EXERCÍCIOS RESOLTOS

Funcións e Derivadas

1. A cantidade de CO_2 (en millóns de toneladas) emitida á atmosfera por unha determinada rexión ó longo do ano 2020, vén dada pola función $C(t)=\begin{cases} 5-\dfrac{t}{3} & se\ \ 0\leqslant t<6 \\ \dfrac{1}{4}t^2-4t+18 & se\ \ 6\leqslant t\leqslant 12 \end{cases}$ onde t é o tempo transcorrido en meses desde o comezo do ano.

a. Estudar en que períodos se produciu un aumento ou diminución da cantidade de CO_2 emitida á atmosfera.

b. Cales son as cantidades máxima e mínima de CO_2 emitidas á atmosfera ao longo do ano 2020? En que momentos se produciron?

c. Representar a gráfica da función $C(t)$ tendo en conta o estudo realizado nos apartados anteriores.

Antes de estudar a monotonia (crecimento ou decrecimento), para o que utilizaremos as derivadas, debemos coñecer o domínio e a continuidade da función.

A función ten domínio $Dom\, C=[0,12]$.

Continuidade

é contínua no intervalo $(0,6)$ por ser unha función polinómica definida nun intervalo

é contínua no intervalo $(6,12)$ polo mesmo motivo

é contínua pola direita en $t=0$ por coincidir $C(0)$ co límite lateral pola direita en 0 : $\lim_{t\to 0^+} C(t)=\lim_{t\to 0^+} 5-\frac{t}{3}=5-\frac{0}{3}=5$

é contínua pola esquerda en $t=12$ por coincidir $C(12)$ co límite lateral pola direita en 12 : $\lim_{t\to 12^-} C(t)=\lim_{t\to 12^-} \frac{1}{4}t^2-4t+18=\frac{1}{4}\cdot 12^2-4\cdot 12+18=36-48+18=6$

para saber se é contínua en $t=6$ temos que calcular os límites laterais:

$$\lim_{t\to 6^-} C(t)=\lim_{t\to 6^-} 5-\frac{t}{3}=5-\frac{6}{3}=3$$

$$\lim_{t\to 6^+} C(t)=\lim_{t\to 6^+} \frac{1}{4}t^2-4t+18=\frac{1}{4}\cdot 6^2-4\cdot 6+18=9-24+18=3$$

ademais $C(6)=3$, polo que $C(t)$ é contínua en $t=6$, ao coincidir os límites laterais co valor da función en 6 .

En definitiva $C(t)$ é contínua en $(0,12)$ e é contínua pola direita en $t=0$ e pola esquerda en $t=12$.

Derivabilidade

$C(t)$ é derivábel en $(0,6)\cup(6,12)$, e a sua derivada nese conxunto é:

$$C'(t)=\begin{cases} -\frac{1}{3} & se \;\; 0<t<6 \\ \frac{1}{2}t-4 & se \;\; 6<t<12 \end{cases}$$

Ademais, nos pontos $t=0$, $t=6$ e $t=12$ temos:

$t=0$: a derivada lateral pola direita é $C'(0^+)=\lim_{t\to 0^+} C'(t)=\lim_{t\to 0^+} -\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$

$t=6$: a derivada lateral pola esquerda é $C'(6^-)=\lim_{t\to 6^-} C'(t)=\lim_{t\to 6^-} -\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$ e a derivada lateral pola direita é $C'(6^+)=\lim_{t\to 6^+} C'(t)=\lim_{t\to 6^+} \frac{1}{2}t-4=-1$

$t=12$: a derivada lateral pola esquerda é $C'(12^-)=\lim_{t\to 12^-} C'(t)=\lim_{t\to 12^-} \frac{1}{2}t-4=2$

En particular, $C(t)$ non é derivábel en $t=6$ por non coincidir nese ponto as derivadas laterais.

O estudo do crecimento e decrecimento da función corresponde co estudo do signo da derivada:

Como $C'(t)=\begin{cases} -\frac{1}{3} & se \;\; 0<t<6 \\ \frac{1}{2}t-4 & se \;\; 6<t<12 \end{cases}$, esta derivada é constante e negativa no intervalo $(0,6)$, polo que a función é decrecente nese intervalo.

No intervalo $(6,12)$ estudamos os "ceros" de $\frac{1}{2}t-4$: $\frac{1}{2}t-4=0 \iff t=8$, logo temos que:

para $t \in (6,8)$: $C'(t)=\frac{1}{2}t-4<0$, logo $C(t)$ é decrecente neste intervalo

para $t \in (8,12)$: $C'(t)=\frac{1}{2}t-4>0$, logo $C(t)$ é crecente neste intervalo

para $t=8$: $C'(8)=0$, asi que $C(t)$ presenta un mínimo relativo en $t=8$

Resumindo:

$C(t)$ é decrecente en $(0,6)$ e tamén en $(6,8)$; como ademais é contínua en $t=6$, podemos afirmar que $C(t)$ é decrecente en $(0,8)$

$C(t)$ é crecente en $(8,12)$; como ademais é contínua en $t=6$, podemos afirmar que $C(t)$ é decrecente en $(0,8)$

Logo as emisións foron decrecentes durante os 8 primeiros meses do ano e pasaron a ser crecentes durante os 4 últimos meses.

Mirando o valor de $C(t)$ nos extremos no domínio e no resto de pontos “singulares”, temos:

$C(0)=5$, $C(8)=2$ e $C(12)=6$

Logo: $C(t)$ presenta un mínimo relativo (e tamén absoluto) en $t=8$ e un máximo absoluto en $t=12$, o que significa que a mínima emisión absoluta de CO2 produciu-se no intre $t=8$ (que corresponde co paso de agosto a setembro) con 2 millóns de toneladas e a máxima emisión absoluta produciu-se en t=12 (que corresponde co final de decembro), con 6 millóns de toneladas.