1 Funcións reais de variable real

Unha **función real**, f, **de variable real** é unha relación que asocia a cada número real, x, un único número real $y = f(x)$. Pódese expresar desta forma:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow y = f(x)$$

A variable x denomínase **variable independente** e a variable y é a **variable dependente**.

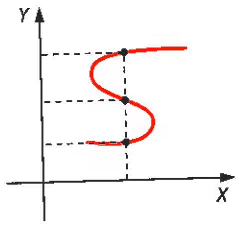
Non esquezas

Unha función pode cortar varias veces o eixe X, pero só pode cortar unha vez como máximo o eixe Y.

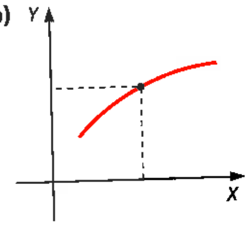
Exemplos

1 **Indica se as gráficas corresponden a funcións ou non.**

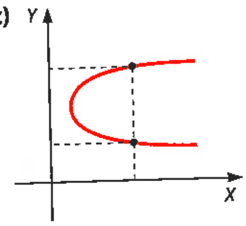
a)



b)



c)



Nas gráficas a) e c) existen valores da variable X aos cales lles corresponden máis dun valor de Y. Estas gráficas non corresponden a funcións.

Na gráfica b), a cada valor de X para o que existe a gráfica, correspóndelle un único valor de Y. Esta gráfica corresponde a unha función.

2 **O prezo do metro de tea é 7,50 €. A relación entre as magnitudes *lonxitude de tea*, en metros, e *prezo*, en euros, é unha función?**

A relación entre a *lonxitude da tea*, X, e o seu *prezo*, Y, podémola expresar como:

$$y = 7{,}50 \cdot x$$

Se agrupamos algúns pares de valores en forma de táboa, temos que:

Lonxitude (m)	0,5	1	1,5	2	2,5
Prezo (€)	3,75	7,50	11,25	15	18,75

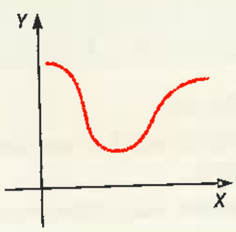
Para cada lonxitude, x, temos un único prezo, y (unha cantidade de tea non pode ter dous prezos distintos).

A relación entre estas dúas magnitudes é unha función.

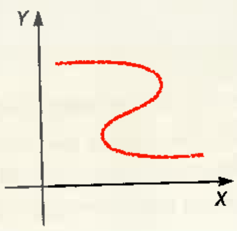
ACTIVIDADES

1 Xustifica se as seguintes gráficas corresponden a funcións.

a)



b)



2 Razoa, en cada caso, se a relación entre as magnitudes é unha función ou non.

a) A distancia entre dúas cidades e o tempo que se tarda en ir dunha a outra.

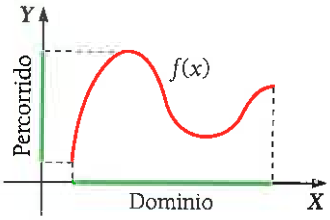
b) A cantidade de froita que compra unha familia, en quilogramos, e o prezo por quilogramo.

c) A altura dos alumnos dun centro escolar e a súa idade.

2 Dominio e percorrido

Dada unha función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $y = f(x)$:

- O **dominio da función** é o conxunto $D \subset \mathbb{R}$ dos valores para os que está definida a función. Represéntase por Dom f.
- O **percorrido da función** é o conxunto de valores que toma a función. Represéntase por Im f.



Faino así

COMO DETERMINAMOS O DOMINIO DUNHA FUNCIÓN

Calcula o dominio destas funcións.

a) $f(x) = 3x^2 + 2x - 7$

b) $f(x) = \dfrac{3 + 2x - 7}{x + 1}$

c) $f(x) = \sqrt{x - 1}$

d) $f(x) = \log(x + 1)$

e) $f(x) = sen\, x$

f) $f(x) = tx\, x$

PRIMEIRO. Consideramos as operacións que aparecen na expresión alxébrica de $f(x)$.

- As expresións polinómicas están definidas para todos os números reais.
- As expresións con x no denominador non están definidas cando o denominador se anula.
- As raíces de índice par só están definidas para radicandos positivos.
- Os logaritmos só están definidos para números reais positivos.
- As razóns trigonométricas do seno e do coseno sempre están definidas.
- A tanxente non está definida cando o coseno é cero.

a) Está definida en $\mathbb{R}$.

b) Non está definida se $x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$

c) Só está definida se $x - 1 \geq 0 \longrightarrow x \geq 1$

d) Só está definida se $x + 1 > 0 \longrightarrow x > -1$

e) Está definida en $\mathbb{R}$.

f) Non está definida se $\cos x = 0 \rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ e $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$

SEGUNDO. Expresamos as condicións anteriores no dominio da función.

a) Dom $f = \mathbb{R}$

b) Dom $f = \mathbb{R} - \{-1\}$

c) Dom $f = [1, +\infty)$

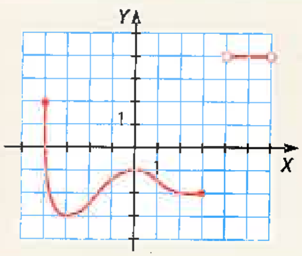
d) Dom $f = (-1, +\infty)$

e) Dom $f = \mathbb{R}$

f) Dom $f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi\right\}$

ACTIVIDADES

3 Determina o dominio e o percorrido desta función.



4 Cal é o dominio destas funcións?

a) $f(x) = \sqrt{x + 4}$

b) $f(x) = \dfrac{2x - 5}{x^2 - 16}$

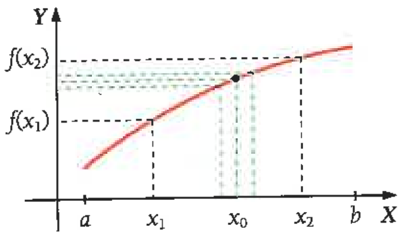
c) $f(x) = 9x^3 + 6x^2 - 9x$

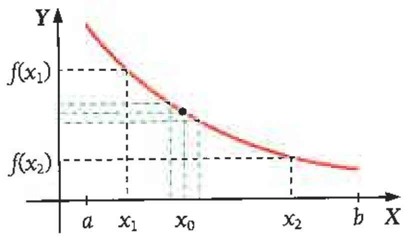
d) $f(x) = \cos x$

3 Crecemento. Concavidade

Unha función f é **crecente nun intervalo** (a, b) se para calquera par de valores x_1, x_2, con $x_1 < x_2$, do intervalo se cumpre que: $f(x_1) < f(x_2)$.

Unha función f é **crecente nun punto** x_0 se existe un intervalo centrado en x_0, $(x_0 - h, x_0 + h)$, para o que a función é crecente.



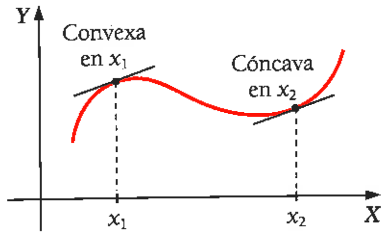


Unha función f é **decrecente nun intervalo** (a, b) se para calquera par de valores x_1, x_2, con $x_1 < x_2$, do intervalo se cumpre que: $f(x_1) > f(x_2)$.

Unha función f é **decrecente nun punto** x_0 se existe un intervalo centrado en x_0, $(x_0 - h, x_0 + h)$, para o que a función é decrecente.

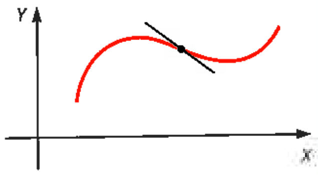
Unha función f é **cóncava nun punto** se a recta tanxente á gráfica de f nese punto está por debaixo da gráfica.

Unha función f é **convexa nun punto** se a recta tanxente á gráfica de f nese punto está por enriba da gráfica.

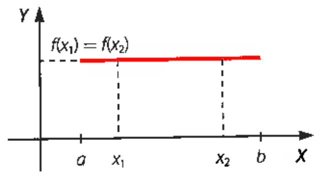


Decátate

Se a recta tanxente nun punto atravesa a gráfica dunha función, dicimos que a función ten un **punto de inflexión**.

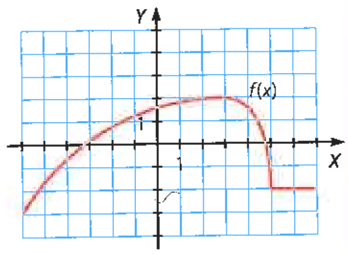


Unha función f é **constante nun intervalo** (a, b) se para calquera par de valores do intervalo se cumpre que: $f(x_1) = f(x_2)$.



Exemplo

3 **Indica os intervalos de crecemento desta función. En $x = 4$, é cóncava ou convexa?**



Se tomamos $x_1, x_2 \in (-\infty, 3)$, con $x_1 < x_2$, cúmprese que $f(x_1) < f(x_2)$. A función é crecente no intervalo $(-\infty, 3)$.

Se tomamos $x_1, x_2 \in (3, 5)$, con $x_1 < x_2$, cúmprese que $f(x_1) > f(x_2)$. A función é decrecente no intervalo $(3, 5)$.

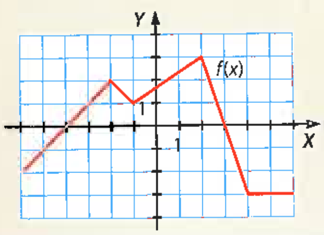
Se $x_1, x_2 \in (5, +\infty)$, $f(x_1) = f(x_2)$. A función é constante en $(5, +\infty)$.

En $x = 4$, a recta tanxente está por enriba da gráfica. A función é convexa nese punto.

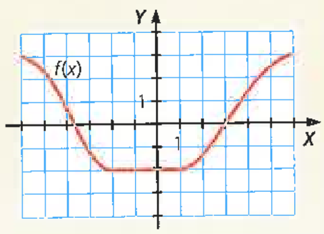
ACTIVIDADES

5 En que intervalos é crecente esta función? E decrecente?

En $x = 2$, é cóncava ou convexa?



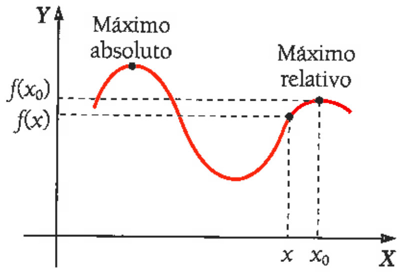
6 Estuda o crecemento da función.

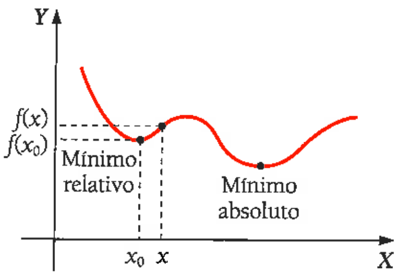


4 Máximos e mínimos

Unha función f presenta un **máximo relativo nun punto** x_0 se existe un intervalo centrado en x_0, $(x_0 - h, x_0 + h)$, tal que para calquera punto x do intervalo se cumpre que: $f(x) < f(x_0)$.

Unha función f presenta un **máximo absoluto nun punto** x_0 se para calquera valor x do dominio da función se cumpre que: $f(x) < f(x_0)$.



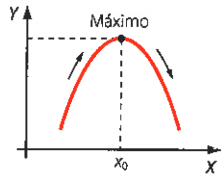


Unha función f presenta un **mínimo relativo nun punto** x_0 se existe un intervalo centrado en x_0, $(x_0 - h, x_0 + h)$, tal que para calquera punto x do intervalo se cumpre que: $f(x) > f(x_0)$.

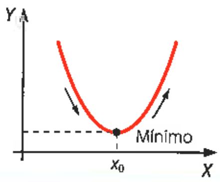
Unha función f presenta un **mínimo absoluto nun punto** x_0 se para calquera valor x do dominio da función se cumpre que: $f(x) > f(x_0)$.

Non esquezas

- Unha función ten un **máximo relativo** en x_0 se a función, nese punto, pasa de ser crecente a decrecente.

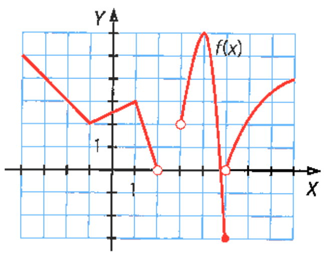


- Unha función ten un **mínimo relativo** en x_0 se a función, nese punto, pasa de ser decrecente a crecente.



Exemplo

4 **Determina o dominio, o percorrido, os intervalos de crecemento e os máximos e mínimos desta función.**



Dom $f = \mathbb{R} - (2, 3)$ Im $f = [-3, +\infty)$

f é crecente en: $(-1, 1) \cup (3, 4) \cup (5, +\infty)$

f é decrecente en: $(-\infty, -1) \cup (1, 2) \cup (4, 5)$

Existen dous máximos relativos, en $x = 1$ e en $x = 4$: $P(1, 3)$ e $Q(4, 6)$

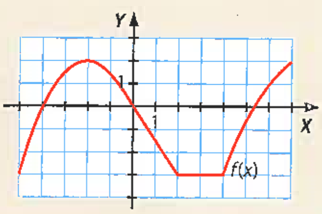
Existe un mínimo relativo en $x = -1$: $R(-1, 2)$

Non existe máximo absoluto, porque o maior valor da función é $+\infty$.

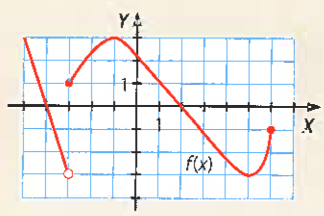
Existe un mínimo absoluto en $x = 5$, xa que o valor mínimo da función, -3, se alcanza neste punto: $S(5, -3)$

ACTIVIDADES

7 En que puntos da función hai máximos relativos? E mínimos relativos? Ten máximos ou mínimos absolutos?



8 Estuda o dominio, o percorrido, o crecemento e os máximos e mínimos de $f(x)$.

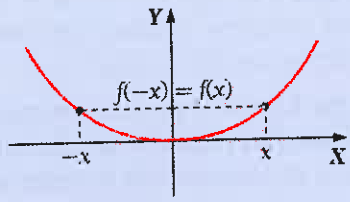


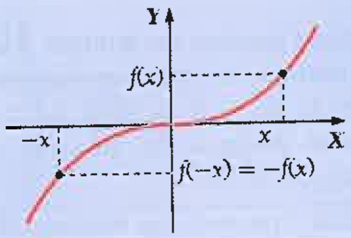
5 Simetrías

Dada unha función f de variable real, dicimos que é:

Simétrica respecto do eixe Y, se para calquera punto x do dominio da función se cumpre que: $f(-x) = f(x)$.

Estas funcións tamén se denominan **funcións pares**.





Simétrica respecto da orixe de coordenadas, se para calquera punto x do dominio da función se cumpre que: $f(-x) = -f(x)$.

Estas funcións tamén se denominan **funcións impares**.

Decátate

Hai funcións que non son pares nin impares.

$f(x) = x - 1 \rightarrow f(-x) = -x - 1$

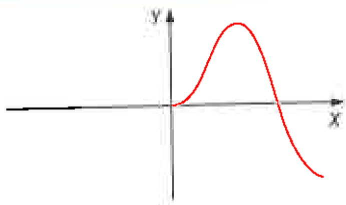
Esta expresión non coincide coa expresión de $f(x)$ nin coa expresión de $-f(x)$.

Exemplo

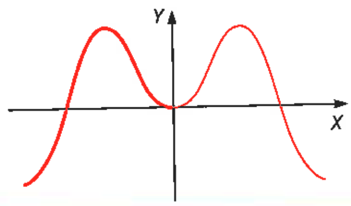
5 Completa a gráfica desta función para que sexa:

a) Par.

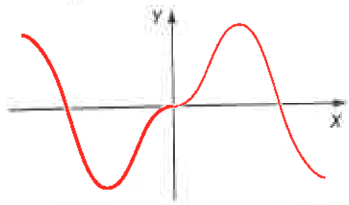
b) Impar.



a)



b)



Faino así

COMO DETERMINAMOS A SIMETRÍA DUNHA FUNCIÓN

Estuda a simetría destas funcións.

a) $f(x) = \sqrt{x^4 + 1}$ **b)** $g(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

PRIMEIRO. Substituímos x por $-x$ na expresión alxébrica da función.

a) $f(-x) = \sqrt{(-x)^4 + 1} = \sqrt{x^4 + 1}$ b) $g(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2 + 1} = -\dfrac{x}{x^2 + 1}$

SEGUNDO. Comprobamos se esta función é igual á primeira ou á súa oposta.

a) $f(-x) = f(x) \longrightarrow f(x)$ é simétrica respecto do eixe Y.

b) $g(-x) = -g(x) \rightarrow g(x)$ é simétrica respecto da orixe.

ACTIVIDADES

9 Debuxa a gráfica dunha función para que sexa:

a) Impar.

b) Par.

10 Xustifica se estas funcións son simétricas.

a) $f(x) = \dfrac{x^4 + 2}{x^2}$ b) $g(x) = \sqrt{x^3 - 3}$

6 Periodicidade

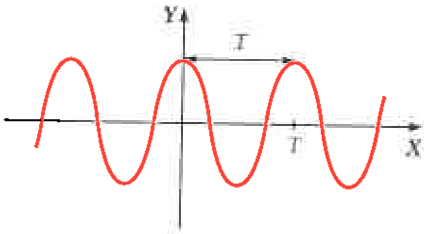
Unha función f é **periódica**, de período $T (T > 0)$, se para calquera valor x do dominio da función se cumpre que:

$f(x) = f(x + T) + f(x + 2T) = \dots = f(x + k \cdot T)$, con k un número enteiro.

Ou o que é o mesmo:

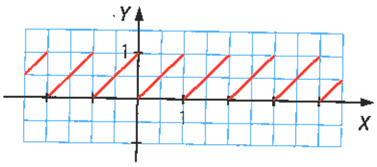
$$f(x + kT) = f(x), \forall k \in \mathbb{Z}$$

Unha función é periódica se unha parte da súa gráfica se repite cada certo intervalo. Así, coñecido o valor da función nun intervalo de amplitude T, pódese construír o resto da gráfica trasladándoa á dereita e á esquerda en todo o dominio da función.



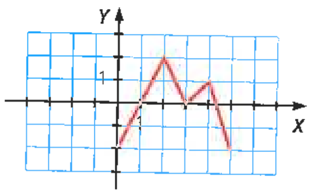
Exemplos

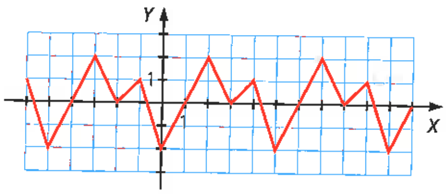
6 **Decide se esta gráfica corresponde a unha función periódica e, se é posible, determina o período.**



A función asocia a cada número positivo a súa parte decimal; por tanto, é a gráfica dunha función periódica cuxo período é 1.

7 **A partir desta gráfica, representa unha función periódica de período 4.**

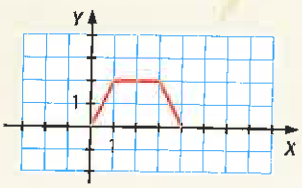




Desprazamos a gráfica da función á dereita e á esquerda.

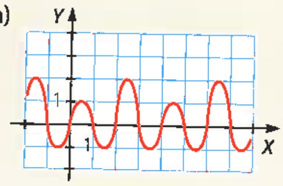
ACTIVIDADES

11 Representa unha función periódica tal que o período o determine esta gráfica.

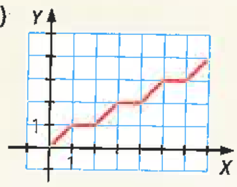


12 Razoa se as seguintes gráficas corresponden a funcións periódicas.

a)



b)

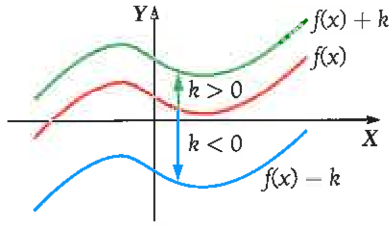


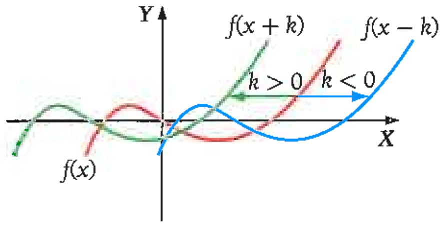
7 Transformacións de funcións

Se se coñece a gráfica de $y = f(x)$, pódense obter as gráficas doutras funcións a partir dela.

Representación de $y = f(x) + k$

Se coñecemos a gráfica de $y = f(x)$, a gráfica da función $y = f(x) + k$ obténse trasladando $f(x)$ verticalmente k unidades cara arriba, se $k > 0$, e k unidades cara abaixo, se $k < 0$.



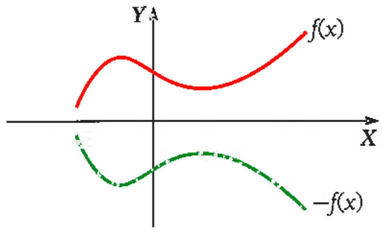


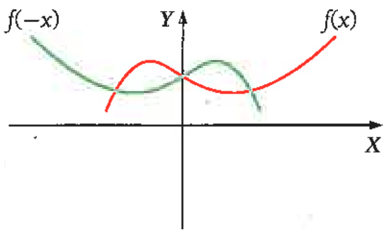
Representación de $y = f(x + k)$

A partir da gráfica de $y = f(x)$, a gráfica da función $y = f(x + k)$ obtense trasladando $f(x)$ horizontalmente k unidades cara á esquerda, se $k > 0$, e k unidades cara á dereita, se $k < 0$.

Representación de $y = -f(x)$

A gráfica da función $y = -f(x)$ é a gráfica simétrica de $y = f(x)$ respecto do eixe X.



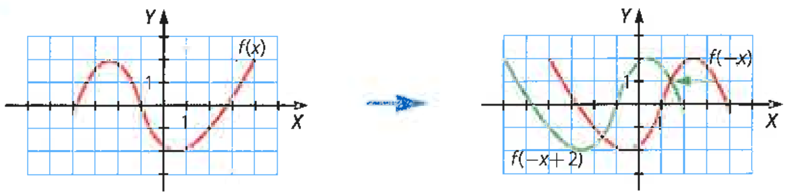


Representación de $y = f(-x)$

A gráfica da función $y = f(-x)$ é a gráfica simétrica de $y = f(x)$ respecto do eixe Y.

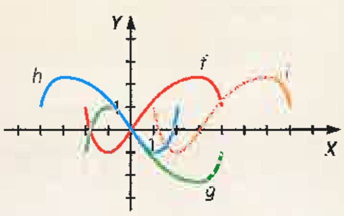
Exemplo

8 A partir da gráfica de $f(x)$, representa a función $f(-x + 2)$.



ACTIVIDADES

13 Tendo en conta a gráfica de $y = f(x)$, identifica a que función corresponde cada unha das gráficas que aparecen na figura.

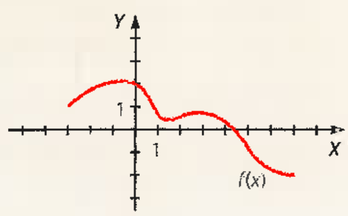


14 A partir da gráfica de $y = f(x)$, representa estas funcións.

a) $y = f(x) - 3$

b) $y = f(x + 2)$

c) $y = -f(-x)$



8 Operacións con funcións

Dadas dúas funcións f e g cuxos dominios son Dom f e Dom g, respectivamente:

- A **suma de funcións** f e g é outra función, $f + g$, tal que para calquera valor, x, que pertence aos dominios de ambas as funcións se cumpre que: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
- O **produto de funcións** f e g é outra función, $f \cdot g$, tal que para calquera valor, x, que pertence aos dominios de ambas as funcións se cumpre que: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.
- O **cociente de funcións** f e g é outra función, $\frac{f}{g}$, tal que para calquera valor, x, que pertence aos dominios de ambas as funcións se cumpre que: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, con $g(x) \neq 0$.

Decátate

- O dominio das funcións $f + g$ e $f \cdot g$ é o conxunto de todos os valores que pertencen a Dom f e Dom g.

  Dom $(f + g) = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g$

  Dom $(f \cdot g) = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g$

- O dominio da función $\frac{f}{g}$ é o conxunto de todos os valores que pertencen a Dom f e Dom g e, ademais, non anulan $g(x)$.

Faino así

COMO CALCULAMOS VALORES PARA AS OPERACIÓNS CON FUNCIÓNS

Considera as funcións $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$ e $g(x) = \frac{x}{2}$. Determina o valor das seguintes funcións nos puntos que se indican.

a) $(f + g)(4)$ **b)** $(f \cdot g)(-2)$ **c)** $\left(\frac{f}{g}\right)(-1)$

PRIMEIRO. Determinamos cada unha das funcións que resultan ao operar.

a) $(f + g)(x) = \sqrt{x^3 + 1} + \frac{x}{2} = \frac{2\sqrt{x^3 + 1} + x}{2}$

b) $(f \cdot g)(x) = \sqrt{x^3 + 1} \cdot \frac{x}{2} = \frac{x\sqrt{x^3 + 1}}{2}$

c) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{\frac{x}{2}} = \frac{2\sqrt{x^3 + 1}}{x}$

SEGUNDO. Calculamos o valor das funcións en cada punto.

a) $(f + g)(4) = \frac{2\sqrt{4^3 + 1} + 4}{2} = \frac{2\sqrt{65} + 4}{2} = \sqrt{65} + 2$

b) $(f \cdot g)(-2) = \frac{-2\sqrt{(-2)^3 + 1}}{2} = \frac{-2\sqrt{-7}}{2}$ → Non existe, xa que $\sqrt{-7}$ non é real.

c) $\left(\frac{f}{g}\right)(-1) = \frac{2\sqrt{(-1)^3 + 1}}{-1} = 0$

ACTIVIDADES

15 Determina o valor destas funcións no punto $x = -5$, se $f(x) = x^2 - 3$ e $g(x) = \frac{x + 3}{x}$.

a) $(f - g)(x)$ **b)** $(f \cdot g)(x)$ **c)** $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

16 Tendo en conta que $f(x) = \sqrt{x^5}$ e $g(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$, calcula o valor das seguintes funcións nos puntos que se indican.

a) $(f \cdot g)(-4)$ **b)** $\left(\frac{f}{g}\right)(-1)$

9 Composición de funcións

Dadas dúas funcións, f e g, chámase **función composta** de f con g a función $(g \circ f)$ que cumpre que:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, dashed, "g \circ f"] & f(x) \arrow[r, "g"] & g[f(x)] \end{tikzcd}$$

A expresión $(g \circ f)(x)$ lese como *f composta con g de x*. Para nomeala comézase pola función da dereita, porque é a primeira que actúa sobre a variable x.

En xeral, $(g \circ f)(x)$ é distinto ca $(f \circ g)(x)$.

Non esquezas

Para determinar o dominio de $g \circ f(x)$ temos que encontrar os valores de x que cumpren que:

- x está no dominio de f.
- $f(x)$ está no dominio de g.

Exemplo

9 **Dadas as funcións $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = 2x - 3$, calcula o valor das funcións compostas que se indican.**

a) $(g \circ f)(2)$

b) $(f \circ g)(-2)$

c) $(g \circ f)(x)$

d) $(f \circ g)(x)$

e) $(f \circ g)(x)$

a) $(g \circ f)(2) = g[f(2)] = g(5) = 2 \cdot 5 - 3 = 7$

$f(2) = 2^2 + 1 = 5$

b) $(f \circ g)(-2) = f[g(-2)] = f(-7) = (-7)^2 + 1 = 50$

$g(-2) = 2 \cdot (-2) - 3 = -7$

c) $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(x^2 + 1) = 2(x^2 + 1) - 3 = 2x^2 - 1$

$f(x) = x^2 + 1$

d) $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(2x - 3) = (2x - 3)^2 + 1 = 4x^2 - 12x + 10$

$g(x) = 2x - 3$

e) $(f \circ f)(x) = f[f(x)] = f(x^2 + 1) = (x^2 + 1)^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 2$

$f(x) = x^2 + 1$

ACTIVIDADES

17 Determina o valor da composición de funcións que se indica en cada apartado, en $x = -4$, se $f(x) = x^2$ e $g(x) = \dfrac{x-1}{x}$.

a) $(f \circ g)(x)$

b) $(g \circ f)(x)$

c) $(f \circ f)(x)$

d) $(g \circ g)(x)$

18 Se $f(x) = \sqrt{2x^3}$ e $g(x) = x - 4$, calcula o valor destas funcións nos puntos que se indican, determinando primeiro a composición de funcións correspondente.

a) $(f \circ g)(5)$ **b)** $(g \circ f)(5)$

Xustifica, a partir dos apartados anteriores, se a composición de funcións é conmutativa.

10 Función inversa

- A **función inversa** dunha función f é outra función, f^{-1}, tal que para calquera valor x do seu dominio se cumpre que:

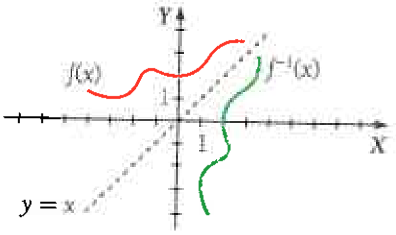
$$\text{Se } f(x) = b, \text{ entón } f^{-1}(b) = x$$

- Se f^{-1} é a función inversa de f, cúmprese que:

$$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = Id$$

A Id chamámola **función identidade** e defínese como $Id(x) = x$.

As gráficas dunha función e da súa inversa son simétricas respecto á recta $y = x$.



Decátate

- A función identidade é a función que a cada valor lle fai corresponder ese mesmo valor.

$$Id(x) = x$$

- Non debes confundir a función inversa, f^{-1}, coa función $\dfrac{1}{f(x)}$.

Faino así

COMO CALCULAMOS A FUNCIÓN INVERSA DUNHA FUNCIÓN

Atopa a función inversa de:

a) $f(x) = 3x - 1$

b) $g(x) = \dfrac{5x}{2x - 1}$

PRIMEIRO. Expresamos a función na forma $y = f(x)$ e intercambiamos x por y en ambos os membros.

a) $f(x) = 3x - 1 \rightarrow y = 3x - 1$
$x = 3y - 1$

b) $g(x) = \dfrac{5x}{2x - 1} \rightarrow y = \dfrac{5x}{2x - 1}$
$x = \dfrac{5y}{2y - 1}$

SEGUNDO. Despexamos y na ecuación resultante.

a) $x = 3y - 1 \rightarrow y = \dfrac{x + 1}{3}$

b) $x = \dfrac{5y}{2y - 1} \rightarrow 2xy - x = 5y$
$y(2x - 5) = x$
$y = \dfrac{x}{2x - 5}$

A función inversa de $f(x) = 3x - 1$ é:

$$f^{-1}(x) = \frac{x + 1}{3}$$

A función inversa de $g(x) = \dfrac{5x}{2x - 1}$ é:

$$g^{-1}(x) = \frac{x}{2x - 5}$$

ACTIVIDADES

19 Se $f(x) = 3x + 2$ e $g(x) = \dfrac{x}{x + 1}$:

a) Determina $g \circ f$, $f \circ g$ e $g \circ g$.

b) Atopa as funcións inversas de $f(x)$ e de $g(x)$, e comproba que $f \circ f^{-1}$ e $g^{-1} \circ g$ dan a función identidade.

20 Descubre cal é a función inversa de $f(x) = \dfrac{7 + x}{x}$.

a) Representa as funcións $f(x)$ e $f^{-1}(x)$.

b) Comproba se as súas gráficas son simétricas respecto á recta $y = x$.

Concepto de función

1. COMO SE DETERMINA SE A RELACIÓN ENTRE DÚAS MAGNITUDES DEFINE UNHA FUNCIÓN

10 O pai de Xaime comprou un coche que marca o consumo instantáneo de combustible en litros por cada 100 km. Un día, Xaime anota os consumos segundo a velocidade, mentres o seu pai circula por tramos de estrada recta.

Velocidade (km/h)	40	60	80	100	120
Consumo (ℓ/100 km)	7	6	4,8	5,3	6,5

Cres que esta táboa define unha función? Cales son as súas variables? Debuxa a súa gráfica.

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Determínanse as variables da relación.

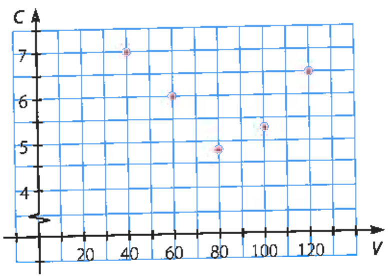
Velocidade → V
Consumo → C

SEGUNDO. Estúdase se a cada valor da variable X lle corresponde un único valor da variable Y.

Segundo a táboa, a cada velocidade, x, correspóndelle un único consumo, y.

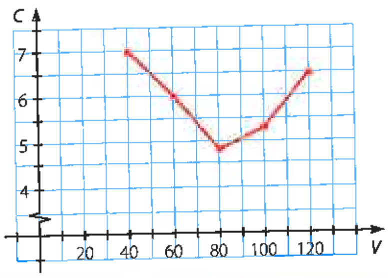
Por tanto, a relación *velocidade–consumo* é unha función.

TERCEIRO. Represéntanse os puntos da táboa.



CUARTO. Decídese se se poden unir os puntos.

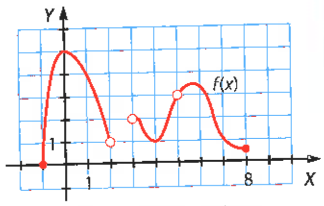
Neste caso, únense os puntos, porque aínda que non aparezan na táboa todos os consumos, para calquera velocidade sempre hai un consumo.



Dominio e percorrido

1. COMO SE CALCULA O DOMINIO E O PERCORRIDO DUNHA FUNCIÓN A PARTIR DA SÚA GRÁFICA

11 Calcula o dominio e o percorrido desta función.



SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Establécense o primeiro e último valores de x para os que está definida a función.

Neste caso, $x = -1$ e $x = 8$.

SEGUNDO. A partir da gráfica da función determínanse os tramos e os puntos en que non está definida a función. Esta función non está definida no intervalo $[2, 3]$ e no punto $x = 5$.

TERCEIRO. Exprésase o dominio cos datos obtidos:
Dom $f = [-1, 8] - [2, 3] - \{5\}$

CUARTO. Establécese en que valores de Y a función alcanza o máximo e o mínimo. O mínimo alcánzao en $y = 0$ e o máximo en $y = 5$.

QUINTO. O percorrido da función é o intervalo formado por eses valores: Im $f = [0, 5]$

2. COMO SE CALCULA O DOMINIO DE FUNCIÓNS NON ELEMENTAIS

12 Calcula o dominio desta función: $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+3}{x^2-4}}$

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Determínase o dominio das funcións elementais correspondentes.

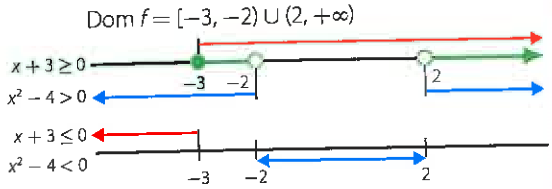
$\dfrac{x+3}{x^2-4}$ está definida se $x^2 - 4 \neq 0 \rightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -2 \end{cases}$

$\sqrt{\dfrac{x+3}{x^2-4}}$ está definida se $\dfrac{x+3}{x^2-4} \geq 0$.

SEGUNDO. A intersección dos distintos dominios é o dominio da función.

Represéntanse os intervalos correspondentes a cada inecuación, tendo en conta que, para que a fracción sexa positiva, os dous polinomios deben ter o mesmo signo.

Dom $f = [-3, -2) \cup (2, +\infty)$



Estudo dunha función

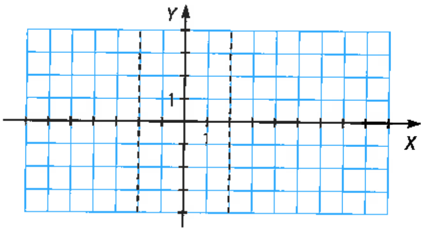
1. COMO SE REPRESENTA UNHA FUNCIÓN COÑECENDO ALGUNHAS DAS SÚAS CARACTERÍSTICAS

13 Representa unha función con estas características.

- Dominio $f = \mathbb{R} - (-2, 2)$
- Percorrido $f = (-\infty, 4]$
- Pasa polos puntos $(-5, 0)$, $(-3, 0)$, $(-2, -3)$, $(2, 0)$ e $(6, 0)$.
- Ten máximos en $(-4, 2)$ e $(4, 4)$.
- É crecente no intervalo $(-\infty, -4]$.
- É decrecente no intervalo $[4, +\infty)$.

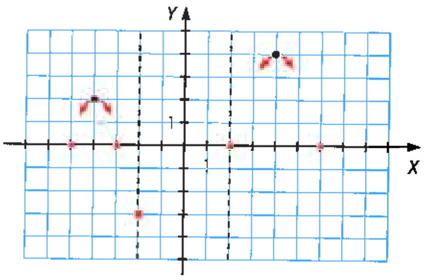
SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Estúdanse o dominio e o percorrido. Márcanse liñas descontinuas nos extremos en que non está definida a función.

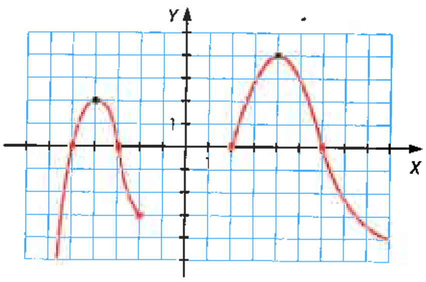


SEGUNDO. Represéntanse os puntos polos que pasa a función e os puntos en que hai mínimos e máximos.

Sobre os mínimos represéntase un arco coa súa parte cóncava cara arriba. Sobre os máximos ponse un arco coa súa parte cóncava cara abaixo.



TERCEIRO. Seguindo as indicacións das frechas que indican a dirección da gráfica e os puntos polos que pasa, represéntase a función.

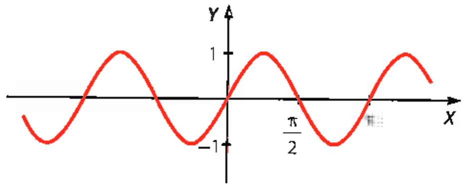


Periodicidade

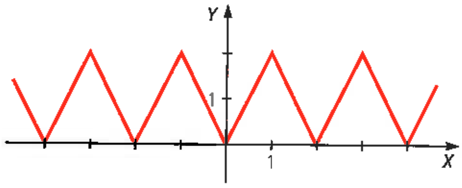
1. COMO SE DETERMINA O PERÍODO DUNHA FUNCIÓN

14 Determina o período das seguintes funcións.

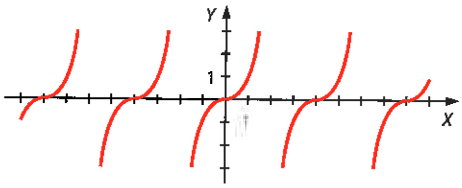
a)



b)



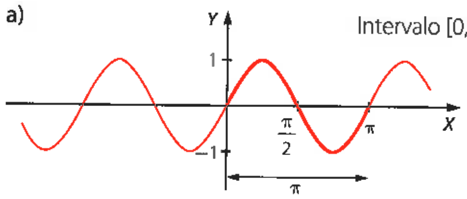
c)



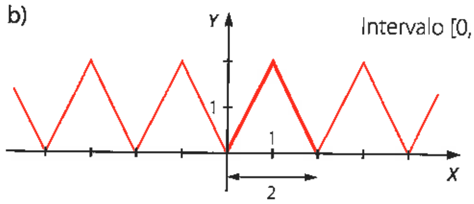
SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Se é unha función periódica, a súa gráfica repítese cada certo intervalo. Determínanse os extremos dun deses intervalos.

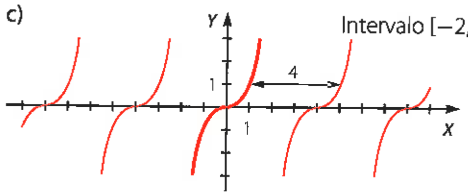
a) Intervalo $[0, \pi]$



b) Intervalo $[0, 2]$



c) Intervalo $[-2, 2]$



SEGUNDO. A diferenza entre os extremos destes intervalos é o período.

a) $T = \pi - 0 = \pi$

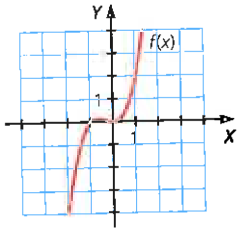
b) $T = 2 - 0 = 2$

c) $T = 2 - (-2) = 4$

Transformacións de funcións

1. COMO SE DETERMINA A GRÁFICA DUNHA FUNCIÓN A PARTIR DE SIMETRÍAS E TRANSLACIÓNS VERTICAIS DOUTRA GRÁFICA MÁIS SINXELA

15 A partir da gráfica de $f(x) = x^3 + x^2$, determina a gráfica destas funcións.



a) $g(x) = -x^3 - x^2 - 2$

b) $h(x) = -x^3 + x^2 - 2$

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Establécese a relación entre as dúas funcións.

a) $g(x) = -x^3 - x^2 - 2 = -(x^3 + x^2) - 2$

$\xrightarrow{f(x) = x^3 + x^2} g(x) = -f(x) - 2 = -[f(x) + 2]$

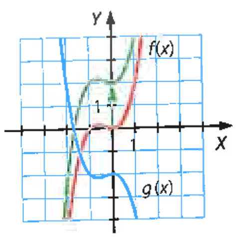
b) $h(x) = -x^3 + x^2 - 2 = (-x)^3 + (-x)^2 - 2$

$\xrightarrow{f(x) = x^3 + x^2} h(x) = f(-x) - 2$

SEGUNDO. Identifícanse as simetrías e as translacións verticais necesarias para representar as gráficas, e debúxanse.

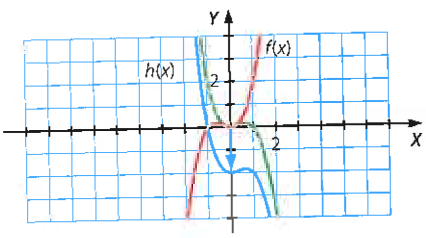
a) $f(x) + 2 \longrightarrow$ Desprázase $f(x)$ verticalmente 2 unidades cara arriba.

$-[f(x) + 2] \longrightarrow$ Debúxase a gráfica simétrica á anterior respecto do eixe X.



b) $f(-x) \longrightarrow$ Debúxase a gráfica simétrica a $f(x)$ respecto do eixe Y.

$f(-x) - 2 \longrightarrow$ Desprázase a gráfica verticalmente 2 unidades cara abaixo.



2. COMO SE DETERMINA A GRÁFICA DUNHA FUNCIÓN A PARTIR DE SIMETRÍAS E TRANSLACIÓNS HORIZONTAIS DOUTRA GRÁFICA MÁIS SINXELA

16 Determina a gráfica da función $i(x) = -(x + 2)^3 - (x + 2)^2$ a partir da gráfica de $f(x) = x^3 + x^2$.

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Establécese a relación entre as dúas funcións.

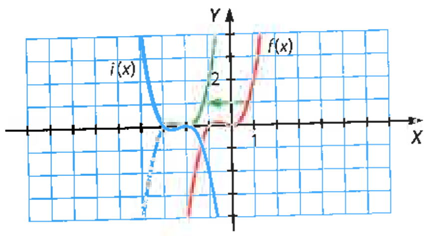
$i(x) = -(x + 2)^3 - (x + 2)^2 = -[(x + 2)^3 + (x + 2)^2]$

$\xrightarrow{f(x) = x^3 + x^2} i(x) = -f(x + 2)$

SEGUNDO. Identifícanse as simetrías e as translacións horizontais necesarias para representar as gráficas, e debúxanse.

$f(x + 2) \longrightarrow$ Desprázase $f(x)$ horizontalmente 2 unidades cara á esquerda.

$-f(x + 2) \longrightarrow$ Debúxase a gráfica simétrica da anterior respecto do eixe X.



Operacións con funcións

1. COMO SE CALCULA O DOMINIO DA SUMA, DO PRODUTO E DO COCIENTE DE FUNCIÓNS

17 Dadas $f(x) = \dfrac{8}{x^2 - 4}$ e $g(x) = x + 1$, calcula o dominio das seguintes funcións.

a) $(f + g)(x)$ **b)** $(f \cdot g)(x)$ **c)** $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Calcúlase o dominio de f e g.

$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ $\quad$ $\text{Dom } g = \mathbb{R}$

SEGUNDO. Calcúlanse os dominios das operacións.

- O dominio de $f + g$ e $f \cdot g$ é o conxunto de todos os valores que pertencen ao Dom f e ao Dom g.
  - a) $\text{Dom } (f + g) = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$
  - b) $\text{Dom } (f \cdot g) = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$
- O dominio de $\dfrac{f}{g}$ é o conxunto de todos os valores que pertencen ao Dom f e ao Dom g e non anulan $g(x)$.
  - c) $\text{Dom } \dfrac{f}{g} = \mathbb{R} - \{-2, 2\} - \{-1\} = \mathbb{R} - \{-2, -1, 2\}$

Composición de funcións

1. COMO SE COMPOÑEN FUNCIÓNS

18 **Dadas as funcións $f(x) = x^2 + 8$ e $g(x) = 3\log_2 x$, atopa estas funcións compostas.**

a) $f \circ g$ **b)** $g \circ f$

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Aplícase a definición de composición de funcións.

a) $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(3\log_2 x)$

$g(x) = 3\log_2 x$

b) $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(x^2 + 8)$

$f(x) = x^2 + 8$

SEGUNDO. Substitúese a variable x da función pola expresión que está entre parénteses.

a) $f(3\log_2 x) = (3\log_2 x)^2 + 8 = 9\log_2^2 x + 8$

$f(x) = x^2 + 8$

b) $g(x^2 + 8) = 3\log_2(x^2 + 8)$

$g(x) = 3\log_2 x$

2. COMO SE EXPRESA UNHA FUNCIÓN COMO COMPOSICIÓN DOUTRAS FUNCIÓNS

19 **Expresa esta función como composición doutras funcións máis sinxelas.**

$$h(x) = \cos\,[\ln(x^2 - 1)]$$

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Divídese a función en funcións máis sinxelas.

$h_1(x) = x^2 - 1$

$h_2(x) = \ln x$

$h_3(x) = \cos x$

SEGUNDO. Compóñense as funcións para comprobar que son iguais á función que se busca.

$h_3[h_2[h_1(x)]] = h_3\,[h_2(x^2 - 1)] = h_3\,[\ln(x^2 - 1)] =$

$h_1(x) = x^2 - 1$ $\quad$ $h_2(x) = \ln x$

$= \cos\,[\ln(x^2 - 1)] = h(x)$

$h_3(x) = \cos x$

3. COMO SE CALCULA O DOMINIO DA COMPOSICIÓN DE DÚAS FUNCIÓNS

20 Calcula o dominio de $g \circ f$.

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \qquad g(x) = \sqrt{x-1}$$

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Determínase a expresión da composición das funcións.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x+1}{x}\right) = \sqrt{\frac{x+1}{x} - 1}$$

SEGUNDO. Calcúlase o dominio da función que resulta.

- A fracción $\dfrac{x+1}{x}$ está definida para $x \neq 0$.
- A raíz está definida sempre que o radicando sexa positivo ou cero.

$$\frac{x+1}{x} - 1 \geq 0 \rightarrow \frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}}{x} \geq 0 \rightarrow x > 0$$

A intersección dos dous dominios é o dominio da composición.

Dom $g \circ f = (0, +\infty)$

Función inversa

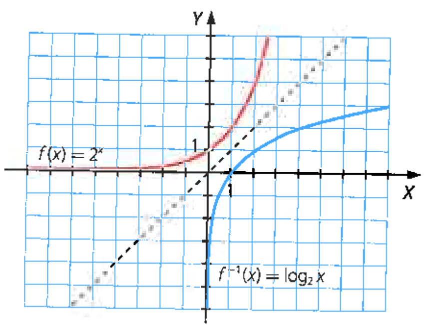
1. COMO SE DETERMINA A GRÁFICA DUNHA FUNCIÓN INVERSA

21 **Debuxa a gráfica da función $f(x) = 2^x$ e a gráfica da súa función inversa.**

SOLUCIÓN

PRIMEIRO. Debúxase a gráfica da función $y = x$, que é a recta bisectriz do 1.° e 3.° cuadrantes.

SEGUNDO. Represéntase a gráfica de $f(x)$ e a súa simétrica con respecto a esa recta.

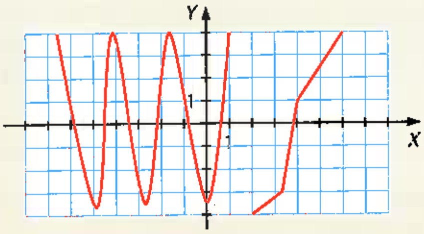


ACTIVIDADES

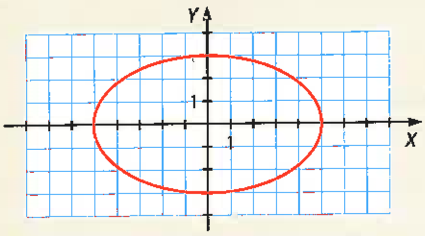
Concepto de función

21 Razoa se as seguintes gráficas poden corresponder a unha función.

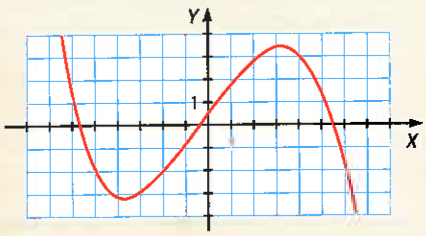
a)



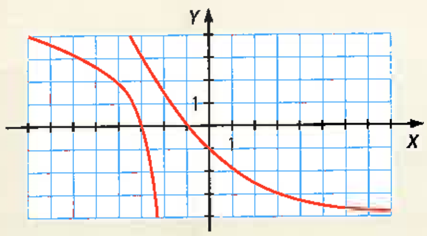
b)



c)



d)



22 Realiza unha táboa e representa estas funcións.

a) Cada número enteiro relacionámolo co seu número de divisores positivos.

b) Cada número real relacionámolo coa súa parte enteira.

c) A cada número facémoslle corresponder el mesmo menos o seu valor absoluto.

d) A cada número correspóndelle o valor 2.

23 Ao longo dun día medimos a lonxitude, en metros, da sombra que proxecta un farol desde o amencer ata que anoitece.

As medidas, tomadas cada dúas horas, desde as 6:00 h, móstranse a continuación.

0	25	17	5	2
6	19	32	0	

a) Cres que as táboas definen unha función?

b) En caso afirmativo, identifica as súas variables.

Propiedades das funcións

24 Comproba se os seguintes puntos están nos dominios de cada función.

a) Os puntos $x = 3$, $x = 2$ e $x = -5$ para a función $f(x) = \sqrt{x+1}$.

b) Os puntos $x = 3$, $x = 4$ e $x = 5$ para a función $f(x) = \ln(x-4)$.

c) Os puntos $x = 2$, $x = -2$ e $x = 0$ para a función $f(x) = \dfrac{3x-6}{x+2}$.

25 Estuda se os valores da ordenada, y, están incluídos nos percorridos destas funcións.

a) As ordenadas $y = 3$, $y = 2$ e $y = -5$ para a función $f(x) = \sqrt{3x-3}$.

b) As ordenadas $y = 0$, $y = 30$ e $y = -3$ para a función $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

c) As ordenadas $y = 1$, $y = \dfrac{13}{6}$ e $y = -7$ para a función $f(x) = \dfrac{2x-5}{x+2}$.

26 Determina o dominio destas funcións.

a) $f(x) = \dfrac{x-3}{7}$

b) $f(x) = \dfrac{7}{x-3}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

d) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+2x}$

27 Estuda o dominio das seguintes funcións.

a) $y = \sqrt{x+3}$

b) $y = \sqrt{2x^2+3x-2}$

c) $y = \sqrt{x^2-4x+4}$

d) $y = \sqrt{5-2x}$

e) $y = \sqrt{x^2+2x+9}$

f) $y = \sqrt{6+x-x^2}$

28 Escribe o dominio das funcións.

a) $y = \log_4(x-4)$

b) $y = \cos(1-x)$

c) $y = 3^{\ln x}$

d) $y = \operatorname{sen}(x-\pi)$

e) $y = \ln\left(\dfrac{10}{4-x}\right)$

29 Analiza o dominio das seguintes funcións.

a) $y = \log_4(5+x)$

b) $y = 2^{3x-6}$

c) $y = 5^{\frac{1}{x-2}}$

d) $y = 2 - \operatorname{tg} x$

e) $y = \dfrac{3}{\operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)}$

30 Determina o dominio das funcións.

a) $y=\sqrt{x+1}+\sqrt{8-x}$

b) $y=\sqrt[3]{x+2}\cdot\sqrt{x+3}$

c) $y=\sqrt{2x-4}\cdot\sqrt{1-x}$

31 Estuda o dominio e o percorrido das seguintes funcións.

a) $y=5x-3$

b) $y=2+\sqrt{x-1}$

c) $y=\dfrac{3}{x}$

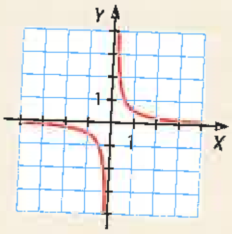
d) $y=2-4^x$

e) $y=\sqrt{3-x}+\sqrt{3+x}$

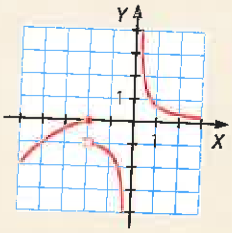
f) $y=\dfrac{2}{x-2}$

32 Estuda as características das seguintes funcións.

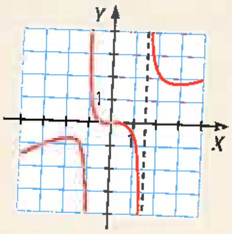
a)



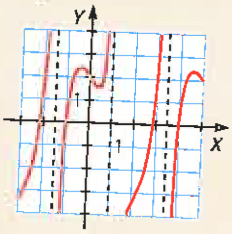
b)



c)



d)



33 Considera a función que relaciona o tempo, en días, coa superficie visible da Lúa.

a) É unha función periódica?

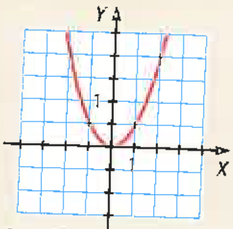
b) En caso afirmativo, indica o período.

34 Estuda as simetrías da función.

$$f(x)=x^3-3x$$

Transformacións de funcións

35 Dada a gráfica da función $y=x^2$,



representa estas funcións.

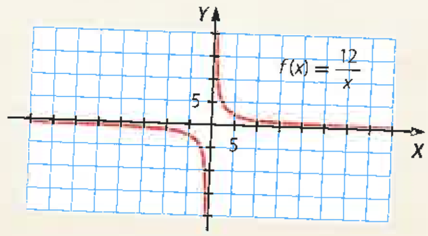
a) $y=(x-2)^2$

b) $y=x^2+3$

c) $y=(x+3)^2$

d) $y=x^2-4$

36 A partir da seguinte función:



obtén a gráfica destas funcións.

a) $g(x)=\dfrac{12}{x-2}$

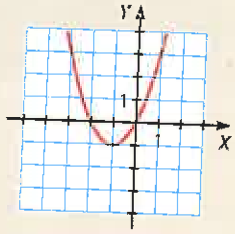
b) $h(x)=\dfrac{12}{x+4}$

c) $i(x)=\dfrac{12}{x}+1$

d) $j(x)=-\dfrac{12}{x}$

37 Coa gráfica desta función:

$$f(x)=x^2+2x$$



representa graficamente as seguintes funcións.

a) $f(x-2)$

b) $-f(x)$

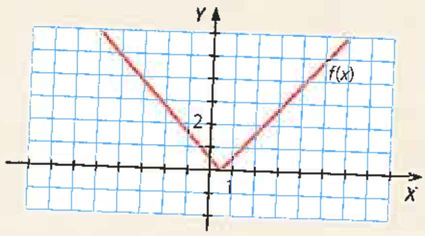
c) $f(x+1)$

d) $f(x)+2$

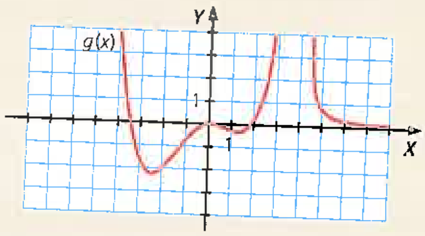
Razoa como o fas e calcula a súa expresión alxébrica.

38 A partir de cada gráfica, debuxa a gráfica das funcións que se indican.

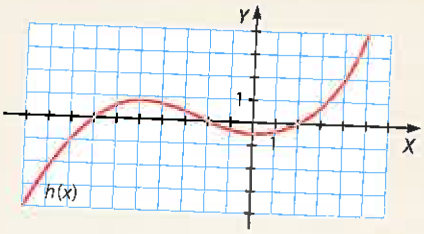
a) $f(-x)$ e $-f(x)$



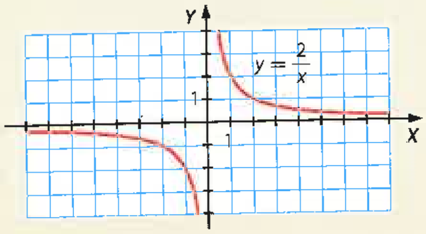
b) $g(x)+1$ e $g(x)-3$



c) $h(x+1)$ e $h(x-2)$



39 A gráfica pertence á función $y = \frac{2}{x}$.



Constrúe a partir dela a gráfica das funcións.

a) $y = \frac{2}{x-1} + 3$

b) $y = 2 - \frac{2}{x-3}$

c) $y = \frac{2}{x+2} - 1$

d) $y = -1 - \frac{2}{x+1}$

40 Dada a función $f(x) = \frac{8}{x}$, determina a expresión alxébrica destas funcións e represéntaas.

a) $f(x-3)$ b) $f(x)+3$ c) $f(-x)$ d) $-f(x)$

Operacións con funcións

41 Dadas as funcións:

$$f(x) = \sqrt{x+2} \qquad g(x) = \frac{3}{x^2-1}$$

calcula.

a) $(f+g)(5)$

b) $(f-g)(3)$

c) $(f \cdot g)(0)$

d) $\left(\frac{f}{g}\right)(-2)$

e) $(f \cdot f)(2)$

f) $(g+f)(5)$

g) $(g-f)(3)$

h) $(f + f \cdot g)(0)$

i) $\left(\frac{g}{f}\right)(-2)$

j) $f^2(2)$

42 Calcula o dominio das funcións.

$$f(x) = \sqrt{x^2-4} \qquad g(x) = \sqrt{25-x^2}$$

Utiliza o resultado para calcular o dominio das seguintes funcións.

a) $(f+g)(x)$

b) $(f \cdot g)(x)$

c) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

d) $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$

43 Dadas as funcións:

$$m(x) = \sqrt{x^2-4} \qquad n(x) = x+6 \qquad p(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

define as seguintes funcións e determina os seus dominios.

a) $(m+n)(x)$

b) $(n+p)(x)$

c) $\left(\frac{n}{m}\right)(x)$

d) $(m \cdot n + p)(x)$

Composición de funcións

44 Dadas as funcións:

$$f(x) = 2^x \qquad g(x) = x^2 \qquad h(x) = \frac{1}{x}$$

calcula as composicións de funcións.

a) $f \circ g$

b) $g \circ h$

c) $h \circ f$

d) $g \circ f$

e) $h \circ g$

f) $f \circ h$

Determina o valor de cada función para $x = 3$.

45 Comproba coas funcións $f(x) = \sqrt{x+1}$ e $g(x) = 3x - 2$ que a composición de funcións non é conmutativa. Calcula o dominio de $f \circ g$ e de $g \circ f$.

46 Explica de que maneira hai que compoñer as funcións:

$$f(x) = \sqrt{x^2+4} \qquad g(x) = 5x+1 \qquad h(x) = \frac{2}{x+1}$$

para obter as seguintes funcións.

a) $m(x) = 5\sqrt{x^2+4} + 1$

b) $n(x) = 25x + 6$

c) $p(x) = \frac{x+11}{x+1}$

47 Determina $f \circ f^{-1}$ e $f^{-1} \circ f$ nos pares de funcións para comprobar se son inversas ou non.

a) $f(x) = 3x - 1$ e $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + 1$

b) $f(x) = 2^x$ e $f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

c) $f(x) = 2^x$ e $f^{-1}(x) = \log_2 x$

d) $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $f^{-1}(x) = \operatorname{arc\,sen} x$

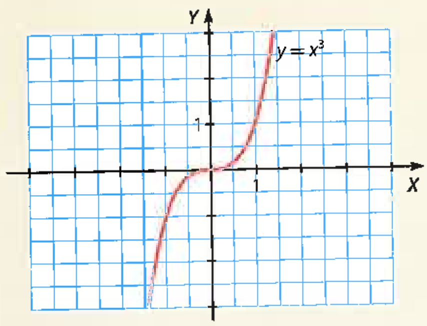
e) $f(x) = x^2 + 2$ e $f^{-1}(x) = \sqrt{x-2}$

48 Calcula a función inversa de cada función.

a) $y = 2x + 5$ b) $y = \frac{3-x}{2}$ c) $y = \sqrt[3]{2x-3}$

Comproba que as súas gráficas son simétricas respecto á bisectriz do primeiro cuadrante.

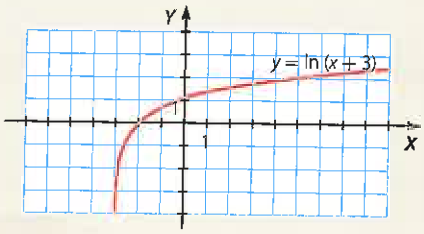
49 Dada a gráfica da función $y = x^3$:



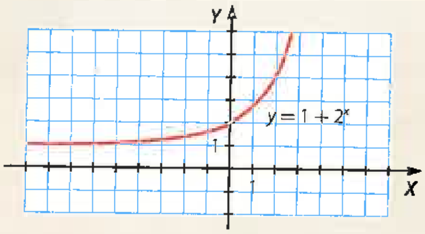
debuxa a gráfica da súa función inversa.

50 Debuxa as funcións inversas.

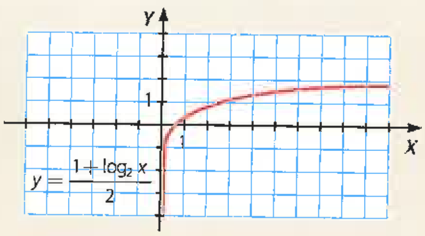
a)



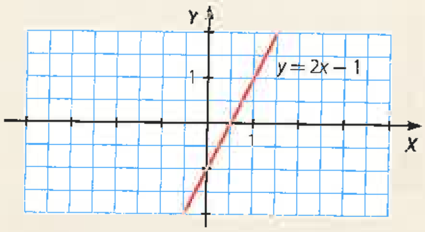
b)



c)



d)



51 Debuxa funcións que cumpran estas propiedades.

a) O seu dominio e o seu percorrido son $\mathbb{R}$.

b) O seu dominio é $\mathbb{R} - \{1\}$.

c) É crecente e o seu dominio é $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$.

d) É logarítmica e o seu dominio é $(3, +\infty)$.

e) É logarítmica e o seu dominio é $(-\infty, -2)$.

f) É exponencial e o seu dominio é $\mathbb{R} - \{0\}$.

Problemas con funcións

52 Nunha vivenda pagan 10 euros de gasto fixo e 0,50 euros por cada quilowatt consumido á empresa que lles subministra electricidade.

a) Obtén unha expresión da relación que existe entre o consumo e o prezo, e represéntaa.

b) Se a esta cantidade hai que aumentarlle o 16 % de IVE, como será a ecuación? Que variación sofre a gráfica?

53 Atopa o dominio das funcións do tipo $f(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$, sendo n un número natural.

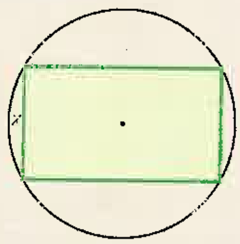
54 O manual de usuario dun vehículo afirma que o ruído producido polo motor segue aproximadamente a fórmula:

$$r = at^2 + 2{,}3t + 8$$

onde t é o número de anos de antigüidade do vehículo, a é un número fixo, que se denomina coeficiente de atenuación, e r é o nivel de ruído, medido en decibeis.

A semana pasada levei o meu vehículo a pasar a revisión dos catro anos e no informe figura que a medición foi de 27 decibeis. Cal é o coeficiente de atenuación? Cantos decibeis producirá aos oito anos?

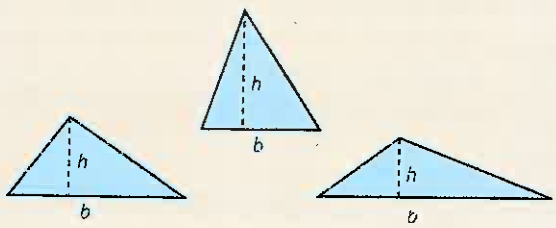
55 Nunha circunferencia de 5 cm de raio inscríbese un rectángulo de lado x.



a) Expresa a área en función de x. Cal é o seu dominio?

b) Realiza un tenteo para determinar o máximo valor que pode tomar esa función. Canto medirán os lados do rectángulo nese caso? Que tanto por cento da superficie do círculo ocupa o rectángulo?

56 Considera os triángulos cunha superficie que mide S.



a) Escribe a expresión alxébrica que relaciona a base en función da altura nestes triángulos.

b) Cal é a función que relaciona a altura en función da base?

c) Representa ambas as funcións.