, o que tornaría máis complicada a solución polo cálculo de I en función da densidade e lonxitude)

14. Se no instante t = 0 un móbil que describe un m.h.s. atópase en x = A/2 dirixíndose cara ó centro de oscilación, a súa ecuación do movemento é:
a) $x = A\cos(\omega t + \frac{\pi}{3})$ m ; b) $= A\,\text{sen}(\omega t + \frac{\pi}{3})$ m ; c) $x = A\cos(\omega t + \frac{5\pi}{3})$ m.

SOL.: **a**

Imposición das condicións iniciais das ecuacións:
$x = A\,cos(\omega t + \theta_0)$; $v = -A\omega\,sen(\omega t + \theta_0)$
$\frac{A}{2} = A\,cos\,\theta_0 \rightarrow cos\,\theta_0 = \frac{1}{2} \rightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{3} rad$ e $\theta_0 = \frac{5\pi}{3} rad$

Hai que comprobar cal das dúas solución cumpre que en t = 0, v < 0.
$v = -A\omega\,sen\,\theta_0 = \rightarrow -A\omega\,sen\frac{\pi}{3} < 0$
$\rightarrow -A\omega\,sen\frac{5\pi}{3} > 0$
A solución válida é: $\theta_0 = \frac{\pi}{3} rad$, como consecuencia, a opción correcta é a).

15. A ecuación dunha onda transversal de amplitude 4 cm e frecuencia 20 Hz que se propaga no sentido negativo do eixo X cunha velocidade de 20 m·s^{-1} é:
a) $y(x,t) = 4 \cdot 10^{-2}\,cos\,\pi(40t + 2x)\,m$
b) $y(x,t) = 4 \cdot 10^{-2}\,cos\,\pi(40t - 2x)\,m$
c) $y(x,t) = 4 \cdot 10^{-2}\,cos\,2\pi(40t + 2x)\,m$

SOL. **a**

A única resposta posible é a **a**, xa que cumpre que: f= 20 Hz e v = 20m·s^{-1}
$y(x,t) = 4 \cdot 10^{-2} \cos(40\pi t + 2\pi x)$ m

Comparando coa ecuación xeral:

$w = 40\pi s^{-1} \rightarrow w = 2\pi f \rightarrow f = 20$ Hz

$k = 2\pi m^{-1} \rightarrow k = 2\pi/\lambda \rightarrow \lambda = 1$ m

$\lambda = v/f \rightarrow v = \lambda f = 20$ m·s^{-1}

16. Nun medio homoxéneo e isótropo, unha fonte sonora produce, a unha distancia ***r,*** un son de 40 dB. Se a intensidade do son se fai 100 veces maior, a nova sonoridade, á mesma distancia, será:
a) 50 dB ; b) 60 dB ; c) 70 dB.

SOL. **b**

$$S = 10\,log\frac{I}{I_0} = 40$$
$$S' = 10\,log\frac{100I}{I_0} = 10\,(log\,100 + log\frac{I}{I_0}) = 10\,\left(2 + \frac{40}{10}\right) = 60\,dB$$

17. Nun medio homoxéneo e isótropo, unha fonte sonora produce, a unha distancia de 1 m, un son de 40 dB. A unha distancia de 10 m, a sonoridade será:
a) 10 dB ; b) 20 dB ; c) 30 dB.

SOL. **b**

$$\frac{I}{I_0} = \frac{{r_0}^2}{r^2}$$

$$S = 10\, log \frac{I}{I_0} = 10\, log \frac{{r_0}^2}{1}$$

$$\mathrm{S}' = 10 \log \frac{{\mathrm{r}_0}^2}{10^2}$$

Restando obtemos : $\mathrm{S} - \mathrm{S}' = 10\,(\log \frac{{\mathrm{r}_0}^2}{1} - \log \frac{{\mathrm{r}_0}^2}{10^2}) = 10 \log \frac{\frac{{\mathrm{r}_0}^2}{1}}{\frac{{\mathrm{r}_0}^2}{10^2}} = 10 \log 100 = 20\ \mathrm{dB}$

$$40 - \mathrm{S}' = 20 \rightarrow \mathrm{S}' = 20\ \mathrm{dB}$$