Problemas

P1. Una partícula de 500 g de masa lleva un movimiento en el plano XY tal que la ecuación del vector de posic $\vec{r} = (6t - 5)\,\vec{i} + (108\,t^2 - 108\,t + 80)\,\vec{j}$ (m). Calcular:

a) Expresiones del vector velocidad y aceleración.
b) Vector desplazamiento entre t = 2s y t = 3s.
c) El momento lineal parta t = 2s.
d) El momento angular de la partícula en el instante t = 3s.
e) Fuerza que actúa sobre la partícula en el instante t = 3s.
f) Tipo de movimiento que describe la partícula. Representa gráficamente su trayectoria.

P2. Dos esferas de masas 2kg y 4kg están situadas respectivamente en los puntos (0,0) y (6,0) de un sistema de coordenadas cartesiano expresado en metros. Calcula:

a) El campo gravitatorio en el punto A (3,4).
b) La fuerza que actuaría sobre una masa puntual de 3kg situada en el punto A.
c) El trabajo necesario para transportar la masa de 3kg desde el punto A al punto B (3,0).
d) Velocidad y aceleración de la masa de 3 kg en los puntos A y B.

Datos: $G=6{,}67\cdot 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$

P3. Un satélite artificial de 200kg describe una órbita circular a una altura de 650 km sobre la Tierra. Calcula:

a) El período y velocidad del satélite en la órbita.
b) La energía mecánica del satélite.
c) Relación entre los valores de campo gravitatorio en el satélite y en la superficie terrestre.
d) La energía necesaria para colocarlo en la órbita y que éste orbite.

Datos: $R_T=6{,}37\cdot 10^6$ m; $g_0=9{,}81\ m/s^2$; $G=6{,}67\cdot 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$

P4. Se lanza un proyectil verticalmente desde la superficie de la Tierra, con una velocidad inicial de 3 km/s. Calcula:

a) ¿Qué altura máxima alcanzará?
b) La velocidad orbital que habrá que comunicarle a esa altura para que describa una órbita circular.

Datos: $G= 6{,}67\times 10^{-11} N\cdot m^2\cdot kg^{-2}$; $R_T = 6\ 370$ km; $M_T = 5{,}98\times 10^{24}$kg

Cuestiones

C1. Cuando un satélite artificial debido a la fricción con la atmósfera reduce su altura respecto a la Tierra, su velocidad lineal:

a) Aumenta.
b) Disminuye.
c) Permanece constante.

C2. Si dos planetas distan del Sol Ry 4R respectivamente sus períodos de revolución son:

a) T y 4 T
b) T y T/ 4
c) T y 8 T

P1

$m = 500\ g = 0'5\ kg$

$\vec{r} = (6t-5)\vec{i} + (108t^2 - 108t + 80)\vec{j}\ m$

a) $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 6\vec{i} + (216t - 108)\vec{j}\ m/s$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 216\vec{j}\ m/s^2$

b) $\left.\begin{array}{l} \vec{r}_2\,(t=2s) = 7\vec{i} + 296\vec{j}\ m \\ \vec{r}_3\,(t=3s) = 12\vec{i} + 728\vec{j}\ m \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\Delta\vec{r} = \vec{r}_3 - \vec{r}_2 = 5\vec{i} + 432\vec{j}\ m}$

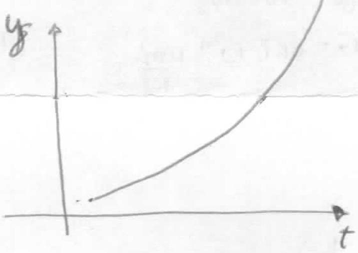
c) $\left.\begin{array}{l} \vec{P} = m\vec{v} \\ \vec{v}\,(t=2s) = 6\vec{i} + 324\vec{j}\ m/s \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\vec{P}\,(t=2s) = 0'5\cdot(6\vec{i} + 324\vec{j}) = 3\vec{i} + 162\vec{j}\ kg\,m/s}$

d) $\boxed{\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 7 & 296 & 0 \\ 6 & 162 & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + (7\cdot 162 - 6\cdot 296)\vec{k} = -642\vec{k}\ kg\,m^2/s}$

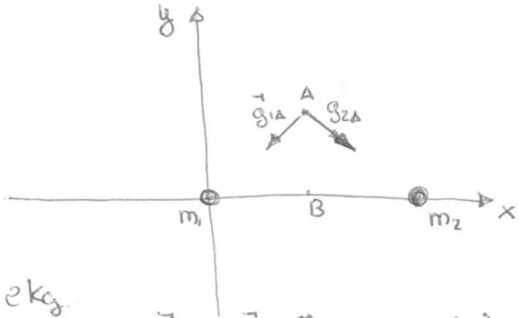
e) $\left.\begin{array}{l} a(t=3s) = 216\vec{j}\ m/s^2 \\ \vec{F} = m\cdot\vec{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = 0'5\,(216\vec{j}) = 108\vec{j}\ N}$

f) Teniendo en cuenta el apartado a) observamos:

m.r.u. en el eje x
m.r.u.a en el eje y $\Big\} \Rightarrow$ movimiento parabólico



P2



$m_1 = 2\ kg$
$m_2 = 4\ kg$
$m = 3\ kg$

$\vec{r}_{1A} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$
$\vec{r}_{2A} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$

a) $\vec{g}_A = \vec{g}_{1A} + \vec{g}_{2A} = (32\vec{i} - 128\vec{j})\cdot 10^{-12}\ N/kg$

$\vec{g}_{1A} = -G\frac{m_1}{r_{1A}^2}\vec{u}_{r_{1A}} = -6'67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{2}{5^2}\left(\frac{3\vec{i}+4\vec{j}}{5}\right) = (-32\vec{i} - 42'6\vec{j})\cdot 10^{-12}\ N/kg$

$\vec{g}_{2A} = -G\frac{m_2}{r_{2A}^2}\vec{u}_{r_{2A}} = -6'67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{4}{5^2}\,\frac{(-3\vec{i}+4\vec{j})}{5} = (+64\vec{i} + 85'2\vec{j})\cdot 10^{-12}\ N/kg$

b) $\vec{F} = m\cdot\vec{g} = 3\cdot\vec{g}_A = (96\vec{i} - 384\vec{j})\cdot 10^{-12}\ N$

c) $E_{P_A} = E_{P_{1A}} + E_{P_{2A}} = -G\frac{m_1 m}{r_{1A}} - G\frac{m_2 m}{r_{2A}} = -6'67\cdot 10^{-11}\cdot 3\left(\frac{2}{5} + \frac{4}{5}\right) = -24\cdot 10^{-10}\ J$

$E_{P_B} = E_{P_{1B}} + E_{P_{2B}} = -G\frac{m_1 m}{r_{1B}} - G\frac{m_2 m}{r_{2B}} = -6'67\cdot 10^{-11}\cdot 3\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3}\right) = -4\cdot 10^{-10}\ J.$

$W_{A\to B} = -\Delta E_p = E_{P_A} - E_{P_B} = 16\cdot 10^{-10}\ J.$ $\Rightarrow$ $W > 0 \Rightarrow$ el trabajo lo realiza la fuerza gravitatoria!!

d) Teniendo en cuenta que la fuerza que actúa sobre la masa "m" es la fuerza gravitatoria y ésta es central (conservativa) $\Rightarrow E_m = cte.$

$E_{m_A} = E_{m_B}$ donde hemos considerado que $V_A = 0\ m/s$ ya que se encuentra en reposo.

$\underbrace{\cancel{E_{c_A}}}_{0} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B}$

$-24\cdot 10^{-10} = \frac{1}{2} m V_B^2 - 4\cdot 10^{-10} \Rightarrow \boxed{V_B = 1'033\cdot 10^{-5}\ m/s}$

Teniendo en cuenta que:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{F} = m\cdot\vec{a} \\ \vec{F}_A = (9'6\,\vec{i} - 3'84\,\vec{j})\cdot 10^{-12}\ N\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_A = (3'2\,\vec{i} - 12'8\,\vec{j})\cdot 10^{-12}\ m/s^2}$$

P.3

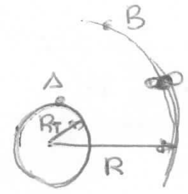
$m_s = 200\ kg$

$h = 650\ km$

$R_T = 6370\ km$

$g_0 = 9'81\ m/s^2$

$G = 6'67\cdot 10^{-11}\ \frac{Nm^2}{kg^2}$



$R = 7020\ km$

a) $F_g = m\, a_c$

$G\frac{M\cancel{m_s}}{R^{\cancel{2}}} = \cancel{m_s}\frac{V^2}{\cancel{R}}$

$$\boxed{V = \sqrt{\frac{GM_T}{R}\frac{R_T^2}{R_T^2}} = \sqrt{g_0\frac{R_T^2}{R}} = 7530'2\ m/s}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi R}{V} = \frac{2\cdot\pi\cdot 7020\cdot 10^3}{7530'2} = 5857'5\ s}$$

b) $$\boxed{E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}E_p = -\frac{1}{2}G\frac{M_T m_s}{R}\cdot\frac{R_T^2}{R_T^2} = -\frac{1}{2}m_s g\frac{R_T^2}{R} = -5'67\cdot 10^9\ J}$$

c) $$g_R = G\frac{M_T}{R^2}\frac{R_T^2}{R_T^2} = g_0\frac{R_T^2}{R^2} \Rightarrow \boxed{\frac{g}{g_0} = \frac{R_T^2}{R^2} = 0'823}$$

d)

$E_{m_A} = E_{m_B}$

$$E_{c_A} + E_{p_A} = \underbrace{E_{c_B} + E_{p_B}}_{\frac{1}{2}E_{p_B}}$$

$$E_{c_A} = \frac{1}{2}E_{p_B} - E_{p_A} = \frac{-1}{2}G\frac{M_T m_s}{R} + G\frac{M_T m_s}{R_T}$$

$$= -\frac{1}{2}G\frac{M_T m_s}{R}\frac{R_T^2}{R_T^2} + G\frac{M_T m_s}{R_T}\frac{R_T}{R_T}$$

$$= -\frac{1}{2}g_0 m_s R_T^2 + g_0 m_s R_T = m_s g_0 R_T\left(-\frac{R_T}{2R} + 1\right) = 6'83\cdot 10^9\ J$$

P.4

a) Puesto que la fuerza que actúa sobre el proyectil es la fuerza gravitatoria y ésta es una fuerza conservativa $\Rightarrow$ $E_m = cte$

$$E_{m_A} = E_{m_B}$$

$$E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B}$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}V_A^2 - G\frac{M_T \cancel{m}}{R_T} = 0 - G\frac{M_T \cancel{m}}{R} \quad \text{donde} \quad R = R_T + h$$

$$\frac{1}{2}\cdot(3000)^2 - 6'67\cdot10^{-11}\cdot\frac{5'98\cdot10^{24}}{6'37\cdot10^6} = -6'67\cdot10^{-11}\cdot\frac{5'98\cdot10^{24}}{R}$$

$$R = 6863'2 \text{ km} \quad \Rightarrow \quad \boxed{h = 493'2 \text{ km}}$$

b) $F_g = m\cdot a_c$

$$G\frac{M_T \cancel{m}}{R^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{V^2}{\cancel{R}}$$

$$\boxed{V = \sqrt{\frac{GM_T}{R}} = \sqrt{\frac{6'67\cdot10^{-11}\cdot 5'98\cdot10^{24}}{6863'2\cdot10^3}} = 7623'4 \text{ m/s}} \leftarrow \text{velocidad orbital}$$

C.1

La energía mecánica de un satélite orbitando alrededor de un planeta (considerando órbitas circulares) es:

$$E_m = E_c + E_p$$
$$= \frac{1}{2}m_sV_0^2 - G\frac{M_T m_s}{R}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{GM_T m_s}{R} - G\frac{M_T m_s}{R} = -\frac{1}{2}G\frac{M_T m_s}{R} = \frac{1}{2}E_p$$
$$= -E_c$$

$$V_0 = \sqrt{\frac{GM_T}{R}}$$

En la órbita inicial (A) posee una energía: $E_{m_A} = \frac{1}{2}E_{p_A} = -\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{R_A}$

En la órbita final (B) posee una energía: $E_{m_B} = \frac{1}{2}E_{p_B} = -\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{R_B}$

Como $R_B < R_A \Rightarrow E_{m_B} < E_{m_A}$

$$-E_{c_B} < -E_{c_A}$$

$$-\frac{1}{2}\cancel{m}V_B^2 < -\frac{1}{2}\cancel{m}V_A^2$$

$$V_B^2 > V_A^2 \Rightarrow \boxed{V_B > V_A} \rightarrow \text{respuesta a)}$$

$\boxed{C.2}$ Según la 3ª ley de Kepler: $\frac{T^2}{R^3} = cte$

Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{T^2}{R^3} = \frac{T'^2}{R'^3} \\ R' = 4R \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{T^2}{R^3} = \frac{T'^2}{(4R)^3}$$

$$T'^2 = 64T^2$$

$$\boxed{T' = 8T} \rightarrow \text{respuesta } c)$$