GRAVITACIÓN. PROBLEMAS

1. O MESSENGER é unha misión espacial non tripulada da NASA, lanzada rumbo a Mercurio en Agosto de 2004 e que entrou en órbita arredor dese planeta en Marzo de 2011. No seu percorrido enviou datos que permiten coñecer diferentes parámetros sobre Mercurio. Así, en Abril de 2011, atopándose a unha distancia de 10 124 km do centro de Mercurio, o período de Messenger foi de 12 horas e 2 minutos. Con estes datos:

a) Calcula a velocidade orbital a que se estaría movendo Messenger.

b) Determina a masa de Mercurio.

c) Determina os valores da enerxía cinética e potencial da sonda espacial nese intre, tendo en conta que a masa da sonda espacial é de 485 kg.

Dato: Constante de Gravitación G = $6{,}67\cdot10^{-11}$N m^2kg^{-2}

a) Para determinar a velocidade orbital temos en conta os datos do problema:
T= 12 h 2 min= 43 320 s
R= $1{,}0124\cdot10^7$ m

$$v=\frac{2\pi R}{T}\Rightarrow v=\frac{2\cdot\pi\cdot1{,}0124\cdot10^7}{43320}=1{,}468\cdot10^3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

b) A forza centrípeta necesaria para que Messenger poida describir a órbita é proporcionada pola forza de atracción entre Messenger e Mercurio.

$$F_g=m\cdot a_c$$

$$G\frac{M_{merc}m}{R^2}=\frac{mv^2}{R}\Rightarrow G\frac{M_{mercurio}}{R}=v^2\Rightarrow M_{mercurio}=\frac{v^2R}{G}=3{,}27\cdot10^{23}\,\mathrm{kg}$$

c) Cálculo das enerxías cinética e potencial

$$E_c=\frac{mv^2}{2}=\frac{485\cdot(1468)^2}{2}=5{,}23\cdot10^8\,J$$

$$E_P=-\frac{GMm}{R}=-\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot3{,}27\cdot10^{23}\cdot485}{1{,}0124\cdot10^7}=-1{,}04\cdot10^9\,\mathrm{J}$$

2. O satélite PLANCK forma parte da primeira misión europea dedicada ao estudo da orixe do Universo. O satélite PLANCK, cunha masa de 1 800 kg, foi lanzado en Abril de 2009 para situarse nunha órbita a 1,5 millóns de kilómetros do centro da Terra. Supoñendo que a órbita que describe é circular, calcula:

a) A velocidade orbital do satélite e o tempo, en días, que tardará en dar unha volta entorno á Terra.

b) A enerxía cinética, potencial e mecánica do satélite na órbita.

c) A velocidade con que chegaría á Terra, se por algunha circunstancia o satélite perde a súa velocidade orbital. Considerar desprezable a fricción ao entrar en contacto coa atmosfera

Datos: Radio da Terra: $6{,}37\cdot10^6$ m. Masa da Terra: $5{,}98\cdot10^{24}$ kg. G = $6{,}67\cdot10^{-11}$N m^{2}kg^{-2}.

a) Para determinar a velocidade orbital temos en conta que:

$$F_g = m\cdot a_c \Rightarrow G\frac{M_T m}{R^2} = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow G\frac{M_T}{R} = v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{1{,}5.10^9}} = 516\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

A determinación do período faise a partir da velocidade orbital:

$$v = \frac{2\pi R}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi\cdot1{,}5\cdot10^9}{516} = 1{,}83\cdot10^7\,s = 211\ \text{días}$$

b) Cálculo das enerxías cinética e potencial

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{1800\cdot(516)^2}{2} = 2{,}4\cdot10^8\,\text{J}$$

$$E_P = -\frac{GMm}{R} = -\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}\cdot1800}{1{,}5\cdot10^9} = -4{,}8\cdot10^8\,\text{J}$$

$$E_m = E_c + E_P = 2{,}4\cdot10^8 + (-4{,}8\cdot10^8) = -2{,}4\cdot10^8\,\text{J}$$

c) Aplicamos o principio de conservación da enerxía, supoñendo que a enerxía cinética orbital é agora nula.

$$(E_c + E_P)_{órbita} = (E_c + E_P)_{Terra}$$

$$0 + (-4{,}8\cdot10^8) = \frac{mv^2}{2} + (-G\frac{Mm}{R_T})$$

$$\frac{mv^2}{2} = -4{,}8\cdot10^8 + \frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}\cdot1800}{6{,}37\cdot10^6} = 1{,}12\cdot10^{11}$$

$$v = 1{,}12.10^4\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

3. En 2012, a Universidade de Vigo e o Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial, en colaboración coa ESA (Axencia Espacial Europea) puxeron en órbita o primeiro satélite galego, o XATCOBEO, para fins educativos. Este satélite, cunha masa de aproximadamente 1 kg, orbita a unha altura máxima (apoxeo) de 1500 km da superficie terrestre, e a unha mínima (perixeo) de 300 km. Determina:

a) A velocidade media orbital, supoñendo que o radio medio orbital e a semisuma do perixeo e apoxeo.

b) A enerxía mecánica do satélite no apoxeo.

c) Xustificar cómo variará a velocidade areolar no seu percorrido orbital.

Datos: Radio da Terra: $6{,}37 \cdot 10^6$ m; Masa da Terra: $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg. G = $6{,}67 \cdot 10^{-11}$N m^{2}kg^{-2}.

a) Para determinar a velocidade media orbital temos en conta que:

$$F_g = m.a_c \Rightarrow G\frac{M_T m}{R^2} = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow G\frac{M_T}{R} = v^2$$

$$\text{Radio orbital} = \frac{(1500+300)+12740}{2} = 7270\text{km} = 7{,}27{\cdot}10^6\text{m}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{6{,}67{\cdot}10^{-11}{\cdot}5{,}98{\cdot}10^{24}}{7{,}27{\cdot}10^6}} = 7407\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

b) A enerxía mecánica consérvase, polo que:

$$E_{mec.perixeo} = E_{mec.apoxeo}$$

$$-G\frac{M\cdot m}{6{,}67\cdot 10^6} + \frac{1}{2}m\cdot v_p^2 = -G\frac{M\cdot m}{7{,}87\cdot 10^6} + \frac{1}{2}m\cdot v_a^2$$

$$-G\frac{M\cdot m}{6{,}67\cdot 10^6} + \frac{1}{2}m\cdot v_p^2 = -G\frac{M\cdot m}{7{,}87\cdot 10^6} + \frac{1}{2}m\cdot v_a^2$$

Por tratarse dun campo de forzas centrais, tamén se conserva o momento angular:

$$L_{perixeo} = L_{apoxeo}\ ;\ \ m\cdot v_p\cdot r_p = m\cdot v_a\cdot r_a$$

$$m\cdot v_p\cdot 6{,}67\cdot 10^6 = m\cdot v_a\cdot 7{,}87\cdot 10^6$$

Resolvendo o sistema chegamos a:

$v_p = 8046$ m/s; $v_a = 6819$ m $\cdot\, s^{-1}$

E pódese calcular a enerxía mecánica total, que resulta:

$$E_{mec.} = -2{,}74\cdot 10^7\ \text{J}$$

c) A segunda lei de Kepler dinos que no movemento dun satélite respecto do seu planeta, a velocidade areolar é constante. $v_{areolar} = \frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$

Por tratarse dun campo de forzas centrais ($\vec{r}$ e $\vec{F}$ son vectores paralelos), o momento da forza será nulo, co que o momento angular permanece constante. Por este motivo, a velocidade areolar non cambia.

$$\vec{M}_F = \vec{r}x\vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{M}_F = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L} = \overrightarrow{cte}$$

$$v_{areolar} = \frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = cte$$

4. Un satélite de masa 200 kg sitúase nunha órbita circular sobre o ecuador terrestre, de tal forma que se axusta o radio da órbita para que dea unha volta á Terra cada 24 horas. Así conséguese que sempre se atope sobre o mesmo punto respecto da Terra (satélite xeoestacionario).

a) ¿Cal debe ser o radio da súa órbita?

b) ¿Canta enerxía se precisa para situalo na órbita?

c) ¿Cal é a velocidade que se lle debería comunicar dende a Terra para facer que escape da atracción gravitatoria?

Datos: G = $6{,}67\cdot10^{-11}$N m^2kg^{-2}; Masa da Terra: $5{,}98\cdot10^{24}$ kg; Radio da Terra: $6{,}37\cdot10^{6}$ m

a) Para determinar o radio da órbita temos en conta que o período T= 24 h= 86 400 s :

$$F_g = m.a_c$$

$$G\frac{M_T m}{R^2} = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow G\frac{M_T}{R} = v^2 \Rightarrow G\frac{M_T}{R} = (\frac{2\pi R}{T})^2 \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}} = 4{,}2\cdot10^7\,\text{m}$$

b) A enerxía necesaria para poñelo en órbita

$$(E_c + E_P)_{Terra} = (E_c + E_P)_{órbita}$$

$$E_c + (-G\frac{Mm}{R_T}) = -G\frac{Mm}{2R}$$

$$E_c = -G\frac{Mm}{2R} + G\frac{Mm}{R_T}$$

$$E_c = GMm(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2R}) = 6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}\cdot200\cdot(\frac{1}{6{,}37\cdot10^6} - \frac{1}{8{,}4\cdot10^7})$$

$$E_c = 1{,}16\cdot10^{10}\,\text{J}$$

c) A velocidade de escape dende a superficie da Terra defínese como a velocidade mínima que debemos comunicar a un corpo para chegar ó infinito, e determínase por aplicación do principio de conservación da enerxía

$$E_{PTerra} + E_c = E_\infty = 0 \Rightarrow -\frac{GM_T m}{R_T} + \frac{m{v_e}^2}{2} = 0$$

$$v_{escape} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{2\cdot6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{6{,}37\cdot10^6}} = 11{,}1\cdot10^3\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

5. O conxunto de satélites GPS (Global Positioning System) describen órbitas circulares arredor da Terra permitindo que poidamos determinar a posición onde nos atopamos cunha gran precisión. Todos os satélites GPS están a mesma altura e dan dúas voltas á Terra cada 24 horas. Calcular:

a) A altura da súa órbita sobre a superficie da Terra e a velocidade angular dun dos satélites.

b) A enerxía mecánica e a velocidade lineal que tería un destes satélites na súa órbita.

c) A nova velocidade e o tempo que tardaría en dar unha volta á Terra se o facemos orbitar ao dobre de altura.

Datos: G = $6{,}67\cdot10^{-11}$N m^{2}kg^{-2}; Masa da Terra: $5{,}98\cdot10^{24}$ kg; Radio da Terra: $6{,}37\cdot10^6$m;
Masa do satélite: 150 kg.

a) Para determinar o radio da órbita temos en conta que o período T= 12 h= 43 200 s

$$F_g = m.a_c$$

$$G\frac{M_T m}{R^2} = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow G\frac{M_T}{R} = v^2 \Rightarrow G\frac{M_T}{R} = (\frac{2\pi R}{T})^2 \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}} = 2{,}66\cdot10^7\,\mathrm{m}$$

$$h = R - R_T = 2{,}02.10^7\,\mathrm{m}$$

A velocidade angular:

$$\varpi = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{43200} = 1{,}45\cdot10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}$$

b) A enerxía mecánica na órbita é a suma das súas enerxías cinética e potencial

$$E_T = -\frac{GMm}{2R} = -\frac{6{,}67.10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}\cdot150}{2\cdot2{,}66\cdot10^7} = -1{,}12\cdot10^9\,\mathrm{J}$$

A velocidade lineal obtense a partires da velocidade angular

$$v = \varpi\cdot R = 1{,}45\cdot10^{-4}\cdot2{,}66\cdot10^7 = 3{,}86\cdot10^3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

c) Para o cálculo da velocidade orbital:

$$F_g = m\cdot a_c \Rightarrow G\frac{M_T m}{R^2} = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow G\frac{M_T}{R} = v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{R}} = \sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{(R_T + 2h)}} = 2920\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

O tempo que tardaría en dar unha volta sería

$$v = \frac{2\pi R}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi R}{v} = 1{,}00\cdot10^5 s = 28\ \mathrm{h}$$

6. A NASA lanzou en 2010 un satélite xeoestacionario (que xira coa mesma velocidade angular que a Terra), o GOES-P (Geostationary Operational Environmental Satellite), que suministrará diariamente información de tipo meteorolóxico e dará conta de actividades solares que poden afectar ao ambiente terrestre. GOES-P ten una masa de $3{,}1\cdot10^3$ kg e describe una órbita circular de $4{,}22\cdot 10^7$ m de radio. Con estes datos:

a) Calcula a velocidade areolar do satélite.

b) Supoñendo que o satélite describe a súa órbita no plano ecuatorial da Terra, determinar o módulo do momento angular respecto dos polos da Terra.

c) Indica os valores da enerxía cinética e potencial do satélite na órbita.

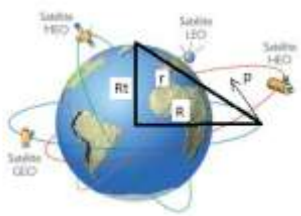
Datos: Período de rotación terrestre= 24 h. Radio medio terrestre 6 370 km; Masa da Terra: $5{,}98\cdot10^{24}$ kg; $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.

a) Para determinar a velocidade areolar temos en conta que o vector de posición é perpendicular á velocidade, polo que:

$$v_{areolar} = \frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = \frac{mvR}{2m} = \frac{vR}{2}$$

$$v_{areolar} = \frac{\varpi.R^2}{2} = \frac{\left(2\pi/T\right).R^2}{2} = \frac{\pi.R^2}{T} = \frac{\pi\cdot(4{,}22\cdot10^7)^2}{86400} = 6{,}48\cdot10^{10}\,\mathrm{m^2\cdot s^{-1}}$$

b) Para determinar o valor do momento angular:



$$r = \sqrt{R^2 + R_T^2} = \sqrt{(4{,}22\cdot10^7)^2 + (6{,}37\cdot10^6)^2} = 4{,}27\cdot10^7\,\mathrm{m}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = 3{,}07\cdot10^3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$p = m\cdot v = m\sqrt{\frac{GM}{R}} = 3{,}1\cdot10^3\cdot3{,}07\cdot10^3 = 9{,}52\cdot10^6\,\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$$

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} \Rightarrow L = r\cdot m\cdot v\cdot sen\alpha = r\cdot m\cdot v = 4{,}27\cdot10^7\cdot9{,}52\cdot10^6 = 4{,}06\cdot10^{14}\,\mathrm{kg\cdot m^2\cdot s}$$

c) Cálculo das enerxías cinética e potencial na órbita

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{3{,}1\cdot10^3(3{,}07\cdot10^3)^2}{2} = 1{,}46\cdot10^{10}\,\mathrm{J}$$

$$E_P = -\frac{GMm}{R} = -\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}\cdot3{,}1\cdot10^3}{4{,}22\cdot10^7} = -2{,}92\cdot10^{10}\,\mathrm{J}$$

7. A 760 km da superficie terrestre orbita, dende 2009, o satélite franco-español SMOS (Soil Moisture and Ocean Salinity), que forma parte dunha misión da Axencia Espacial Europea (ESA) para recoller información sobre o planeta. A masa do satélite é de 683 kg.

a) Calcular a enerxía cinética do satélite e a súa enerxía mecánica total.

b) Calcular o módulo do momento angular do satélite respecto do centro da Terra.

c) Xustificar por qué a velocidade areolar do satélite permanece constante.

Datos: Radio medio terrestre: $6{,}37\cdot10^{6}$ m. Masa da Terra: $5{,}98\cdot10^{24}$ kg. $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$N m^{2}kg^{-2}.

a) Cálculo da enerxía cinética e da enerxía total

$$v=\sqrt{\frac{GM}{R}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{7{,}13\cdot10^{6}}}=7{,}48\cdot10^{3}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$E_c=\frac{mv^2}{2}=\frac{683\cdot7479^2}{2}=1{,}91\cdot10^{10}\,\mathrm{J}$$

$$E_P=-\frac{GMm}{R}=-\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}\cdot683}{(6{,}37\cdot10^{6}+0{,}76\cdot10^{6})}=-3{,}82\cdot10^{10}\,\mathrm{J}$$

$$E_T=E_c+E_P=-1{,}91\cdot10^{10}\,\mathrm{J}$$

b) Cálculo do módulo do momento angular:

$$R=6{,}37\cdot10^{6}+0{,}76\cdot10^{6}=7{,}13\cdot10^{6}\,\mathrm{m}$$

$$v=7{,}48.10^{3}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$p=mv=683\cdot7{,}48\cdot10^{3}=5{,}11\cdot10^{6}\,\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$$

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}\Rightarrow L=r\cdot m\cdot v\cdot sen\alpha=r\cdot m\cdot v=7{,}13\cdot10^{6}\cdot5{,}1\cdot10^{6}=3{,}64\cdot10^{13}\,\mathrm{kg\cdot m^2\cdot s^{-1}}$$

c) A segunda lei de Kepler dinos que no movemento dun satélite respecto do seu planeta, a velocidade areolar é constante.

Por tratarse dun campo de forzas centrais ($\vec{r}$ e $\vec{F}$ son vectores paralelos), o momento da forza será nulo, co que o momento angular permanece constante. Por este motivo, a velocidade areolar non cambia.

$$\vec{M}_F=\vec{r}x\vec{F}=\vec{0}$$

$$\vec{M}_F=\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{0}\Rightarrow\vec{L}=\overrightarrow{cte};$$

$$v_{areolar}=\frac{dA}{dt}=\frac{L}{2m}=cte$$

8. Sabendo que o período de revolución lunar é de 27,32 días e que o radio da órbita da Lúa é $3{,}84\cdot10^{8}$ m, calcular:

a) A constante de gravitación universal, G.

b) A enerxía cinética e potencial da Lúa respecto da Terra.

c) Se un satélite se sitúa entre a Terra e a Lúa a unha distancia do centro da Terra de $5R_L$. ¿Cal é a relación entre as forzas que exercen a Terra e a Lúa sobre el?.

Datos: Radio medio terrestre: $6{,}37\cdot10^{6}$ m. Masa da Terra: $5{,}98\cdot10^{24}$ kg. Radio da Lúa: $1{,}74\cdot10^{6}$ m. Masa da Lúa: $7{,}35\cdot10^{22}$ kg.

Dato: 27,32 días= $2{,}36\cdot10^{6}$ s

a) Cálculo da constante de Gravitación Universal

$$v = \omega.R = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi\cdot 3{,}84\cdot 10^{8}}{2{,}36.10^{6}}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{G\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{3{,}84\cdot 10^{8}}}$$

$$\left(\frac{2\pi\cdot 3{,}84\cdot 10^{8}}{2{,}36\cdot 10^{6}}\right)^{2} = \frac{G\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{3{,}84\cdot 10^{8}} \Rightarrow G = 6{,}71\cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^{2}\cdot kg^{-2}}$$

b) Cálculo da enerxía cinética e potencial

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{6{,}71\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{3{,}84.10^{8}}} = 1{,}022\cdot 10^{3}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$E_c = \frac{mv^{2}}{2} = \frac{7{,}35\cdot 10^{22}\cdot 1022^{2}}{2} = 3{,}84\cdot 10^{28}\,J$$

$$E_P = -\frac{GMm}{R} = -\frac{6{,}71\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 7{,}35\cdot 10^{22}}{3{,}84\cdot 10^{8}} = -7{,}68\cdot 10^{28}\,\mathrm{J}$$

c) Relación de Forzas

$$F_T = \frac{GM_T m}{{r_T}^{2}} = \frac{GM_T m}{(5R_L)^{2}}$$

$$F_L = \frac{GM_L m}{{r_L}^{2}} = \frac{GM_L m}{(R-5R_L)^{2}}$$

$$\frac{F_T}{F_L} = \frac{\dfrac{GM_T m}{(5R_L)^{2}}}{\dfrac{GM_L m}{(R-5R_L)^{2}}} = \frac{M_T.(R-5R_L)^{2}}{M_L.(5R_L)^{2}} = \frac{5{,}98\cdot 10^{24}\cdot\left(3{,}84\cdot 10^{8} - 5\cdot 1{,}74\cdot 10^{6}\right)^{2}}{7{,}35\cdot 10^{22}\cdot\left(5\cdot 1{,}74\cdot 10^{6}\right)^{2}} = 1{,}5\cdot 10^{5}$$

9. Fobos é un satélite de Marte que xira nunha órbita circular de 9 380 km de radio, respecto ao centro do planeta, cun periodo de revolución de 7,65 horas. Outro satélite de Marte, Deimos, xira nunha órbita de 23 460 km de radio. Determine:

a) A masa de Marte e o período de revolución do satélite Deimos.

b) A enerxía mecánica do satélite Deimos.

c) O módulo do momento angular de Deimos respecto ao centro de Marte.

Datos: G = $6,67 \cdot 10^{-11}$N $m^2 kg^{-2}$; Masa de Deimos = $2,4 \cdot 10^{15}$ kg

a) Cálculo da masa de Marte.

$$v = \omega.R = \frac{2\pi R}{T} = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

$$\frac{4\pi^2 R^2}{T^2} = \frac{GM}{R} \Rightarrow \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2} = M \Rightarrow M = \frac{4\pi^2 \cdot (9{,}38 \cdot 10^6)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} (27540)^2} = 6{,}44 \cdot 10^{23} \text{kg}$$

Cálculo do período de Deimos

$$v = \omega.R = \frac{2\pi R}{T} = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

$$\frac{4\pi^2 R^2}{T^2} = \frac{GM}{R} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{GM}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (2,346 \cdot 10^7)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,44 \cdot 10^{23}}} = 1,089 \cdot 10^5 s = 30,3 \text{ h}$$

b) Cálculo da enerxía mecánica de Deimos

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{GM}{2R}$$

$$E_P = -\frac{GMm}{R}$$

$$E_T = E_c + E_P = -\frac{GMm}{2R} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6{,}44 \cdot 10^{23} \cdot 2{,}4 \cdot 10^{15}}{2 \cdot 23{,}46 \cdot 10^6} = -2{,}20 \cdot 10^{21} \text{J}$$

c) Cálculo do módulo do momento angular:

$$R = 23,46 \cdot 10^6 m$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,44 \cdot 10^{23}}{23,46 \cdot 10^6}} = 1353 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$p = mv = 2,4.10^{15} \cdot 1353 = 3,2 \cdot 10^{18} \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \Rightarrow L = r \cdot m \cdot v \cdot sen\alpha = r \cdot m \cdot v = 23,46 \cdot 10^6 \cdot 3,2 \cdot 10^{18} = 7,5 \cdot 10^{25} \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

10. Nun planeta esférico coa mesma densidade media que a Terra e cun radio que é a metade do terrestre:
a) ¿Cal é a aceleración da gravidade na superficie?
b) ¿Cal sería o período dun satélite que se move nunha órbita circular a unha altura de 400 km respecto da superficie do planeta?
c) ¿Cómo sería a variación do seu campo gravitatorio en profundidade?
Datos: Radio da Terra R_T=6 370 km. Aceleración da gravidade na superficie da Terra g=9,8 m·s^{-2}

a) Cálculo da aceleración da gravidade

$$densidade-planeta=\frac{M}{V}=\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{M}{\frac{4}{3}\pi(\frac{R_T}{2})^3}$$

$$densidade-Terra=\frac{M_T}{V_T}=\frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^{\ 3}}$$

$$\frac{M}{\frac{4}{3}\pi(\frac{R_T}{2})^3}=\frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^{\ 3}}\Rightarrow M=\frac{M_T}{8}$$

$$g=\frac{GM}{R^2}=\frac{G\frac{M_T}{8}}{(\frac{R_T}{2})^2}=\frac{GM_T}{2R_T^2}=\frac{9,8}{2}=4,9\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

b) Cálculo do período da órbita dun satélite a 400 km da superficie.

$$v=\omega\cdot R=\frac{2\pi R}{T}=\sqrt{\frac{GM}{R}}$$

$$\frac{4\pi^2R^2}{T^2}=\frac{GM}{R}\Rightarrow T=\sqrt{\frac{4\pi^2R^3}{GM}}=\sqrt{\frac{4\pi^2R^3}{G\cdot M_T/8}}=\sqrt{32\frac{\pi^2R^3}{GM_T}\cdot\frac{R_T^2}{R_T^2}}=\sqrt{\frac{32\pi^2R^3}{9,8\cdot R_T^2}}$$

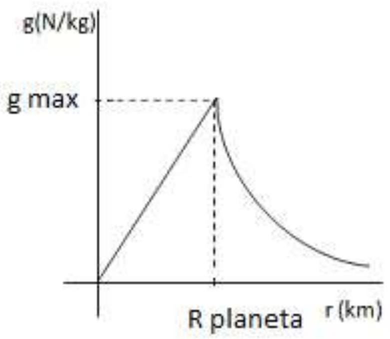
$$T=\sqrt{\frac{32\pi^2\cdot(\frac{6,37\cdot10^6}{2}+4\cdot10^5)^3}{9,8\cdot(6,37\cdot10^6)^2}}=1,57\cdot10^4\text{s}=4,36\text{ h}$$

c) Variación de **g** en profundidade

Si consideramos o planeta como unha esfera homoxénea de densidade constante, podemos deducir que o valor de g varía proporcionalmente con r, polo que o máximo valor será na superficie.

$$d=\frac{M}{V}=\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R_P^{\ 3}}=\frac{M'}{\frac{4}{3}\pi r^3}\Rightarrow M'=\frac{Mr^3}{R_P^{\ 3}}$$

$$g=\frac{GM'}{r^2}=\frac{G\frac{Mr^3}{R_P^{\ 3}}}{r^2}=\frac{GMr}{R_P^{\ 3}}=\frac{GMr}{R_P^{\ 2}R_P}=g_0\cdot\frac{r}{R_P}$$



11. A partir dos seguintes datos do Sistema Solar

Planetas	*Distancia media al Sol (UA)*	*Período orbital (anos)*	$R_{planeta}/R_T$	*Masa*/M_T
Mercurio	0,387	0,240 8	0,386	0,055
Venus	0,723	0,615 2	0,949	0,815
Terra	1,00	1,00	1,00	1,00
Marte	1,52	1,881	0,532	0,107
Xúpiter	5,20	11,86	11,2	318
Saturno	9,54	29,45	9,45	95
Urano	19,2	84,02	4,01	14
Neptuno	30,1	164,8	3,88	17

a) Calcular o valor da constante da terceira lei de Kepler para Marte, Saturno e Neptuno.
b) Calcula a masa do Sol
c) Calcula a aceleración da gravidade na superficie de Venus.

Datos: 1UA=$1,496\cdot10^{11}$m; G = $6,67\cdot10^{-11}$N m^2 kg^{-2}.Campo gravitatorio na superficie da Tierra: 9,8 N·Kg^{-1}

a) 3ª Lei de Kepler: $T^2 \alpha R^3$

$$v = \omega R = \frac{2\pi R}{T} = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

$$\frac{4\pi^2 R^2}{T^2} = \frac{GM}{R} \Rightarrow \frac{T^2}{R^3} = cte = \frac{4\pi^2}{GM}$$

$$Marte \rightarrow \frac{T^2}{R^3} = \frac{1,881^2}{1,52^3} = 1,0075 \text{ anos}^2 \cdot \text{UA}^{-3}$$

$$Saturno \rightarrow \frac{T^2}{R^3} = \frac{29,45^2}{9,54^3} = 0,9989 \text{ anos}^2 \cdot \text{UA}^{-3}$$

$$Neptuno \rightarrow \frac{T^2}{R^3} = \frac{164,8^2}{30,1^3} = 0,9959 \text{ anos}^2 \cdot \text{UA}^{-3}$$

Calculamos o valor medio da constante: $1,0008 \text{ anos}^2 \cdot UA^3 = 2,97 \cdot 10^{-19} \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$

b) Cálculo da masa do Sol

$$cte = \frac{4\pi^2}{GM} = 2,97 \cdot 10^{-19} \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$$

$$M_{Sol} = \frac{4\pi^2}{G \cdot 2,97 \cdot 10^{-19}} = 1,99 \cdot 10^{30} \text{kg}$$

c) Aceleración da gravidade en Venus

$$g = \frac{GM_{Venus}}{R_{Venus}{}^2} = \frac{G \cdot 0,815 M_T}{(0,949 R_T)^2} = \frac{GM_T \cdot 0,905}{R_T^2} = 9,8 \cdot 0,905 = 8,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

12. A ISS (*International Space Station*) é o resultado da colaboración internacional para construír e manter unha plataforma de investigación con presenza humana de larga duración no espazo. Se a masa da ISS é de $3,7\cdot10^5$ kg e describe unha órbita circular arredor da Terra a unha distancia de $3,59\cdot10^5$ m da súa superficie, calcular:

a) A velocidade orbital da ISS e o tempo que tarda en dar unha volta arredor da Terra.

b) A enerxía mecánica da ISS.

c) A forza gravitatoria sobre un astronauta de 80 kg de masa que se atope na ISS.

Datos: Constante de Gravitación Universal $G = 6,67\cdot10^{-11}$N m^2 kg^{-2}

Masa da Terra M_T= $5,98\cdot10^{24}$kg;Radio da Terra R_T= 6 370 km

a) Cálculo da velocidade orbital e do período.

$$F_g = m.a_c \Rightarrow G\frac{M_T m}{R^2} = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow G\frac{M_T}{R} = v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{R}} = \sqrt{\frac{6,67\cdot10^{-11}\cdot5,98\cdot10^{24}}{(6,37\cdot10^6 + 3,59\cdot10^5)}} = 7700 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$v = \omega.R = \frac{2\pi R}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi(6,37\cdot10^6 + 3,59\cdot10^5)}{7700} = 5490 \text{ s} = 1,52 \text{ h}$$

b) Cálculo da enerxía mecánica

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{GM}{2R}$$

$$E_P = -\frac{GMm}{R}$$

$$E_T = E_c + E_P = -\frac{GMm}{2R} = -\frac{6,67.10^{-11}.5,98.10^{24}3,7.10^5}{2.6,729.10^6} = -1,09.10^{13}\text{J}$$

c) Forza gravitatoria

$$F_g = m.g = m\frac{GM_T}{R^2} = 80\frac{6,67\cdot10^{-11}\cdot5,98\cdot10^{24}}{(6,729\cdot10^6)^2} = 705 \text{ N}$$

13. Un cometa de masa 10^{12}kg achégase ó Sol dende un punto moi afastado do sistema solar, podéndose considerar que a súa velocidade inicial é nula.

a) Calcula-la súa velocidade no perihelio (situado a unha distancia aproximada de cen millóns de quilómetros do Sol)

b) Calcula-la enerxía potencial cando cruce a órbita da Terra (a unha distancia r=1,5·10^8km).

c) Calcula o valor do módulo do momento angular no perihelio.

Datos: Masa do Sol: 2·10^{30}kg; G=6'67·10^{-11}N·m^2·kg^{-2}

a) Se o lugar de onde provén o cometa está moi afastado do sistema solar, podemos considerar que a distancia é infinita, e, polo tanto, a enerxía potencial será nula, o mesmo que a enerxía total, pois a velocidade inicial era cero.

No perihelio, ten unha enerxía potencial negativa que imos calcular, e que ten que ser contrarrestada, en base ó principio de conservación da enerxía, pola enerxía cinética, positiva. A partir desta, calculámo-la velocidade:

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{GM}{2R}$$

$$E_P = -\frac{GMm}{R}$$

$$E_c + E_P = 0; -\frac{GMm}{2R} + \frac{mv^2}{2} = 0; v = \sqrt{2\frac{GM}{R}} = 5,2 \cdot 10^4\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

b) Para a enerxía potencial ó cruzar a órbita da Terra, é indiferente de onde proceda o cometa, tendo que restablecer só a ecuación correspondente: $E_P = -\frac{GMm}{R}$

Entón, só nos resta substituí-los datos da masa do Sol, a do cometa e a distancia ó Sol cando cruza a órbita da Terra, xunto coa constante de gravitación universal:

$$E_P = -\frac{GMm}{R} = -8,9 \cdot 10^{20}\,\mathrm{J}$$

c) O módulo do momento angular no perihelio sería

$$L = r \cdot m \cdot v = 1 \cdot 10^{11} \cdot 10^{12} \cdot 5,2 \cdot 10^4 = 5,2 \cdot 10^{27}\,\mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}}$$

14. Nun planeta cun radio que é a metade do radio terrestre, a aceleración da gravidade na súa superficie vale 5 m s^{-2}. Calcular:

a) A relación entre as masas do planeta e da Terra.

b) A velocidade de escape para un corpo situado nese planeta (R_T= 6 370 km)

c) A altura a que é necesario deixar caer un obxecto no planeta, para que chegue á súa superficie coa mesma velocidade coa que o fai na Terra, cando cae dende unha altura de 100 m.

(Na Terra: g =10 m s^{-2})

a) A intensidade do campo gravitatorio vén dada pola expresión: $g = \dfrac{GM}{R^2}$

a gravidade na superficie do planeta é : g_p = 5 m·s^{-2}

a gravidade na superficie da Terra é: g_T = 10 m·s^{-2}

Despexando as masas do planeta e a Terra nestas expresións queda:

$$\left.\begin{aligned} M_P &= 5\frac{R_P^2}{G} = 5\frac{(R_T/2)^2}{G} = \frac{5}{4}\frac{R_T^2}{G} \\ M_T &= 10\frac{R_T^2}{G} \end{aligned}\right\} \frac{M_P}{M_T} = \frac{\frac{5}{4}\frac{R_T^2}{G}}{10\frac{R_T^2}{G}} = 0{,}125$$

b)

$$E_c + E_P = E_\infty = 0 \Rightarrow \frac{mv^2}{2} - \frac{GM_P m}{R_P} = 0$$

$$v_{escape} = \sqrt{\frac{2GM_P}{R_P}} = \sqrt{\frac{2G\cdot 0{,}125M_T}{R_T/2}} = \sqrt{\frac{2G\cdot 0{,}125M_T R_T}{(\frac{R_T}{2}).R_T}} \sqrt{\frac{2\cdot 10\cdot 0{,}125R_T}{1/2}} = 5{,}64\cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}$$

c) A velocidade coa que chega ó chan un corpo que cae dende una altura " h", sen velocidade inicial, na que a intensidade do campo gravitatorio poida considerarse constante, vén dada pola expresión

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 100} = 44{,}7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

No planeta para que chegue con esa velocidade terá que caer dende a altura seguinte:

$$v = \sqrt{2gh}; 44{,}7 = \sqrt{2\cdot 5\cdot h}; h = 200 \text{ m}$$

15. Un satélite de comunicacións de 1 t describe órbitas circulares arredor da Terra cun período de 90 minutos. Calcular:

a) A altura á que se atopa sobre a Terra.

b) A velocidade orbital

c) A enerxía total.

Datos: R_T=6 400 km; M_T=5,98·10^{24} kg; G=6,67·10^{-11} N m^2kg^{-2}

a) A forza centrípeta que fai varia-la dirección da velocidade do satélite é a forza gravitatoria que exerce a Terra sobre o satélite a esa distancia do seu centro:

$$F_g = m \cdot a_c$$

$$G\frac{M\cdot m}{R^2} = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow v^2 = G\frac{M}{R}$$

Por outro lado sabemos que : $v = \omega \cdot R = \frac{2\pi}{T}.R$

de onde $G\frac{M}{R} = (\frac{2\pi}{T}\cdot R)^2 ; R^3 = \frac{G\,M\cdot T^2}{4\pi^2}$

Substituíndo nesta expresión os datos que temos en unidades do Sistema Internacional obtémos valor de R

$$R = \sqrt[3]{\frac{G\cdot M\cdot T^2}{4\pi^2}} = 6{,}647\cdot 10^6 m; R = R_T + h; h = R - R_T = 2{,}47\cdot 10^4 \text{m}$$

b) A velocidade orbital pode calcularse como:

$$F_g = m \cdot a_c$$

$$G\frac{M\cdot m}{R^2} = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow v^2 = G\frac{M}{R} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = 7,73\cdot 10^3 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Ou ben como: $v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi\cdot 6,45\cdot 10^6}{5400} = 7,73\cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

c) A enerxía total do satélite é a suma das súas enerxías cinética e potencial

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{GM}{2R}$$

$$E_P = -\frac{GMm}{R}$$

$$E_T = E_c + E_P = -\frac{GMm}{2R} = -\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 1000}{2\cdot 6{,}47\cdot 10^6} = -3{,}08\cdot 10^{13} \text{J}$$

16. Un corpo de masa 1 000 kg xira a 200 km por enriba da superficie da Terra.
a) ¿Cal é a aceleración da gravidade a esa altura?
b) ¿Cal é o valor do potencial gravitatorio a esa altura?
c) ¿Cal é o valor da enerxía total?
Datos: g_0= 9,81 m s^{-2}; R_T= 6 370 km

a) Para determinar o valor de *g* a esa altura

$$F_g = m{\cdot}a_c = m{\cdot}g$$

$$G\frac{M_T m}{R^2} = m{\cdot}g \Rightarrow g = G\frac{M_T}{R^2}$$

$$g = G\frac{M_T}{R^2}{\cdot}\frac{R_T^2}{R_T^2} = g_0{\cdot}\frac{R_T^2}{R^2} \Rightarrow g = 9,81{\cdot}\frac{(6,370{\cdot}10^6)^2}{(6,570{\cdot}10^6)^2} = 9,22\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

b) O potencial gravitatorio:

$$V = -G\frac{M_T}{R} = -\frac{g_0{\cdot}R_T^2}{R} = -\frac{9,81{\cdot}(6,370{\cdot}10^6)^2}{6,570{\cdot}10^6} = -6,06{\cdot}10^7\,\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$$

c) A enerxía total será :

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{GM}{2R}; \qquad E_P = -\frac{GMm}{R}$$

$$E_T = E_c + E_P = -\frac{GMm}{2R}$$

$$E_T = -\frac{GMm}{2R}{\cdot}\frac{R_T^2}{R_T^2} = -\frac{g_0{\cdot}m.R_T^2}{2R} = -\frac{9,81{\cdot}1000{\cdot}(6,370{\cdot}10^6)^2}{2.6,570{\cdot}10^6} = -3,03.10^{10}\,\text{J}$$

A enerxía total será negativa por tratarse dun campo atractivo e considerar o valor de referencia 0 para a enerxía no infinito.

17. Sabendo que o planeta Venus tarda 224,7 días en dar unha volta completa arredor do Sol e que a distancia de Neptuno ó Sol é $4,504{\cdot}10^9$ km así como que a Terra invirte 365,256 días en dar unha volta completa arredor do Sol e que a súa distancia a este é $1,495{\cdot}10^8$ km. Calcular:
a) Distancia de Venus ó Sol.
b) Duración dunha revolución completa de Neptuno arredor do Sol.
c) Velocidade orbital de Neptuno arredor do Sol.

a) A 3ª lei de Kepler dinos que T^2 é proporcional a R^3 sendo T o período de revolución do planeta e R o radio da súa órbita. Aplicando esto á Terra e a Venus teremos

$$T_T^{\ 2} = cte{\cdot}R_T^{\ 3}; T_V^{\ 2} = cte{\cdot}R_V^{\ 3}$$

$$\frac{T_T^{\ 2}}{T_V^{\ 2}} = \frac{R_T^{\ 3}}{R_V^{\ 3}} \Rightarrow R_V^{\ 3} = \frac{T_V^{\ 2}}{T_T^{\ 2}}{\cdot}R_T^{\ 3} \Rightarrow R_V = 108,14{\cdot}10^6\ \text{km}$$

b) Facendo o mesmo coa Terra e Neptuno obteremos $T_N^{\ 2} = \frac{R_N^{\ 3}}{R_T^{\ 3}}{\cdot}T_T^{\ 2} = 5,21{\cdot}10^9 s = 165$ anos

c) Cálculo da velocidade orbital: $v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi{\cdot}4,504{\cdot}10^9}{5,21{\cdot}10^9} = 5,43\cdot10^3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

18. Un satélite artificial de 200 kg describe unha órbita circular a 400 km de altura sobre a superficie terrestre. Calcula:
a) O valor da gravidade a esa altura
b) Enerxía mecánica.
c) A velocidade que se lle comunicou na superficie da Terra para colocalo nesa órbita.
Datos: $G = 6{,}67\cdot10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$; $M_T = 5{,}98\cdot10^{24}$ kg ; $R_T = 6\ 370$ km

a) O valor da gravidade :

$$F_g = m\cdot a_c = m\cdot g$$

$$G\frac{M_T m}{R^2} = m\cdot g \Rightarrow g = G\frac{M_T}{R^2} = 8{,}70\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

b) A enerxía mecánica é a suma da enerxía cinética e a potencial

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{GM}{2R}$$

$$E_P = -\frac{GMm}{R}$$

$$E_T = E_c + E_P = -\frac{GMm}{2R} = -5{,}89\cdot10^9\ \text{J}$$

c) Aplicando o principio de conservación da enerxía ó momento do lanzamento:

$$E_m = \frac{mv_{saída}^2}{2} - \frac{GM_T m}{R_T} = -5{,}89\cdot10^9\ \text{J}$$

$$v_{saída} = 8{,}14\cdot10^3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

19. Un satélite cunha masa de 300 kg móvese nunha órbita circular a $5 \cdot 10^{7}$ m por enriba da superficie terrestre.

a) ¿Cal é a forza da gravidade sobre o satélite?.

b) ¿Cal é o período do satélite?

c) ¿Cal é a enerxía mecánica do satélite na órbita?

Datos: g_0= 9,81 m·s^{-2}; R_T= 6 370 km

a) Calculamos o valor do módulo da forza de atracción gravitatoria:

$$F_g = G\frac{M_T m}{R^2} = G\frac{M_T m}{R^2}\cdot\frac{R_T^2}{R_T^2} = \frac{g_0 \cdot m \cdot R_T^2}{R^2} = 37{,}38\text{N}$$

b) Para o satélite que orbita a forza centrípeta é igual á forza gravitatoria antes calculada.

$$F_g = m \cdot a_c$$

$$F_g = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{F_g \cdot R}{m}} = 2657 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$v = \frac{2\pi R}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi R}{v} = 1{,}33 \cdot 10^4 s = 37 \text{ h}$$

c) Enerxía mecánica

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{GM}{2R}$$

$$E_P = -\frac{GMm}{R}$$

$$E_T = E_c + E_P = -\frac{GMm}{2R} = -\frac{GMm}{2R}\cdot\frac{R_T^2}{R_T^2} = -\frac{g_0 m.R_T^2}{2R} = -1{,}06 \cdot 10^9 \text{ J}$$

20. Un astronauta de 75 kg xira nun satélite artificial onde a súa órbita dista h da superficie da Terra. Calcular:

a) O período de dito satélite.

b) A forza gravitatoria sobre dito astronauta.

c) A Enerxía mecánica do astronauta

Datos: g_0= 9,81 m·s^{-2}; h= R_T= 6 370 km

a) O período do satélite calculase a partir da velocidade orbital:

$$F_g = m{\cdot}a_c$$

$$G\frac{M.m}{R^2} = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow v^2 = G\frac{M}{R} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GMR_T^2}{R.R_T^2}} = \sqrt{\frac{g_0R_T^2}{R}} = 5590\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

$$v = \frac{2\pi R}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi R}{v} = 1,43{\cdot}10^4\,\mathrm{s} = 4\ \mathrm{h}$$

b) Cálculo da forza sufrida:

$$F_g = m{\cdot}a_c$$

$$F_g = \frac{mv^2}{R} = \frac{75{\cdot}5590^2}{1,274{\cdot}10^6} = 184\mathrm{N}$$

c) Enerxía mecánica

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{GM}{2R}$$

$$E_P = -\frac{GMm}{R}$$

$$E_T = E_c + E_P = -\frac{GMm}{2R} = -\frac{GMm}{2R}{\cdot}\frac{R_T^2}{R_T^2} = -\frac{g_0m.R_T^2}{2R} = -1,18{\cdot}10^9\,\mathrm{J}$$

21. Quérese poñer nunha órbita de radio r= 5R/3 un satélite artificial de masa 10 kg, sendo R=6 370 km. Calcular:

a) A velocidade de lanzamento.
b) A enerxía total do mesmo.
c) A velocidade de escape dende a Terra.

Dato: g_0= 9,81 m·s^{-2}

a) A enerxía mecánica é a suma da enerxía cinética e a potencial

$$E_T = E_c + E_P = -\frac{GMm}{2R} = -\frac{GMm}{2R}\cdot\frac{R_T^2}{R_T^2} = -\frac{g_0 m.R_T^2}{2R}$$

Aplicando o principio de conservación da enerxía, esta será a mesma que no momento de ser lanzado:

E_M [na órbita]= E_C + E_P [no lanzamento]

$$-\frac{g_0 m.R_T^2}{2R} = -\frac{GMm}{R_T} + \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = 9,37{\cdot}10^3 \,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

b) A enerxía total será como xa vimos

$$E_T = -\frac{g_0 m{\cdot}R_T^2}{2R} = -\frac{g_0 m.R_T^2}{2\left(\frac{3}{5}R_T\right)^2} = -1{,}88{\cdot}10^8 \,\mathrm{J}$$

c) A velocidade de escape obténse:

$$E_c + E_P = E_\infty = 0 \Rightarrow \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{R} = 0$$

$$v_{escape} = \sqrt{\frac{2GM}{R_T}} = 1{,}11{\cdot}10^4 \,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

22. Se o radio da Lúa é unha cuarta parte do da Terra,

a) Calcula a súa masa.

b) Calcula o radio da órbita arredor da Terra.

c) Calcula a velocidade orbital da Lúa

Datos: g_L = 1,7 m·s^{-2}; g_T= 9,8 m·s^{-2} ; M_T = 5,98·10^{24}kg; R_T=6 370 km;

Período da Lúa arredor da Terra = 2,36·10^{6}s

a) A intensidade do campo gravitatorio nas superficies da Lúa e a Terra é:

$$F_g = m{\cdot}a_c = m{\cdot}g \Rightarrow G\frac{Mm}{R^2} = m{\cdot}g$$

$$g_T = G\frac{M_T}{R_T^2} = 9{,}8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$g_L = G\frac{M_L}{R_L^2} = 1{,}7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

dividindo unha pola outra e substituíndo a masa da Terra teremos

$$\frac{g_T}{g_L} = \frac{G\frac{M_T}{R_T^2}}{G\frac{M_L}{R_L^2}} \Rightarrow \frac{9{,}8}{1{,}7} = \frac{\frac{M_T}{R_T^2}}{\frac{M_L}{\left(\frac{R_T}{4}\right)^2}} \Rightarrow M_L = 6{,}46{\cdot}10^{22}\,\text{kg}$$

b) A forza centrípeta que fai varia-la dirección da velocidade do satélite é a forza gravitatoria que exerce a Terra sobre o satélite a esa distancia do seu centro:

$$F_g = m_L{\cdot}\,a_c$$

$$G\frac{M_T{\cdot}\,m_L}{R^2} = \frac{m_L v^2}{R} \Rightarrow v^2 = G\frac{M_T}{R}$$

Por outro lado sabemos que : $v = \omega\,R = \frac{2\pi}{T}{\cdot}R;\;\; G\frac{M_T}{R} = \left(\frac{2\pi}{T}{\cdot}R\right)^2; R^3 = \frac{G{\cdot}M_T{\cdot}T^2}{4\pi^2}$

Substituíndo nesta expresión os datos que temos en unidades do Sistema Internacional obtémos o valor de R

$$R_{TL} = \sqrt[3]{\frac{G{\cdot}M_T{\cdot}T^2}{4\pi^2}{\cdot}\frac{R_T^2}{R_T^2}} = \sqrt[3]{\frac{g_0{\cdot}R_T^2{\cdot}T^2}{4\pi^2}} = 3{,}83{\cdot}10^8\,\text{m}$$

c) Cálculo da velocidade orbital

$$F_g = m_L{\cdot}a_c$$

$$G\frac{M_T{\cdot}m_L}{R^2} = \frac{m_L v^2}{R} \Rightarrow v^2 = G\frac{M_T}{R} \Rightarrow v = \sqrt{G\frac{M_T}{R}} = \sqrt{\frac{g_0{\cdot}R_T^2}{R}} = 1{,}02{\cdot}10^3\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

23. Calcular:

a) A enerxía cinética que debería ter unha persoa de 70kg para orbitar arredor da Terra a unha altura 0.

b) ¿Canta enerxía sería necesaria para elevala a unha órbita estable a 6 370 km de altura?

c) ¿Cal sería o valor da gravidade a esa altura

Datos:R_T: 6 370 km;G=6,67· 10^{-11} N·m^2·Kg^{-2};M_T=5,98·10^{24} kg.

a) Para que dera voltas sen caer tería que suceder que a súa forza centrípeta fose igual á gravitatoria

$$F_g = m \cdot a_c$$

$$G\frac{M_T \cdot m}{R_T^2} = \frac{mv^2}{R_T} \Rightarrow v^2 = G\frac{M_T}{R_T}$$

A súa enerxía cinética sería:

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{GM_Tm}{2R_T} = 2{,}19 \cdot 10^9 \text{ J}$$

b) Cando está na órbita a 6 370 km da superficie da Terra terá unha enerxía total:

$$E_T = E_c + E_P = -\frac{GMm}{2R} = -1{,}10 \cdot 10^9 \text{ J}$$

ista enerxía será igual á suma da enerxía potencial na superficie da Terra e da enerxía cinética que lle temos que comunicar para poñela en órbita

$$E_{CT} = E_{Mórbita} - E_{PT} = -\frac{GMm}{2R} - \left(-\frac{GMm}{R_T}\right) = -1{,}10 \cdot 10^9 + 4{,}38 \cdot 10^9 = 3{,}28 \cdot 10^9 \text{ J}$$

c) A gravidade nese punto será:

$$F_g = m \cdot a_c = m \cdot g \Rightarrow G\frac{Mm}{R^2} = m \cdot g$$

$$g = G\frac{M}{R^2} = 2{,}46 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

24. Calcular:

a) A velocidade que leva na súa órbita un satélite xeoestacionario.

b) A distancia da Terra a que se atopa.

c) Se fora lanzado cun canon dende a Terra, desprezando o rozamento atmosférico, calcular a velocidade de lanzamento necesaria.

Datos: G = $6,67\cdot10^{-11}$ N·m2·kg^{-2} ; $M_T = 5,98\cdot10^{24}$ kg ; R_T = 6 370 km

a) Xeoestacionario significa que está sempre sobre o mesmo punto, o cal implica que o seu período de rotación ten que ser igual ó da Terra e o plano da súa órbita perpendicular á superficie no Ecuador.

$$v = \frac{2\pi R}{T} \Rightarrow R = \frac{v\cdot T}{2\pi} = \frac{v\cdot 86400}{2\pi}$$

$$F_g = m\cdot a_c$$

$$G\frac{M\cdot m}{R^2} = \frac{m\cdot v^2}{R} \Rightarrow v^2 = G\frac{M}{R} \Rightarrow R = \frac{G\cdot M}{v^2}$$

$$\frac{v\cdot 86400}{2\pi} = \frac{G\cdot M}{v^2} \Rightarrow v = \sqrt[3]{\frac{G\cdot M\cdot 2\pi}{86400}} = 3,07\cdot10^3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

b) A distancia á que se atopa

$$R = \frac{G\cdot M}{v^2} = 4,23\cdot10^7\,\mathrm{m}$$

c) A enerxía mecánica do satélite estacionario será:

$$E_T = E_c + E_P = -\frac{GMm}{2R} = -m\cdot 4,71\cdot10^6\,\mathrm{J}$$

Para efectuar o lanzamento dende a Terra:

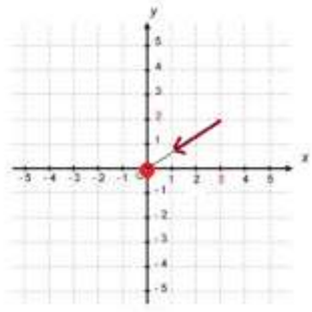
$$E_{CT} = E_{M\acute{o}rbita} - E_{PT} = -\frac{GMm}{2R} - \left(-\frac{GMm}{R_T}\right) = -m\cdot 4,71\cdot10^6 + m\cdot 6,26\cdot10^7$$

$$E_{CT} = m\cdot 5,79\cdot10^7\,\mathrm{J}$$

$$\frac{m\cdot v^2}{2} = m\cdot 5,79\cdot10^7 \Rightarrow v = 1,08\cdot10^4\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

25. Unha masa de 8 kg está situada na orixe de coordenadas. Calcular:
a) A intensidade e o potencial do campo gravitatorio no punto (3,2) (S.I).
b) A forza con que atraería a unha masa de 2 kg.
c) O traballo realizado pola forza gravitatoria ao trasladar a masa de 2 kg dende o infinito ata o punto (3,2).
Dato: G = 6,67·10^{-11}N m^{2}kg^{-2}.

a) Intensidade en (3,2)



$$\vec{g} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r = -6,67\cdot 10^{-11}\frac{8}{(\sqrt{9+4})^2}\cdot\frac{3\vec{i}+2\vec{j}}{\sqrt{9+4}} = -6,67\cdot 10^{-11}\frac{8}{13}\cdot\frac{3\vec{i}+2\vec{j}}{\sqrt{13}} =$$

$$= -3,41\cdot 10^{-11}\vec{i} - 2,27\cdot 10^{-11}\vec{j}(\mathrm{N\cdot kg^{-1}})$$

$$|\vec{g}| = 4,09.10^{-11}(\mathrm{N\cdot kg^{-1}})$$

Potencial gravitatorio en (3,2)

$$V = -G\frac{M}{r} = -6,67\cdot 10^{-11}\frac{8}{\sqrt{13}} = -1,48\cdot 10^{-10}\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}}$$

b) Forza sobre unha masa de 2 kg

$$\vec{F} = m\cdot\vec{g} = 2\cdot(-3,41\cdot 10^{-10}\vec{i} - 2,27\cdot 10^{-11}\vec{j}) =$$

$$= -6,82\cdot 10^{-11}\vec{i} - 4,54\cdot 10^{-11}\vec{j}(\mathrm{N})$$

$$|\vec{F}| = 8,18\cdot 10^{-11}(\mathrm{N})$$

c) Traballo para trasladar a masa dende o infinito ata o punto (3,2)

$$W_{\infty}^{P} = -\Delta E_P = -\Delta V\cdot m = -(V_P - V_{\infty})\cdot m = -V_P\cdot m = -(-1,48\cdot 10^{-10})\cdot 2 = 2,96\cdot 10^{-10}\,\mathrm{J}$$

O traballo é positivo, o que representa que son as forzas do campo gravitatorio as que realizan o traballo.

26. Dúas partículas de masas M_1 e $M_2 = 9\ M_1$ están separadas unha distancia d =3 m. No punto P, situado entre elas, o campo gravitatorio total creado por estas partículas é nulo.

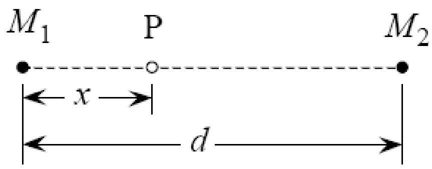
a) Calcula a distancia x entre P y M_1.

b) Calcula o valor do potencial gravitatorio no punto P en función de M_1.

c) Explica o concepto de intensidade de campo gravitatorio creado por unha ou varias partículas.

Dato: G = $6{,}67\cdot10^{-11}$N·m²·kg⁻².

a) Distancia entre P y M_1.



$$\vec{g}_P = \vec{0} \Rightarrow \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = \vec{0}$$

$$-G\frac{M_1}{r_1^2}\vec{u}_{r1} + \left(-G\frac{M_2}{r_2^2}\vec{u}_{r2}\right) = 0$$

$$-6{,}67{\cdot}10^{-11}\frac{M_1}{x^2}\vec{i} + \left(-6{,}67{\cdot}10^{-11}\frac{9M_1}{(3-x)^2}\right)(-\vec{i}) = 0$$

$$\frac{1}{9} = \frac{x^2}{(3-x)^2};\frac{1}{3} = \frac{x^2}{(3-x)};x = 0{,}75\text{m}$$

b) Potencial en P

$$V = V_1 + V_2 = -G\frac{M_1}{r_1} + (-G\frac{M_2}{r_2}) = -G\frac{M_1}{0{,}75} + \left(-G\frac{9M_1}{2{,}25}\right)$$

$$-6{,}67{\cdot}10^{-11}\frac{6M_1}{2} = --3{,}56{\cdot}10^{-10}M_1\ (\text{J}\cdot\text{kg}^{-1})$$

c) <u>Intensidade de campo gravitatorio creado por unha ou varias partículas</u>.

A intensidade de campo gravitatorio representa a forza gravitatoria exercida por unha masa M sobre a unidade de masa colocada nese punto.

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r\left(\text{N}\cdot\text{kg}^{-1}\right)$$

Onde $\mathbf{u_r}$ representa un vector unitario con dirección radial e sentido dende o centro da masa que crea o campo, M, cara o punto P. O signo negativo representa o carácter atractivo do campo gravitatorio.

Cando son varias as partículas que están producindo un campo de atracción gravitatorio en P, o campo resultante, por aplicación do principio de superposición, será a suma vectorial de cada un dos campos individuais creados en ese punto por cada unha das masas.

$$\vec{g}_P = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3 + \ldots + \vec{g}_n = \sum_{i=1}^{n}\vec{g}_i = \sum_{i=1}^{n}\left(-G\frac{M_i}{r_i^2}\vec{u}_r\right)(\text{N}\cdot\text{kg}^{-1})$$

27. Un obxecto de masa m_1 está situado na orixe de coordenadas, e un segundo obxecto está no punto coordenadas (5, 0) m. Considerando unicamente a interacción gravitatoria e supoñendo que son masas puntuais, calcula:

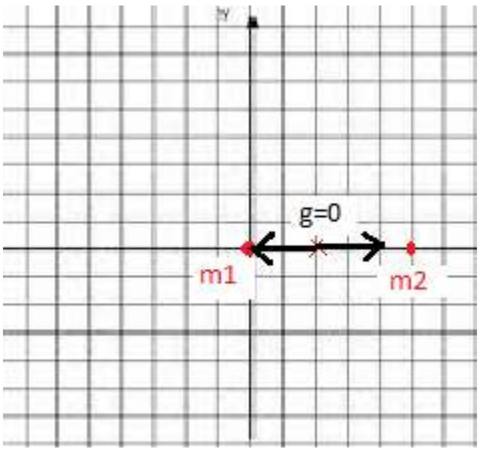
a) A relación entre as masas m_1/m_2 se o campo gravitatorio no punto (2, 0) m é nulo.

b) O módulo, dirección e sentido do momento angular da masa m_2 con respecto da orixe de coordenadas se m_2 = 100 kg e a súa velocidade é (0, 100) ms^{-1}.

c) O valor do potencial gravitatorio no punto (2, 2).

Dato: G =$6{,}67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$.

a) Relación entre masas.



$$\vec{g}_P = 0 \Rightarrow \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = 0$$

$$-G\frac{M_1}{r_1^2}\vec{u}_{r1} + \left(-G\frac{M_2}{r_2^2}\vec{u}_{r2}\right) = 0$$

$$-6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{M_1}{2^2}\vec{i} + \left(6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{M_2}{(3^2)}\right)(-\vec{i}) = 0$$

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{4}{9}$$

b) Momento angular

$$\vec{p} = M_2\vec{v} = 100 \cdot 100\vec{j} = 10^4\vec{j}(\text{kg m s}^{-1})$$

$$\vec{r}_2 = 5\vec{i}m$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = 5\vec{i} \times 10^4\vec{j} = 5 \cdot 10^4\vec{k}(\text{kg m}^2\ \text{s}^{-1})$$

$$\left|\vec{L}\right| = 5 \cdot 10^4 \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

c) Potencial gravitatorio en (2, 2)

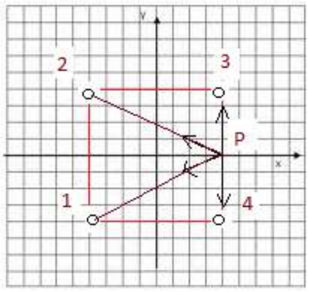
$$V = V_1 + V_2 = -G\frac{M_1}{r_1} + (-G\frac{M_2}{r_2}) = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{44{,}4}{\sqrt{8}} + (-6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{100}{\sqrt{13}})$$

$$V = -2{,}90 \cdot 10^{-9}\,\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$$

28. Sitúanse catro masas puntuais idénticas, de 5 kg nos vértices dun cadrado de lado 1 m. Calcular:
a) O campo gravitatorio creado polas catro masas no centro de cada lado do cadrado.
b) O campo gravitatorio creado polas catro masas no centro do cadrado.
c) O traballo necesario para levar a unidade de masa dende o centro do cadrado ata un punto onde non existise atracción gravitatoria. Explica o significado físico deste resultado
Dato: G = $6{,}67\cdot10^{-11}$N·m²·kg⁻².

a) Cálculo do campo gravitatorio no centro dun lado.

Dacordo co esquema da figura, os campos gravitatorios creados polas masas 3 e 4 anúlanse por ser de sentido contrario.



$$\vec{g}_P = \vec{g}_{1P} + \vec{g}_{2P} + \vec{g}_{3P} + \vec{g}_{4P} = \vec{g}_{1P} + \vec{g}_{2P} = -G\frac{M_1}{r_{1P}^2}\vec{u}_{r1P} + \left(-G\frac{M_2}{r_{2P}^2}\vec{u}_{r2P}\right) =$$

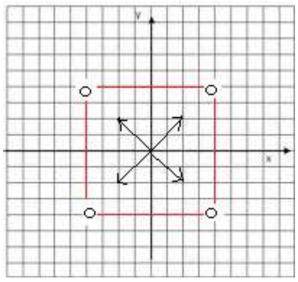
$$= -6{,}67{\cdot}10^{-11}\frac{5}{(\sqrt{1^2+0{,}5^2})^2}\frac{\vec{i}+0{,}5\vec{j}}{\sqrt{1^2+0{,}5^2}} + (-6{,}67{\cdot}10^{-11}\frac{5}{(\sqrt{1^2+0{,}5^2})^2}\frac{\vec{i}-0{,}5\vec{j}}{\sqrt{1^2+0{,}5^2}} =$$

$$= -2{,}38{\cdot}10^{-10}(\vec{i}+0{,}5\vec{j}+\vec{i}-0{,}5\vec{j}) = -4{,}77{\cdot}10^{-10}\vec{i}\,(\mathrm{N\cdot kg^{-1}})$$

$$g = 4{,}77{\cdot}10^{-10}\,\mathrm{N\cdot kg^{-1}}$$

b) Cálculo do campo gravitatorio no centro do cadrado. Dado que todas as masas son iguais e están a mesma distancia, o campo no centro do cadrado é nulo.

$$\vec{g}_O = \vec{g}_{1O} + \vec{g}_{2O} + \vec{g}_{3O} + \vec{g}_{4O} = \vec{O}$$



c) Traballo para levar a unidade de masa dende O ata o infinito

$$W_O^\infty = -\Delta E_P = -\Delta V{\cdot}m = -(V_\infty - V_O){\cdot}m = V_O{\cdot}m$$

$$V_O = V_{1O} + V_{2O} + V_{3O} + V_{4O} = -G\frac{M_1}{r_{1O}} - G\frac{M_2}{r_{2O}} - G\frac{M_3}{r_{3O}} - G\frac{M_4}{r_{4O}} = 4\left(-G\frac{5}{\sqrt{0{,}5^2+0{,}5^2}}\right)$$

$$V_O = 4\left(-6{,}67{\cdot}10^{-11}\frac{5}{\sqrt{0{,}5}}\right) = -1{,}88{\cdot}10^{-9}\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}}$$

$$W_O^\infty = V_O{\cdot}m = -1{,}88{\cdot}10^{-9}{\cdot}1 = -1{,}88{\cdot}10^{-9}\,\mathrm{J}$$

O traballo é negativo, o que representa que é un traballo realizado polas forzas externas.

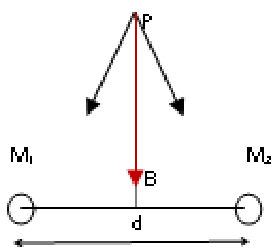
29. Unha masa m (1 000 kg) móvese no campo gravitatorio creado por duas masas iguais, M_1 e M_2 ($M_1 = M_2 = 1{,}0 \cdot 10^{24}$ kg), situadas nos puntos (-4, 0) e (4, 0) (coordenadas no S.I). Cando m se atopa no punto P (0, 5) m ten unha velocidade de $-200\vec{j}\,\text{ms}^{-1}$. Calcular:

a) O módulo, dirección e sentido da forza que actúa sobre m en P.

b) O módulo da velocidade de m cando pasa polo punto B (0, 0).

Dato: Constante de Gravitación Universal $G= 6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$.

a) Cálculo da forza en P.



$$\vec{F}_P = m.\vec{g}_P = m(\vec{g}_{1P} + \vec{g}_{2P})$$

$$\vec{g}_P = \vec{g}_{1P} + \vec{g}_{2P} = -G\frac{M_1}{r_{1P}^2}\vec{u}_{r1P} + \left(-G\frac{M_2}{r_{2P}^2}\vec{u}_{r2P}\right) =$$

$$= -6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{1{,}0 \cdot 10^{24}}{(\sqrt{4^2+5^2})^2}\frac{4\vec{i}+5\vec{j}}{\sqrt{4^2+5^2}} + (-6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{1{,}0 \cdot 10^{24}}{\left(\sqrt{4^2+5^2}\right)^2}\frac{-4\vec{i}+5\vec{j}}{\sqrt{4^2+5^2}}) =$$

$$= -2{,}54 \cdot 10^{11}(4\vec{i}+5\vec{j}-4\vec{i}+5\vec{j}) = -2{,}54 \cdot 10^{11}\vec{j}(\text{N kg}^{-1})$$

$$\vec{F}_P = 1000 \cdot (-2{,}54 \cdot 10^{12}\vec{j}) = -2{,}54 \cdot 10^{15}\vec{j}(\text{N})$$

b) Velocidade en B. Aplicando o principio de conservación da enerxía:

$$(E_c + E_P)_P = (E_c + E_P)_B$$

$$\frac{m \cdot v_P^2}{2} - G\frac{M_1 \cdot m}{R_{1P}} - G\frac{M_2 \cdot m}{R_{2P}} = \frac{m \cdot v_B^2}{2} + (-G\frac{M_1 \cdot m}{R_{1B}} - G\frac{M_2 \cdot m}{R_{2B}})$$

$$M_1 = M_2 = 1{,}0 \cdot 10^{24}\text{kg}; m = 1000\text{kg}; R_{1P} = R_{2P} = \sqrt{41}; R_{1B} = R_B = 4$$

$$\frac{1000 \cdot 200^2}{2} - 2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{1{,}0 \cdot 10^{24} \cdot 1000}{\sqrt{41}} = \frac{m \cdot v_B^2}{2} - 2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{1{,}0 \cdot 10^{24} \cdot 1000}{4}$$

$$-2{,}08 \cdot 10^{16} = \frac{1000 \cdot v_B^2}{2} - 3{,}35 \cdot 10^{16}$$

$$v_B = 5{,}0 \cdot 10^6 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

30. En tres dos catro vértices dun cadrado de 10 m de lado colócanse outras tantas masas de 10 kg. Calcular:

a) O campo gravitatorio no cuarto vértice do cadrado.

b) O potencial gravitatorio no punto anterior

c) O traballo realizado polo campo para levar unha masa de 10 kg dende dito vértice ata o centro do cadrado.

Dato: G= $6{,}67\cdot10^{-11}$N·m²·kg⁻².

a) Supoñendo as masas situadas nos vértices (0,0), (10,0), (0,10) o vector g no (10,10) obteráse a partir da suma vectorial das intensidades creadas por cada unha das masas situadas nos outros vértices.

$$\vec{g}_P = \vec{g}_{1P} + \vec{g}_{2P} + \vec{g}_{3P} = \vec{g}_{1P} + \vec{g}_{2P}$$

$$= -6{,}67\cdot10^{-11}\frac{10}{(\sqrt{200})^2}\frac{10\vec{i}+10\vec{j}}{\sqrt{10^2+10^2}} - 6{,}67\cdot10^{-11}\frac{5}{(\sqrt{100})^2}\frac{10\vec{j}}{10} - 6{,}67\cdot10^{-11}\frac{5}{(\sqrt{100})^2}\frac{10\vec{i}}{10}$$

$$\vec{g}_P = -9{,}03\cdot10^{-12}\vec{i} - 9{,}03\cdot10^{-12}\vec{j}(\mathrm{N\cdot kg^{-1}})$$

$$g = 1{,}27\cdot10^{-11}\,\mathrm{N\cdot kg^{-1}}$$

b)

$$V_{(10,10)} = -G\frac{M_1}{r_1} - G\frac{M_2}{r_2} - G\frac{M_3}{r_3} = -6{,}67\cdot10^{-11}\cdot10\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{200}}+\frac{1}{\sqrt{100}}+\frac{1}{\sqrt{100}}\right)$$

$$V_{(10,10)} = -1{,}81\cdot10^{-10}\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}}$$

c) O traballo para levar a masa de 10 kg desde o vértice (10, 10) ata o punto (5, 5) calcularase pola variación da enerxía potencial que posúe a masa de 10 kg neses dous puntos

$$W_{(10,10)}^{(5,5)} = -\Delta E_P = -\Delta V\cdot m = -(V_{(5,5)} - V_{(10,10)})\cdot m$$

$$V_{(10,10)} = -G\frac{M_1}{r_1} - G\frac{M_2}{r_2} - G\frac{M_3}{r_3} =$$

$$-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot10\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{200}}+\frac{1}{\sqrt{100}}+\frac{1}{\sqrt{100}}\right) = -1{,}81\cdot10^{-10}\,\mathrm{J\ kg^{-1}}$$

$$V_{(5,5)} = -G\frac{M_1}{r'_1} - G\frac{M_2}{r'_2} - G\frac{M_3}{r'_3} = -6{,}67\cdot10^{-11}\cdot10\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{50}}+\frac{1}{5}+\frac{1}{\sqrt{50}}\right)$$

$$V_{(5,5)} = -2{,}83\cdot10^{-10}\,\mathrm{J\ kg^{-1}}$$

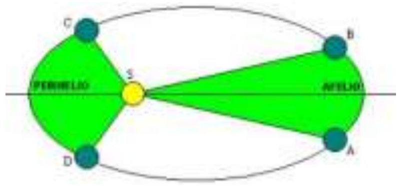
$$W_{(10,10)}^{(5,5)} = -(V_{(5,5)} - V_{(10,10)})\cdot m = 1{,}02\cdot10^{-10}\cdot10 = 1{,}02\cdot10^{-9}\,\mathrm{J}$$

Que representa un traballo realizado polo campo

GRAVITACIÓN. CUESTIONS

1. Un planeta xira arredor do Sol nunha traxectoria elíptica. Cal das seguintes magnitudes é maior no perihelio (distancia mais próxima ao Sol) que no afelio:
a) O momento angular; b) O momento lineal; c) A enerxía mecánica.
SOL. **b**

Aplicando a segunda lei de Kepler (velocidade areolar constante), un planeta barre áreas iguais en tempos iguais, polo que a velocidade no perihelio debe ser maior que no afelio.
Por esta razón, o momento lineal ($\vec{p}$= m.$\vec{v}$) será maior no perihelio.
Tanto a enerxía mecánica como o momento angular son constantes.



2. Sabendo que a aceleración da gravedade nun movemento de caída libre na superficie da Lúa é 1/6 da aceleración da gravedade na superficie da Terra e que o radio da Lúa é aproximadamente 0, 27 R_T, a relación entre as densidades medias da Lúa e da Terra será:
a) d_L/d_T= 50/81; b) d_L/d_T= 8/200; c) d_L/d_T= 1/6
SOL**. A**

$$d=\frac{M}{V}=\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\,;\;\frac{g_L}{g_T}=\frac{\frac{GM_L}{R_L^2}}{\frac{GM_T}{R_T^2}}\,;\;\frac{\frac{g_T}{6}}{g_T}=\frac{\frac{GM_L}{0{,}27^2R_T^2}}{\frac{GM_T}{R_T^2}}\Rightarrow\frac{M_L}{M_T}=\frac{0{,}27^2}{6}$$

$$\frac{d_L}{d_T}=\frac{\frac{M_L}{\frac{4}{3}\pi R_L^{\,3}}}{\frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^{\,3}}}=\frac{\frac{M_L}{(0{,}27R_T)^3}}{\frac{M_T}{R_T^{\,3}}}=\frac{M_L R_T^{\,3}}{M_T(0{,}27R_T)^3}=\frac{0{,}27^2}{6}\cdot\frac{R_T^{\,3}}{(0{,}27R_T)^3}=\frac{50}{81}$$

3. Sabendo que a aceleración da gravedade nun movemento de caída libre na superficie de Marte é 0,38 veces a gravedade na superficie da Terra e que o radio de Marte é aproximadamente 0,53 R_T, a relación entre as velocidades de escape dun obxecto dende as súas respectivas superficies será:
a) v_{eT}/v_{eM}= 4,96; b) v_{eT}/v_{eM}= 2,23; c) v_{eT}/v_{eM}= 0,45
SOL. **b**

Tendo en conta a expresión da velocidade de escape.

$$v_e=\sqrt{2\frac{GM}{R}}=\sqrt{2g_0\cdot R_P}$$

$$\frac{v_{eT}}{v_{eM}}=\frac{\sqrt{2g_T.R_T}}{\sqrt{2g_M.R_M}}=\sqrt{\frac{2g_T\cdot R_T}{2.0{,}38g_T\cdot 0{,}53R_T}}=2{,}23$$

4. Os cometas describen órbitas elípticas moi alongadas arredor do Sol, de maneira que a distancia ao Sol varía moito. Cal das seguintes magnitudes é maior no punto mais alonxado ao Sol:
a) Enerxía cinética; b) Enerxía potencial; c) Momento angular.

SOL. **b**

A enerxía potencial ($E_P = \frac{-GMm}{r}$) aumenta coa distancia xa que é negativa, e canto máis grande sexa r máis se aproxima a 0. Aínda que o seu valor absoluto é menor, por estar afectada polo carácter negativo, a enerxía potencial é maior nos puntos mais alonxados.
Así, no punto B a enerxía potencial gravitatoria é maior que en A.

5. A seguinte táboa relaciona período e radio das órbitas de tres satélites xirando arredor do mesmo astro. Sabemos que hai un dato incorrecto. A cal corresponde?

Satélite	A	B	C
T (anos)	0,44	1,00	3,86
R ($\cdot 10^5$ km)	0,88	2,08	3,74

a)En A; b) en B; c) en C
SOL. **b**

Aplicando a 3ª lei de Kepler, débese manter unha relación de proporcionalidade entre T^2 e R^3.
Así, esta relación é de 0,284 (en anos^2/(10^5 km)^3) para A e de 0,285 para C. En cambio, esta relación é de 0,111 para B, polo que os seus datos deben ser incorrectos.

6. Onde se atopará o punto no que se anulan os campos gravitatorio da Lúa e da Terra?
a) No punto medio entre Terra e Lúa; b) Máis cerca da Terra; c) Máis cerca da Lúa.
SOL. **c**

Tendo en conta que nese punto o valor do campo gravitatorio ($\vec{g} = -G.\frac{M}{r^2}\vec{u}_r$) debe anularse. O campo gravitatorio terrestre debe ser igual ao da Lúa. Como a masa da Terra é moito maior que a da Lúa, este punto estará máis achegadó á Lúa que da Terra.

7. Se a Lúa reducise a súa masa á metade, a "Lúa chea" veríase:
a)Con mais frecuencia que agora; b) Con menos frecuencia; c) Coa mesma frecuencia.
SOL. **c**

A partir da terceira lei de Kepler podemos chegar a unha expresión que relaciona T^2 e R^3.
A expresión é: $T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{GM}$
O período non depende da masa da Lúa. Tan só dependería da masa da Terra, polo que o non modificarse o período, tampouco o fai a frecuencia. A "Lúa chea" seguiríase vendo coa mesma frecuencia.

8. ¿Cómo inflúe a dirección en que se lanza un obxecto na súa velocidade de escape?
a)Non inflúe; b) A velocidade de escape é maior canto maior sexa ángulo de lanzamento;
c) A velocidade de escape é menor canto menor sexa o ángulo de lanzamento.
SOL. **a**

Na velocidade de escape: $v = \sqrt{2G \cdot \frac{M}{r}}$ non inflúe a dirección, polo que será a mesma independentemente do ángulo de lanzamento.

9. ¿A qué distancia fóra da superficie da Terra o valor do campo gravitatorio é igual ó seu valor nun punto do interior da Terra equidistante do centro e da superficie? (tomar R_T = 6 400 km)
a)6 400 km; b) 9 050 km; c)18 100 km.

SOL. **b**

Calculando "g" nun punto equidistante entre o centro da Terra e a superficie (r= 3 200 km); e comparando co valor pedido no exterior resultará.

$$g_{ext} = \frac{GM_T}{R^2} = g_0 \cdot \frac{R_T^2}{R_{ext}^2}$$

$$g_{\text{int}} = g_0 \cdot \frac{R_{\text{int}}}{R_T}$$

$$g_{ext} = g_{\text{int}} \Rightarrow g_0 \cdot \frac{R_T^2}{R_{ext}^2} = g_0 \cdot \frac{R_{\text{int}}}{R_T} \Rightarrow \frac{R_T^2}{R_{ext}^2} = \frac{3200}{R_T} \Rightarrow R_{ext} = 9050 \text{ km}$$

10. ¿A qué altitude, o peso dun astronauta se reduce a metade?. a) Se h= 0,5 R_T; b) Se h=2 R_T ; c) Se h= 0,41 R_T

SOL. **c**

Tendo en conta a expresión para o campo gravitatorio terrestre en puntos alonxados da súa superficie:

$$P = mg = m\frac{GM}{(R_T + h)^2}$$

$$P_0 = mg_0 = m\frac{GM}{R_T{}^2}$$

$$P = \frac{P_0}{2}; m\frac{GM}{(R_T + h)^2} = \frac{m\frac{GM}{R_T{}^2}}{2} \Rightarrow 2R_T{}^2 = (R_T + h)^2 \Rightarrow \sqrt{2}R_T = R_T + h \Rightarrow h = 0{,}41R_T$$

11. Xustificar cal das seguintes afirmacións e verdadeira.

a) Un satélite de masa 2 m ten o doble de velocidade de escape que outro de masa m.

b) Dous planetas de radios diferentes, coa mesma densidade, posúen a mesma velocidade de escape.

c) Un satélite terá a metade da velocidade de escape nun planeta de radio 4R que noutro de radio R e a mesma masa.

SOL. **c**

A partir da ecuación da velocidade de escape: v= $\sqrt{2G \cdot \frac{M}{r}}$ pódese deducir que si r=4R, a velocidade de escape será a metade que no planeta de radio r= R.

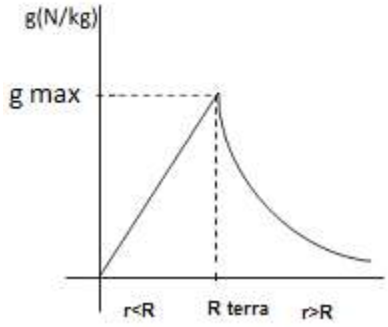
12. ¿Como varía g o profundizar cara o interior da Terra?
a) Aumenta; b) Diminúe; c)Non varía.

SOL. **b**

Se supoñemos que a Terra é unha esfera maciza de densidade constante, podemos calcula-la masa (M') que nun punto do seu interior é causante da atracción gravitatoria:

$$d = \frac{M_T}{V_T} = \frac{M'}{V'} \Rightarrow \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^{\,3}} = \frac{M'}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow M' = \frac{R^3}{R_T^{\,3}} M_T$$

$$g = \frac{GM'}{R^2} = \frac{G\frac{R^3}{R_T^{\,3}}M_T}{R^2} = \frac{GM_T R}{R_T^{\,3}} = \frac{GM_T R}{R_T^{\,2} R_T} = g_0 \cdot \frac{R}{R_T}$$



Obténse unha variación lineal de g con R. A medida que T diminúe (ó ir cara o interior da Terra) g tamén diminúe.
O valor máximo de g obtense cando R= R_T.

13. As órbitas planetarias son planas porque:
a) Os planetas teñen inercia; b) Non varía o momento angular ó ser unha forza central; c) Non varía o momento de inercia dos planetas no seu percorrido.

SOL. **b**

Se temos en conta que o campo gravitatorio é un campo de forzas centrais no que **F**e **r** son vectores paralelos, esto suporá que o momento da forza será 0 e polo tanto: d**L**/dt =0.
O momento cinético **L** debe ser constante en módulo e en dirección e sentido. Dado que a dirección é constante, as órbitas deben ser planas.

14. Unha partícula móvese dentro dun campo de forzas centrais. O seu momento angular respecto do centro de forzas:
a)Aumenta indefinidadamente; b) É cero; c) Permanece constante.

SOL. **c**

Nun campo de forzas centrais, a forza é de tipo radial, é dicir, os vectores **F** e **r** teñen a mesma dirección, polo que o seu producto vectorial será nulo (vectores paralelos).
Así pois, por tratarse dun campo de forzas centrais (**r** e **F** son vectores paralelos), o momento da forza será nulo e estamos en condicións de aplica-lo principio de conservación do momento angular. Se o momento da forza é nulo, o momento angular permanecerá constante.

$$\vec{M}_F = \vec{r} x \vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{M}_F = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L} = \overrightarrow{cte}$$

Polo tanto **L** será constante

15. Se por unha causa interna, a Terra sufrira un colapso gravitatorio e reducira o seu radio mantendo constante a súa masa. ¿Cómo sería o período de revolución arredor do Sol?
a) Igual; b) Menor; c) Maior

SOL. **a**

Dacordo coa terceira lei de Kepler, T^2 e proporcional a R^3, resultando independente da distribución das masas durante a rotación, polo que dito período non se verá modificado.

$$F_g = m\, a_c$$

$$G\frac{M_T m}{R^2} = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow G\frac{M_T}{R} = v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

$$v = \omega.R = \frac{2\pi R}{T} \Rightarrow \sqrt{\frac{GM}{R}} = \frac{2\pi R}{T} \Rightarrow \frac{GM}{R} = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{GM}}$$

16. A velocidade que se debe comunicar a un corpo na superficie da Terra para que escape da gravidade terrestre e se afaste para sempre debe ser: a) Maior que $(2g_0R_T)^{1/2}$; b) Menor que $(2g_0R_T)^{1/2}$; c) Igual que $(g_0R_T)^{1/2}$.

SOL. **a**

Para conseguir que un corpo "escape" da atracción gravitatoria, deberemos comunicarlle unha enerxía que permita situalo nun punto no que non estea sometido a dita atracción. Esto ocorre a unha distancia "infinita" do centro da Terra e na que se cumpre que E_T=0. Aplicando o principio de conservación da enerxía mecánica a ambos puntos (codia terrestre e infinito) a velocidade que hai que comunicar será maior que $\sqrt{2g_{0.R_T}}$

$$E_m = E_C + E_P;\ E_m = \frac{mv_{escape}^2}{2} + \left(-\frac{G.M_T}{R_T}\right) = 0;\ v_{escape} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{2g_{0.R_T}}$$

17. A forza gravitatoria é proporcional á masa do corpo. En ausencia de rozamento, ¿que corpos caen máis rápido?: a) Os de maior masa; b) Os de menor masa; c) Todos igual.

SOL. **c**

Todos caerían igual, porque aínda que a forza gravitatoria depende da atracción das masas, a intensidade do campo gravitatorio (g) medida como F/m, depende unicamente da masa creadora do campo sendo independente da masa do obxecto que cae. $g= GM/r^2$

Esta intensidade de campo gravitatorio é a que determina a aceleración de caída do corpo.

18. Se por unha causa interna, a Terra sufrira un colapso gravitatorio e reducira o seu radio a metade, mantendo constante a masa. Cómo sería o período de revolución arredor do Sol?. a) Igual; b) 2 anos; c) 4 anos.

SOL. **a**

Dacordo coa terceira lei de Kepler, T^2 e proporcional a R^3, resultando independente da distribución das masas durante a rotación, polo que dito período non se verá modificado.

Dito doutro xeito, o campo gravitatorio é un campo de forzas centrais, no que se mantén constante o momento cinético, polo que de non modificarse o centro de masas das partículas, non se modifica o momento de inercia , e polo tanto a velocidade angular permanecería tamén constante.

19. Sexan tres corpos iguais de gran masa, A, B, e C, e un de pequena masa, X. Se os dispoñemos A e B por unha beira e C e X por outra, cos centros igualmente separados: a) Achegáranse máis rápido A e B; b) Achegáranse máis rápido C e X; c) Achegáranse ambas parellas cunha mesma aceleración.

SOL.: **a**

Segundo a lei de gravitación universal, a forza gravitatoria establécese entre dous corpos cunha intensidade proporcional ó producto das súas masas. En cambio, a aceleración que sofre cada un dos corpos é proporcional á masa do outro. Polo tanto a aceleración de achegamento (suma das aceleracións de cada corpo independente) será maior se algunha das masas é maior, e o achegamento é máis rápido.

20. G e g son: a) g maior que G; b) Unha maior cá outra dependendo do lugar e campo dos que se parta; c) Non ten sentido facer unha comparación entre g e G.

SOL.: c

Non ten sentido a comparación xa que "g" representa a intensidade de campo gravitatorio (F/m), sendo unha constante non universal que depende da distancia ($g= GMm/r^2$); mentres que "G" é unha constante universal que non depende da natureza dos corpos que interaccionan e que toma o valor de $6'67\cdot10^{-11}$ Nm^2kg^{-2}. Representa a forza gravitatoria con que se atraen dous corpos de 1 kg de masa cada un, situados a 1 m de distancia.

21. Se nun corpo situado nun campo gravitatorio, a súa E_c é igual á súa E_p (en valor absoluto), eso significa: a) Que o corpo pode escapar ó infinito; b) Que o corpo rematará caendo sobre a masa que crea o campo; c) Que seguirá unha órbita circular.

SOL.: **a**

Tendo en conta o balance enerxético global: $E_C+E_P= -1/2$ (GMm/r), dado que a enerxía potencial é sempre negativa a suma de ambas será 0. Este valor será nulo cando r é ∞ .

22. Un mesmo planeta, describindo circunferencias arredor do sol, irá máis rápido: a) Canto maior sexa o raio da órbita; b) Canto menor sexa o raio da órbita; c) A velocidade non depende do tamaño da órbita.

SOL.: **b**

Para que un obxecto se atope en órbita: $F_G= F_C \Longrightarrow$ Se r diminúe a forza gravitatoria aumenta, por ser esta inversamente proporcional a r^2; aumentando así a aceleración centrípeta a que está sometida e polo tanto a velocidade.

23. No movemento da Terra arredor do Sol: a) Consérvanse o momento angular e o momento lineal; b) Consérvanse o momento lineal e o momento da forza que os une; c) Varía o momento lineal e consérvase o angular.

SOL.: **c**

O campo gravitatorio é un campo de forzas centrais no que $\overrightarrow{F}$ e $\overrightarrow{r}$ son paralelos, esto suporá que o momento da forza será 0 e polo tanto: $d\vec{L}/dt = 0$. Esto representa o principio de conservación do momento cinético. O momento lineal: $\vec{p}= m\vec{v}$ non será constante, xa que o vector v cambia continuamente en dirección e sentido.

24. Cando un obxecto xira en torno a Terra cúmprese :a) Que a enerxía mecánica do obxecto na súa órbita é positiva; b) Que a súa velocidade na órbita será $v=(2gR_T)^{½}$; c) Que a forza centrípeta e a forza gravitatoria son iguais.

SOL.: **c**

A condición dinámica para a existencia dunha órbita implica a existencia dunha forza que garante a existencia dun movemento circular e polo tanto dunha aceleración centrípeta. A responsabilidade desta forza centrípeta recae no caso do campo gravitatorio na forza gravitatoria. Polo tanto a forza gravitatoria será a forza centrípeta.

25. A aceleración de caída dos corpos cara a Terra é: a) Proporcional ó seu peso; b) Proporcional á forza de atracción entre ambos; c) Independente da súa masa.

SOL.:**c**

A aceleración de caída dos corpos "g" é a intensidade de campo gravitatorio, representa a Forza exercida por unidade de masa, sendo independente da masa. $g= G(M/r^2)$