Tema 3

Matrices e Sistemas Lineares

Definición de matriz

Unha matriz é un conxunto ordeado de números reais, estruturado en filas e colunas.

$$\begin{array}{rc}
 & \begin{array}{ccccc} \text{col 1} & \text{col 2} & & & \text{col n} \\ \downarrow & \downarrow & & & \downarrow \end{array} \\
\begin{array}{r} \text{fila 1} \longrightarrow \\ \text{fila 2} \longrightarrow \\ \\ \\ \text{fila m} \longrightarrow \end{array} & A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}
\end{array}$$

Dimensión dunha matriz

Chama-se dimensión dunha matriz ao número de filas e de colunas que contén.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A é unha matriz de dimensión m,n

$$A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

m filas

n colunas

Os subíndices indican <u>sempre</u> as filas en primeiro lugar e as colunas a continuación.

Tipos de matrices I

As matrices poden clasificar-se atendendo á sua dimensión e aos seus elementos.

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & \pi & \sqrt{7} \end{pmatrix}$$

matriz fila

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ t \end{pmatrix}$$

matriz coluna

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matriz nula de dimensión 3,4

Tipos de matrices II

Clasificación atendendo á dimensión.

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4} & x \\ 0 & 2 & y \\ 3 & 2 & z \end{pmatrix}$$

matriz cuadrada

igual número de filas que de colunas

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

matriz rectangular

distinto número de filas que de colunas

Matrices cuadradas

Distintos tipos de matrices cuadradas atendendo aos seus elementos.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

matriz diagonal

os elementos que non pertencen
á diagonal principal son nulos

diagonal principal

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

matriz escalar
de orden 3
(dimensión 3,3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matriz unitária
de orden 4
(dimensión 4,4)

Matrices triangulares

Chaman-se matrices triangulares aquelas que teñen nulos os elementos situados por baixo da diagonal principal (triangular superior) ou ben por cima dela (triangular inferior).

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

matriz triangular superior

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 4 & \frac{2}{5} & 0 \\ -1 & \pi & 3 \end{pmatrix}$$

matriz triangular inferior

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

toda matriz diagonal é triangular superior e triangular inferior de xeito simultáneo

Trasposición de matrices

A trasposición de matrices consiste en mudar os elementos da posición ij á posición ji.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

filas de A → colunas de A^t

colunas de A

filas de A^t

$$A^t=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3,5}(\mathbb{R})$$

matriz trasposta de A

Matrices simétricas e antisimétricas

Di-se que unha matriz cuadrada é simétrica se coincide coa sua trasposta.

$$A^t = A$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

matriz simétrica

os elementos da posición ij coinciden cos da posición ji

Di-se que unha matriz cuadrada é antisimétrica (ou hemisimétrica) se coincide coa oposta da sua trasposta.

$$A^t = -A$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -6 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & -5 \\ 6 & -2 & 0 & 0 \\ -7 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matriz antisimétrica

os elementos da posición ij son opostos dos da posición ji

Suma de matrices

A suma de matrices da mesma dimensión realiza-se sumando os elementos da mesma posición en cada unha das matrices.

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & -3 \\ 5 & 0 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & -1 \\ -3 & -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & -1 \\ 6 & 5 & -1 & 4 \\ -1 & -8 & 2 & 6 \end{pmatrix}=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)$$

Produto de matrices por escalares

A produto dunha matriz por un escalar realiza-se multiplicando o escalar por cada un dos elementos da matriz.

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & -1 \\ -3 & -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3\cdot A=\begin{pmatrix} -3 & -9 & 3 & 6 \\ 3 & 15 & 0 & -3 \\ -9 & -12 & 0 & 6 \end{pmatrix}=\left(3\cdot a_{ij}\right)$$

Propriedades das operacións matriciais

i. Asociativa da suma de matrices $\quad (A+B)+C=A+(B+C)$

ii. Elemento neutro da suma de matrices $\quad A+E=E+A=A$

iii. Elemento simétrico da suma de matrices $\quad A+(-A)=(-A)+A=E$

iv. Comutativa da suma de matrices $\quad A+B=B+A$

v. Distributiva do produto a respeito da suma de matrices $\quad \alpha\cdot(A+B)=\alpha\cdot A+\alpha\cdot B$

vi. Distributiva do produto a respeito da suma de escalares $\quad (\alpha+\beta)\cdot A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A$

vii. Elemento neutro do produto por escalares $\quad 1\cdot A=A$

viii. Pseudo-asociativa $\quad \alpha\cdot(\beta\cdot A)=(\alpha\cdot\beta)\cdot A$

Espazo vectorial sobre $\mathbb{R}$

Calquer conxunto no que se definan duas operacións coa condición de que cumpran as propriedades anteriores denomina-se espazo vectorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.

$$A \in M_{i,j}(\mathbb{R}) \qquad B \in M_{i,j}(\mathbb{R})$$

$$A + B \in M_{i,j}(\mathbb{R})$$

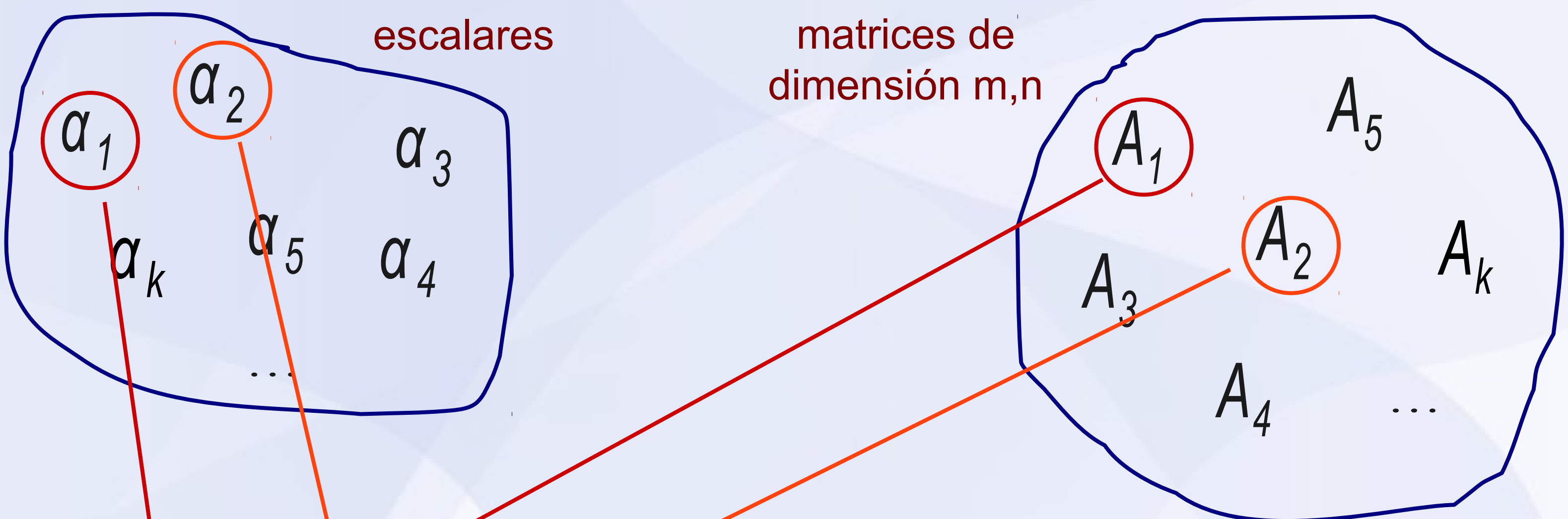
$$\alpha \in \mathbb{R} \qquad A \in M_{i,j}(\mathbb{R})$$

$$\alpha \cdot A \in M_{i,j}(\mathbb{R})$$

O conxunto das matrices de dimensión i,j unha vez que se definen a suma de matrices e o produto de matrices por números reais (escalares) é un espazo vectorial.

Combinación linear

Dado un conxunto de elementos dun espazo vectorial e un conxunto de escalares (números reais), chama-se combinación linear a unha expresión como a que segue:



$$\alpha_1 \cdot A_1 + \alpha_2 \cdot A_2 + \alpha_3 \cdot A_3 + \alpha_4 \cdot A_4 + \ldots + \alpha_k \cdot A_k \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

Exemplos de combinacións lineares

matrices de dimensión 2,3

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -3\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 5\\ 3 & -3 & 0\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}3 & 3 & -2\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix}4 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$3\cdot A+1\cdot B+0\cdot C+(-1)\cdot D=\begin{pmatrix}-8 & -1 & -6\\ 10 & -1 & 10\end{pmatrix}$$

esta matriz é combinación linear de

Combinación linear: casos I

matrices de dimensión 1,2

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}$ $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A_3 = \begin{pmatrix} -3 & 6 \end{pmatrix}$

$A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}$ $A_5 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}$ $A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \end{pmatrix}$

A matriz nula $\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ é combinación linear de calquer conxunto:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} -3 & 6 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -3 & 6 \end{pmatrix} + \ldots + 0 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Combinación linear: casos II

matrices de dimensión 1,2

$$A_1=\begin{pmatrix}1 & -2\end{pmatrix} \qquad A_2=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix} \qquad A_3=\begin{pmatrix}-3 & 6\end{pmatrix}$$

$$A_4=\begin{pmatrix}3 & 1\end{pmatrix} \qquad A_5=\begin{pmatrix}-1 & 2\end{pmatrix} \qquad A_6=\begin{pmatrix}0 & 4\end{pmatrix}$$

Calquer matriz é combinación linear de si mesma:

$$\begin{pmatrix}-3 & 6\end{pmatrix}= 1\cdot\begin{pmatrix}-3 & 6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 4\end{pmatrix}= 1\cdot\begin{pmatrix}0 & 4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3 & 1\end{pmatrix}= 1\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\end{pmatrix}$$

Combinación linear: casos III

matrices de dimensión 1,2

$$A_1=\begin{pmatrix}1 & -2\end{pmatrix} \qquad A_2=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix} \qquad A_3=\begin{pmatrix}-3 & 6\end{pmatrix}$$

$$A_4=\begin{pmatrix}3 & 1\end{pmatrix} \qquad A_5=\begin{pmatrix}-1 & 2\end{pmatrix} \qquad A_6=\begin{pmatrix}0 & 4\end{pmatrix}$$

É a matriz $\begin{pmatrix}-1 & 2\end{pmatrix}$ combinación linear de $\begin{pmatrix}-3 & 6\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}1 & -2\end{pmatrix}$?

$$\begin{pmatrix}-1 & 2\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}-3 & 6\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\end{pmatrix}$$

É a matriz $\begin{pmatrix}0 & 4\end{pmatrix}$ combinación linear de $\begin{pmatrix}-3 & 6\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}1 & -2\end{pmatrix}$?

$$\begin{pmatrix}0 & 4\end{pmatrix}=?\cdot\begin{pmatrix}-3 & 6\end{pmatrix}+?\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\end{pmatrix}$$

Combinación linear: casos IV

matrices de dimensión 1,3

$$A_1=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\end{pmatrix} \qquad A_2=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\end{pmatrix} \qquad A_3=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

É a matriz B combinación linear de $\{A_1, A_2, A_3\}$?

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\end{pmatrix}+(-5)\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}\checkmark$$

É posíbel expresar a matriz B como combinación linear de $\{A_1, A_2, A_3\}$ de algunha outra forma distinta da anterior?

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}\checkmark$$

Haberá mais posibilidades? Cantas?

Combinación linear: casos V

matrices de dimensión 1,3

$$A_1=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\end{pmatrix} \qquad A_2=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\end{pmatrix} \qquad A_3=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}-2 & 3 & -1\end{pmatrix}$$

É a matriz B combinación linear de $\{A_1, A_2, A_3\}$?

$$\begin{pmatrix}-2 & 3 & -1\end{pmatrix}=\frac{13}{2}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\end{pmatrix}+(-8)\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\end{pmatrix}+\frac{9}{2}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

✓

É posíbel expresar a matriz B como combinación linear de $\{A_1, A_2, A_3\}$

de algunha outra forma distinta da anterior?

$$\begin{pmatrix}-2 & 3 & -1\end{pmatrix}=?\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\end{pmatrix}+?\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\end{pmatrix}+?\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

✗

Non hai mais que <u>unha</u> maneira.

Combinación linear: casos VI

matrices de dimensión 1,3

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

É a matriz O combinación linear de $\{A_1, A_2, A_3\}$?

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

É posíbel expresar a matriz O como combinación linear de $\{A_1, A_2, A_3\}$ de algunha outra forma distinta da anterior?

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

Haberá mais posibilidades? Cantas?

Combinación linear: casos VII

matrices de dimensión 1,3

$$A_1=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\end{pmatrix} \qquad A_2=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\end{pmatrix} \qquad A_3=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$O=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

É a matriz O combinación linear de $\{A_1, A_2, A_3\}$?

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

É posíbel expresar a matriz O como combinación linear de $\{A_1, A_2, A_3\}$

de algunha outra forma distinta da anterior?

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}=?\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\end{pmatrix}+?\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\end{pmatrix}+?\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

Non hai mais que unha maneira.

Independéncia linear dun conxunto

Di-se que un conxunto de elementos nun espazo vectorial é linearmente independente se e só se a única combinación linear que dá o elemento neutro da suma é a trivial, é dicer, a que ten nulos todos os escalares.

$\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k\}$ é linearmente independente $:\Leftrightarrow$

$:\Leftrightarrow$ se $\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \alpha_3 \cdot v_3 + \ldots + \alpha_k \cdot v_k = 0$ entón

os escalares son todos nulos: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k = 0$

Non hai mais que <u>unha</u> maneira.

Dependéncia linear dun conxunto

No caso contrário, di-se que un conxunto é linearmente dependente se existe algunha combinación linear distinta da trivial que dan o elemento neutro da suma.

$\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k\}$ é linearmente dependente $:\Leftrightarrow$

$:\Leftrightarrow \quad \exists \ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ (algun deles, polo menos, distinto de 0)

tais que $\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \alpha_3 \cdot v_3 + \ldots + \alpha_k \cdot v_k = 0$

Hai mais posibilidades, ademais da trivial.

Combinación linear e dependéncia I

Se un conxunto é linearmente dependente, entón algun dos seus elementos é combinación linear dos outros elementos do conxunto.

$\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k\}$ é linearmente dependente $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}\ /\ \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \alpha_3 \cdot v_3 + \ldots + \alpha_k \cdot v_k = 0 \Rightarrow$$

(algun deles, polo menos, distinto de 0)

supoñendo que este fose un dos escalares que non son nulos

$$\Rightarrow \alpha_1 \cdot v_1 = -\alpha_2 \cdot v_2 - \alpha_3 \cdot v_3 - \ldots - \alpha_k \cdot v_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot v_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \cdot v_3 - \ldots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1} \cdot v_k$$

Logo, existe polo menos un elemento no conxunto que é combinación linear dos outros

Combinación linear e dependéncia II

Se nun conxunto algun dos elementos é combinación linear dos outros, entón o conxunto é linearmente dependente.

Se algun dos elementos de $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k\}$ é combinación linear dos outros $\Rightarrow$

supoñamos que este é o elemento

$$\Rightarrow \quad \exists\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{k-1} \in \mathbb{R}\ /\ \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \alpha_3 \cdot v_3 + \ldots + \alpha_{k-1} \cdot v_{k-1} = v_k \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \alpha_3 \cdot v_3 + \ldots + \alpha_{k-1} \cdot v_{k-1} - 1 \cdot v_k = 0$$

Logo obtemos o elemento neutro como combinación linear <u>non trivial</u> dos elementos do conxunto, que é a condición de dependéncia linear

Rango dun conxunto

O rango dun conxunto A é o maior número de elementos de A que conforman un subconxunto linearmente independente.

$$A=\left\{\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}\subset M_{3,1}(\mathbb{R})$$

Calquer conxunto que conteña o elemento neutro (nulo) é linearmente dependente; logo non debemos considerar este elemento.

O terceiro elemento é múltiplo do quinto, polo tanto tampouco o consideramos.

O primeiro elemento é combinación linear (suma) dos dous restantes, logo tampouco o consideraremos.

Finalmente obtemos un subconxunto de A formado por dous elementos, que é linearmente independente.

Diremos que A é un conxunto de rango 2: $rang\ A=2$

Produto de matrices

A condición para que se poda definir o produto de duas matrices é que o número de colunas da primeira coincida co número de filas da segunda.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\in M_{5,3}(\mathbb{R}) \qquad B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\in M_{3,4}(\mathbb{R})$$

o número de colunas de A debe coincidir co número de filas de B

Propriedades do produto matricial

O produto matricial é unha operación NON COMUTATIVA.

Caso 1: está definido o produto A·B pero non o produto B·A:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 11 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \nexists \; B \cdot A$$

Caso 2: están definidos os produtos A·B e B·A pero non coinciden:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -9 & 12 \\ 12 & 1 \end{pmatrix} \neq B \cdot A = \begin{pmatrix} -11 & 8 & -6 \\ 4 & -1 & 0 \\ -14 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Produto de matrices

O elemento ij da matriz produto A·B obtén-se multiplicando "escalarmente" a fila i de A e a coluna j de B.

$$A = \begin{array}{r} \\ \text{fila 2} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & \text{coluna 3} & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$ab_{23} = -1 \cdot (-3) + 2 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) = -1$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 14 & -3 & 2 & -9 \\ -2 & 4 & -1 & 2 \\ 15 & 0 & -7 & 2 \\ 10 & -1 & -9 & 7 \\ 4 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Propriedades do produto matricial

i. Asociativa

$$(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$$

ii. Distributiva do produto a respeito da suma de matrices

$$A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$$

e tamén

$$(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$$

iii. Elemento neutro

$$\forall \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \qquad I_m\cdot A = A\cdot I_n = A$$

Nota: $I_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M_k(\mathbb{R})$

iv. Homoxénea

$$\alpha\cdot(A\cdot B) = (\alpha\cdot A)\cdot B$$

Definición de sistema linear

Chama-se sistema linear de m ecuacións con n incógnitas a un conxunto de ecuacións da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

coeficientes (escalares) | incógnitas | termos independentes

Solución dun sistema linear

Dado un sistema linear, chama-se solución do sistema ao conxunto:

$$S = \left\{ \left(s_{1,}\ s_{2,}\ \ldots,\ s_n \right) \in \mathbb{R}^n \ / \ a_{i1} \cdot s_1 + a_{i2} \cdot s_2 + \ldots + a_{in} \cdot s_n = b_i \ , \ \forall \ i = 1 \ldots m \right\}$$

Ao introducir cada elemento s_j no lugar de x_j, fan-se certas <u>todas</u> as igualdades:

$$\begin{cases} a_{11}\ s_1 + a_{12}\ s_2 + \ldots + a_{1n}\ s_n = b_1 \\ a_{21}\ s_1 + a_{22}\ s_2 + \ldots + a_{2n}\ s_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}\ s_1 + a_{m2}\ s_2 + \ldots + a_{mn}\ s_n = b_m \end{cases}$$

Di-se que dous sistemas son equivalentes se teñen o mesmo conxunto solución.

Compatibilidade dun sistema linear

Atendendo ao conxunto solución, os sistemas lineares clasifican-se en:

incompatíbel $\Leftrightarrow S = \phi$ $\longrightarrow$ o sistema non ten solución

compatíbel determinado $\Leftrightarrow card\ S = 1$ $\longrightarrow$ o sistema ten solución única

compatíbel indeterminado $\Leftrightarrow card\ S = \infty$ $\longrightarrow$ o sistema ten solución múltiple

Sistemas homoxéneos

Un sistema linear chama-se homoxéneo se son nulos todos os seus termos independentes.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{11} & \cdot 0 & + & a_{12} & \cdot 0 & + & \dots & + & a_{1n} & \cdot 0 & = & 0 \\ a_{21} & \cdot 0 & + & a_{22} & \cdot 0 & + & \dots & + & a_{2n} & \cdot 0 & = & 0 \\ & & \dots & & & & \dots & & & & \dots & \\ a_{m1} & \cdot 0 & + & a_{m2} & \cdot 0 & + & \dots & + & a_{mn} & \cdot 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

$s = (0, 0, \dots, 0)$ solución trivial

Un sistema homoxéneo é sempre compatíbel

Presentación dun sistema linear I

a. forma usual

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

b. forma matricial

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Matriz de coeficientes do sistema

Matriz ampliada do sistema

Presentación dun sistema linear II

a. forma usual

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n = b_m \end{cases}$$

c. produto matricial

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

ou $M \cdot X = B$

Matriz de coeficientes

Matriz de incógnitas

Matriz de termos independentes

Presentación dun sistema linear III

a. forma usual

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n = b_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots + a_{2n}\, x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + \ldots + a_{mn}\, x_n = b_m \end{cases}$$

d. forma vectorial

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \cdot x_2 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \cdot x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

ou tamén $C_1 \cdot x_1 + C_2 \cdot x_2 + \ldots + C_n \cdot x_n = B$

Método de Gauss

O método consiste en triangularizar a matriz de coeficientes do sistema.

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n = b_m \end{cases}$$

O obxectivo é anular os elementos sinalados mediante transformacións elementares: operacións lineares coas filas da matriz ampliada.

$$M^* = \left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & \ldots & a_{1n} & & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & \ldots & a_{2n} & & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & \ldots & a_{2n} & & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & \ldots & a_{mn} & & b_m \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right)$$

Transformacións elementares I

1ª Permutacións das filas da matriz.

$$M^* = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 5 & 1 & -3 & 9 \\ -2 & 1 & 1 & 3 & -3 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{F_1 \leftrightarrow F_4}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & 1 & -3 & 9 \\ -2 & 1 & 1 & 3 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & 1 & -3 & 9 \\ -2 & 1 & 1 & 3 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{F_2 \leftrightarrow F_4}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 3 & -3 & 5 \\ 0 & -5 & 5 & 1 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

Transformacións elementares II

2ª Multiplicación das filas da matriz por escalares non nulos.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 3 & -3 & 5 \\ 0 & -5 & 5 & 1 & -3 & 9 \end{pmatrix}^{2\cdot F_2} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 6 & -4 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 3 & -3 & 5 \\ 0 & -5 & 5 & 1 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 6 & -4 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 3 & -3 & 5 \\ 0 & -5 & 5 & 1 & -3 & 9 \end{pmatrix}^{3\cdot F_3} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 6 & -4 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ -6 & 3 & 3 & 9 & -9 & 15 \\ 0 & -5 & 5 & 1 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

Transformacións elementares III

3ª Suma (ou resta) nunha fila dun múltiplo de outra fila ou, en xeral, dunha combinación linear de outras filas.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 6 & -4 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ -6 & 3 & 3 & 9 & -9 & 15 \\ 0 & -5 & 5 & 1 & -3 & 9 \end{pmatrix}^{F_2-6\cdot F_1} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 14 & -12 & 8 & 2 & -14 \\ -6 & 3 & 3 & 9 & -9 & 15 \\ 0 & -5 & 5 & 1 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 14 & -12 & 8 & 2 & -14 \\ -6 & 3 & 3 & 9 & -9 & 15 \\ 0 & -5 & 5 & 1 & -3 & 9 \end{pmatrix}^{F_3+6\cdot F_1} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 14 & -12 & 8 & 2 & -14 \\ 0 & -15 & 15 & 3 & -9 & 27 \\ 0 & -5 & 5 & 1 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$