1. ÁLXEBRA DE MATRICES

1.1. DEFINICIÓN DE MATRIZ

Def 1 Di-se que A é unha matriz real de m filas e n colunas, se A é un conxunto ordeado de números reais, organizado en filas e colunas, da forma: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Os elementos da matriz identifican-se da forma a_{ij}, de maneira que os subíndices i e j indican a fila e a coluna respectivamente na que está situado o elemento. A matriz designa-se con unha letra maiúscula, neste caso A, ou ben da forma (a_{ij}). O conxunto de todas as matrices reais de m filas e n colunas representa-se por $M_{m,n}(\mathbb{R})$, e di-se que A é unha matriz real de dimensión $m \times n$: $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$.

Duas matrices A e B son iguais se teñen a mesma dimensión e coinciden os elementos da mesma posición, é dicer: se $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $A=(a_{ij})$ e $B=(b_{ij})$, entón $A=B \; :\Leftrightarrow \; a_{ij}=b_{ij} \;\; \forall\, i=1 \dots m \;\; \forall\, j=1 \dots n$.

Di-se dunha matriz A que é cuadrada se ten o mesmo número de filas que de colunas. Neste caso, os elementos que ocupan as posicións 11, 22, ... , é dicer, os elementos da forma a_{ii} conforman o que se denomina diagonal principal da matriz, e di-se que a matriz é cuadrada de orde n: $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Unha matriz é rectangular se ten distinto número de filas que de colunas.

Chama-se trasposición de matrices á operación de transformar as filas dunha matriz en colunas e, consecuentemente, as colunas en filas: se $A=(a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, entón a matriz trasposta de A é $A^t=(a_{ji}) \in M_{n,m}(\mathbb{R})$.

Resulta evidente que $(A^t)^t=A$.

Ex 1 Dada a matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & \frac{1}{2} & \pi \\ 1 & -\frac{2}{5} & k & 2 \end{pmatrix}$ indicar a sua dimensión, o elemento a_{32} e obter a sua trasposta.

Ao ter trés filas e catro colunas, é unha matriz de dimensión 3×4, é dicer $A \in M_{3,4}(\mathbb{R})$.

O elemento a_{32} é o que ocupa a posición correspondente á fila 3 e coluna 2, logo $a_{32}=-\frac{2}{5}$.

A trasposta será $A^t=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & k \\ -1 & \pi & 2 \end{pmatrix} \in M_{4,3}(\mathbb{R})$.

1.2. TIPOS DE MATRICES

Atendendo aos elementos que integran unha matriz, distinguen-se os seguintes tipos:

i. Matriz fila é a que ten unha soa fila; matriz coluna é a que ten unha soa coluna.

ii. Matriz nula é a que ten todos os seus elementos iguais a cero.

Dentro das matrices cuadradas distinguen-se as seguintes:

i. Matriz diagonal é a que ten nulos todos os elementos que non pertencen á diagonal principal.

ii. Matriz escalar é unha matriz diagonal na que todos os elementos da diagonal principal son iguais.

iii. Matriz unitária é unha matriz diagonal na que todos os elementos da diagonal principal toman valor 1.

iv. Matriz triangular superior é a que ten nulos todos os elementos a_{ij} con $i>j$.

v. Matriz triangular inferior é a que ten nulos todos os elementos a_{ij} con $i<j$.

vi. Matriz simétrica é aquela que coincide coa sua trasposta: A é simétrica $\Leftrightarrow$ $A^t=A$.

vii. Matriz antisimétrica ou hemisimétrica é aquela que é oposta da sua trasposta: A é antisimétrica $\Leftrightarrow$ $A^t=-A$.

Nota: a definición de matriz oposta dá-se no seguinte epígrafe.

Ex 2 Exemplos de matrices.

Matriz fila $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \end{pmatrix} \in M_{1,3}(\mathbb{R})$; matriz coluna $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ e^2 \\ 7 \end{pmatrix} \in M_{4,1}(\mathbb{R})$; matriz nula $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$

Matriz diagonal $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$; escalar $\begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$; identidade ou unitária $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

Matriz triangular superior $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ 0 & -4 & 2\alpha \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$; triangular inferior $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ t & t & t & t \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$

Matriz simétrica $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$: $A^t=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$, $A^t=A \Leftrightarrow a_{ji}=a_{ij}$

Matriz antisimétrica $B=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \\ -5 & -7 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$: $B=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \\ -5 & -7 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$, $B^t=-B \Leftrightarrow b_{ji}=-b_{ij}$

1.3. OPERACIÓNS MATRICIAIS

Def 2 No conxunto das matrices $M_{m,n}(\mathbb{R})$ definen-se duas operacións:

i. Suma de matrices: dadas duas matrices $A=(a_{ij}), B=(ab_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, a suma de A e B é outra matriz da mesma dimensión que A e B que se obtén sumando os elementos de ambas que ocupan a mesma posición: $A+B:=(a_{ij}+b_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$.

ii. *Produto de matrices por escalares*: dada unha matriz $A=(a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e dado un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, o produto de α por A é outra matriz de igual dimensión que A que se obtén multiplicando o escalar α por todos os elementos da matriz A:

$\alpha \cdot A:=(\alpha \cdot a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$.

Estas operacións, asi definidas, cumpren as seguintes propriedades:

i. Asociativa da suma: $\forall\ A,B,C \in M_{m,n}(\mathbb{R})\ \ (A+B)+C=A+(B+C)$.

ii. Elemento neutro da suma: $\exists\ E \in M_{m,n}(\mathbb{R})\ /\ \forall\ A \in M_{m,n}(\mathbb{R})\ \ A+E=E+A=A$.

iii. Elemento simétrico da suma:

$\forall\ A \in M_{m,n}(\mathbb{R})\ \exists\ -A \in M_{m,n}(\mathbb{R})\ /\ A+(-A)=(-A)+A=E$.

iv. Comutativa da suma: $\forall\ A,B \in M_{m,n}(\mathbb{R})\ \ A+B=B+A$.

v. Distributiva do produto a respeito da suma de matrices:

$\forall\ A,B \in M_{m,n}(\mathbb{R})\ \ \forall\ \alpha \in \mathbb{R}\ \ \alpha \cdot (A+B)=\alpha \cdot A+\alpha \cdot B$.

vi. Distributiva do produto a respeito da suma de escalares:

$\forall\ A \in M_{m,n}(\mathbb{R})\ \ \forall\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}\ \ (\alpha+\beta)\cdot A=\alpha \cdot A+\beta \cdot A$.

vii. Pseudo-asociativa: $\forall\ A \in M_{m,n}(\mathbb{R})\ \ \forall\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}\ \ \alpha \cdot (\beta \cdot A)=(\alpha \cdot \beta)\cdot A$.

viii. Elemento neutro do produto por escalares: $\forall\ A \in M_{m,n}(\mathbb{R})\ \ 1\cdot A=A$.

Unha estrutura como a que se está a definir, na que se cumpren as oito propriedades enunciadas anteriormente, recebe o nome de espazo vectorial sobre o corpo $\mathbb{R}$: $(M_{m,n}(\mathbb{R}),+,\cdot\mathbb{R})$.

Ex 3 Dadas as matrices $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ e $C=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ calcular $3A-\frac{1}{2}(B-C)$.

$$3A-\frac{1}{2}(B-C)=3\cdot\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}-\frac{1}{2}\cdot\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right]=3\cdot\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}=\frac{6}{2}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left[6\cdot\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}\cdot\left[\begin{pmatrix} 24 & -12 \\ 0 & -18 \\ -30 & 12 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 23 & -14 \\ 1 & -21 \\ -25 & 12 \end{pmatrix}$$

Ex 4 Probar a propriedade distributiva do produto a respeito da suma de matrices.

Sexan as matrices $A=(a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e $B=(b_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e sexa $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\alpha\cdot(A+B) \overset{[1]}{=} \alpha\cdot[(a_{ij})+(b_{ij})] \overset{[2]}{=} \alpha\cdot[(a_{ij}+b_{ij})] \overset{[3]}{=} (\alpha\cdot(a_{ij}+b_{ij})) \overset{[4]}{=} (\alpha\cdot a_{ij}+\alpha\cdot b_{ij}) \overset{[5]}{=} (\alpha\cdot a_{ij})+(\alpha\cdot b_{ij}) \overset{[6]}{=} \alpha\cdot(a_{ij})+\alpha\cdot(b_{ij}) \overset{[7]}{=} \alpha\cdot A+\alpha\cdot B$$

[1] Substitución das matrices polos seus elementos; [2] suma dos elementos de ambas matrices que ocupan a mesma posición; [3] produto do escalar α por cada un dos elementos; [4] propriedade distributiva do produto a respeito da suma de números reais; [5] definición da suma de matrices elemento a elemento; [6] definición do produto dun escalar por unha matriz, elemento a elemento; [7] expresión matricial.

2. Combinación Linear e Dependéncia Linear

2.1. Combinación Linear de Vectores

O conceito de combinación linear parte da idea de realizar operacións de suma e produto por escalares dentro dun espazo vectorial. No caso das matrices, por combinación linear dun conxunto de matrices $T=\{M_1,M_2,\ldots,M_k\}$ entende-se a matriz A que resulta de sumar múltiplos das matrices $M_1,M_2,\ldots,M_k$: diremos que A é combinación linear das matrices $\{M_1,M_2,\ldots,M_k\}$ $:\Leftrightarrow\ \exists\ \alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k\in\mathbb{R}\ /\ A=\alpha_1\cdot M_1+\alpha_2\cdot M_2+\ldots+\alpha_k\cdot M_k$.

Esta idea pode trasladar-se ás filas ou colunas das matrices, xá que, en definitiva, unha fila dunha matriz non é mais que unha matriz fila, e coas colunas sucede o análogo. Mais aínda, as filas ou as colunas poden entender-se como vectores de $\mathbb{R}^n$ (vectores de n componentes) en virtude do que se denomina un isomorfismo de espazos vectoriais. Polo tanto, de aqui en diante, realizaremos o estudo das combinacións lineares de vectores de n componentes.

Def 3 Diremos que un vector $v\in\mathbb{R}^n$ é combinación linear dos vectores $v_1,v_2,\ldots,v_k\in\mathbb{R}^n$ $:\Leftrightarrow\ \exists\ \alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k\in\mathbb{R}\ /\ v=\alpha_1\cdot v_1+\alpha_2\cdot v_2+\ldots+\alpha_k\cdot v_k$.

Dado un conxunto de vectores $\{v_1,v_2,\ldots,v_k\}\subset\mathbb{R}^n$ e un vector $v\in\mathbb{R}^n$, poden dar-se os seguintes casos:

i. o vector v non é combinación linear de $v_1,v_2,\ldots,v_k$, é dicer, v non pode obter-se realizando operacións lineares cos vectores $v_1,v_2,\ldots,v_k$;

ii. o vector v é combinación linear de $v_1,v_2,\ldots,v_k$, e como tal, pode obter-se de unha única forma realizando operacións lineares cos vectores $v_1,v_2,\ldots,v_k$;

iii. o vector v é combinación linear de $v_1,v_2,\ldots,v_k$ e pode obter-se de várias formas distintas realizando operacións lineares cos vectores $v_1,v_2,\ldots,v_k$.

Ex 5 Obter os vectores $u_1=(2,-3,1)$, $u_2=(1,2,0)$ e $u_3=(-3,2,-2)$ como combinación linear do conxunto $A=\{(-1,1,0),(1,0,-1),(0,1,-1)\}$.

Trata-se de expresar o vector $u_1=(2,-3,1)$ da forma $\alpha(-1,1,0)+\beta(1,0,-1)+\gamma(0,1,-1)$, logo:

$$\alpha(-1,1,0)+\beta(1,0,-1)+\gamma(0,1,-1)=(2,-3,1)\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}-\alpha+\beta=2\\ \alpha+\gamma=-3\\ -\beta-\gamma=1\end{cases}$$

Sumando as duas primeiras ecuacións obtemos $\beta+\gamma=-1$, ecuación equivalente á terceira das que compoñen o sistema. Logo resulta $\alpha=-\gamma-3$ e $\beta=-\gamma-1$, asi que tomando diferentes valores $\gamma\in\mathbb{R}$ obtemos distintas solucións ao sistema.

Para $\gamma=0$, por exemplo, resulta $\alpha=-3$ e $\beta=-1$ e asi obtemos: $-(-1,1,0)-3(1,0,-1)+0(0,1,-1)=(2,-3,1)$
Para $\gamma=1$, resulta $\alpha=-4$ e $\beta=-2$: $-4(-1,1,0)-2(1,0,-1)+(0,1,-1)=(2,-3,1)$

Logo o vector $u_1=(2,-3,1)$ é combinación linear do conxunto A, e existe unha cantidade infinita de combinacións lineares do conxunto A que dan como resultado o vector u_1.

No caso do vector $u_2=(1,2,0)$ temos: $\alpha(-1,1,0)+\beta(1,0,-1)+\gamma(0,1,-1)=(1,2,0)\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}-\alpha+\beta=1\\ \alpha+\gamma=2\\ -\beta-\gamma=0\end{cases}$

Sumando as duas primeiras ecuacións obtemos $\beta+\gamma=3$, ecuación que é incompatíbel coa terceira. Polo tanto o sistema non ten solución e di-se que o vector $u_2=(1,2,0)$ non é combinación linear do conxunto A.

Ex 6 Casos particulares:
Todo vector é combinación linear de si mesmo: $(5,\pi,-1)=1\cdot(5,\pi,-1)$
O vector nulo é combinación linear de calquer conxunto: $(0,0,0)=0\cdot(-1,1,0)+0\cdot(1,0,-1)+0\cdot(0,1,-1)$

2.2. DEPENDÉNCIA LINEAR

É interesante en particular o caso do vector nulo, que chamaremos O, vector que ten nulas todas as suas componentes e é o elemento neutro da suma de vectores. Dado un conxunto de vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$, sempre se pode obter o vector nulo como combinación linear dos vectores v_1, v_2, … , v_k. En definitiva, o vector nulo é combinación linear de calquer conxunto de vectores, xá que seria abondo con tomar todos os escalares nulos (que chamaremos combinación linear trivial ou solución trivial). Polo tanto, dado un conxunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$, o vector nulo há de estar no caso ii ou ben no caso iii. Se o vector nulo está no caso ii, existe unha única forma de obté-lo a partir dos vectores v_1, v_2, … , v_k, e esta forma forzosamente será a trivial: $O = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \ldots + 0 \cdot v_k$. Pola contra, se o vector nulo está no caso iii, entón haberá várias formas diferentes de obté-lo a partir dos vectores v_1, v_2, … , v_k. Unha destas formas é a mencionada anteriormente, na que todos os escalares son nulos, e as outras han de ser combinacións lineares nas que algún escalar sexa distinto de cero ("solución non trivial"). Á vista destes dous casos, definimos o seguinte:

Def 4 Un conxunto de vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ é linearmente independente se a única forma de obter o vector nulo como combinación linear de v_1, v_2, … , v_k é a trivial, ou expresado de maneira mais formal: $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ é linearmente independente $:\Leftrightarrow \ \forall\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}\ \ \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \ldots + \alpha_k \cdot v_k = O \ \Rightarrow\ \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$.

Reciprocamente, diremos que o conxunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ é linearmente dependente se é posíbel obter o vector nulo como combinación linear non trivial dos vectores v_1, v_2, … , v_k, de mais formas que a trivial: $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ é linearmente dependente $:\Leftrightarrow \ \exists\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R} \ /\ \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \ldots + \alpha_k \cdot v_k = O$, con algún dos α_i distinto de cero.

Ex 7 Estudar a dependéncia linear do conxunto $A = \{(-1,1,0), (1,0,-1), (0,1,-1)\}$.

Sabe-se que o vector nulo é, de xeito trivial, combinación linear de calquer conxunto; en particular $O = (0,0,0)$ é combinación linear de $A = \{(-1,1,0), (1,0,-1), (0,1,-1)\}$: $(0,0,0) = 0 \cdot (-1,1,0) + 0 \cdot (1,0,-1) + 0 \cdot (0,1,-1)$.

Trataremos de saber se esta é a única forma de obter o vector nulo como combinación linear do conxunto A, ou se hai mais de unha forma:

$$\alpha(-1,1,0) + \beta(1,0,-1) + \gamma(0,1,-1) = (0,0,0) \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} -\alpha+\beta=0 \\ \alpha+\gamma=0 \\ -\beta-\gamma=0 \end{cases} \ \Leftrightarrow\ \alpha = \beta = -\gamma$$, logo hai solucións distintas da trivial.

Por exemplo, a solución $\alpha = 1$, $\beta = 1$ e $\gamma = -1$ fai que $1 \cdot (-1,1,0) + 1 \cdot (1,0,-1) + (-1) \cdot (0,1,-1) = (0,0,0)$.

Asi que $A = \{(-1,1,0), (1,0,-1), (0,1,-1)\}$ é un conxunto linearmente dependente.

Relación entre Combinación Linear e Dependéncia Linear

Existe unha relación imediata entre os conceitos de combinación linear e de dependéncia linear dun conxunto de vectores, a través do seguinte resultado:

Th 1 Un conxunto de vectores $C=\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ é linearmente dependente $\Leftrightarrow$ $\exists\ i=1, \ldots, k \ / \ v_i$ é combinación linear dos outros vectores do conxunto C.

Demostración

$\Rightarrow$ Condición necesária

Partamos da hipótese de que o conxunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ é linearmente dependente. Isto equivale a que existe algunha combinación linear distinta da trivial que dea como resultado o vector nulo, é dicer: $\exists\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R} \ / \ \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \ldots + \alpha_k \cdot v_k = 0$, onde polo menos un dos α_i é distinto de cero. Supoñamos que é $\alpha_1 \neq 0$. Entón temos a expresión equivalente $\alpha_1 \cdot v_1 = -\alpha_2 \cdot v_2 - \ldots - \alpha_k \cdot v_k$. Por ser $\alpha_1 \neq 0$ podemos multiplicar esta expresión polo inverso de α_1, e resulta: $\frac{1}{\alpha_1} \cdot \alpha_1 \cdot v_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot v_2 - \ldots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1} \cdot v_k$.

Reducindo esta expresión obtemos que $v_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot v_2 - \ldots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1} \cdot v_k$, que equivale a afirmar que o vector v_1 é combinación linear dos vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ q.e.d.

[Nota: Se supoñemos que o escalar non nulo é calquer outro distinto de α_1 –xá que algún ten que haber– a demostración faria-se de forma análoga.]

$\Leftarrow$ Condición suficiente

Supoñamos que algún dos vectores é combinación linear do resto: por exemplo o primeiro vector v_1. Daquela $v_1 = \alpha_2 \cdot v_2 + \ldots + \alpha_k \cdot v_k$, onde $\alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$. Esta expresión equivale a $v_1 - \alpha_2 \cdot v_2 - \ldots - \alpha_k \cdot v_k = 0$, que non é outra cousa que unha combinación linear non trivial que dá como resultado o vector nulo. Por tanto o conxunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ é linearmente dependente q.e.d.

[Nota: Se no lugar de v_1 fose outro o vector que é combinación linear do resto, a demostración seria similar.]

Ex 8 Probar que se o conxunto $A=\{(-1,1,0),(1,0,-1),(0,1,-1)\}$ é linearmente dependente, entón algún dos seus elementos é combinación linear dos outros.

No anterior exemplo probou-se que o conxunto $A=\{(-1,1,0),(1,0,-1),(0,1,-1)\}$ é linearmente dependente, que equivale a afirmar que existen combinacións lineares distintas da trivial que dan como resultado o vector nulo:

$$\alpha(-1,1,0)+\beta(1,0,-1)+\gamma(0,1,-1)=(0,0,0) \Leftrightarrow \alpha=\beta=-\gamma$$

Se escollemos algunha solución non trivial, por exemplo $\gamma=2$, resulta $\alpha=\beta=-2$ e polo tanto:

$$-2(-1,1,0)-2(1,0,-1)+2(0,1,-1)=(0,0,0)$$

Nesta igualdade podemos expresar calquer vector que teña escalar non nulo como combinación linear dos outros dous facendo:

$$-2(-1,1,0)-2(1,0,-1)+2(0,1,-1)=(0,0,0) \Leftrightarrow 2(0,1,-1)=2(-1,1,0)+2(1,0,-1) \Leftrightarrow (0,1,-1)=(-1,1,0)+(1,0,-1)$$

Asi que o vector $(0,1,-1)$ é combinación linear dos vectores $\{(-1,1,0),(1,0,-1)\}$.

2.3. Rango dun Conxunto de Vectores

O resultado anterior permite desenvolver o seguinte proceso: un conxunto T de vectores, linearmente dependente, pode convertir-se en independente eliminando un por un aqueles vectores que sexan combinación linear dos que aínda permanecen no conxunto. Deste xeito, no momento en que non teñamos xá nengun vector que sexa combinación linear de outros, ese conxunto pasa a ser linearmente independente. Atendendo ao anterior define-se o conceito de rango dun conxunto.

Def 5 Se T é un subconxunto dun espazo vectorial V, chama-se rango do conxunto T, e escrebe-se $rang\ T$, ao maior número de vectores de T que forman un subconxunto linearmente independente.

Tal definición do rango dun conxunto de vectores pode entender-se tamén referida ao conxunto de filas ou ben ao conxunto de colunas dunha matriz. Se $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, define-se o rango de A, e escrebe-se $rang\ A$, como o número máximo de filas de A que forman un conxunto linearmente independente, ou tamén como o número máximo de colunas de A que forman un conxunto linearmente independente. Pode probar-se, aínda que non se fará, que o rango entendido en relación ás filas coincide co rango expresado en termos das colunas. Como consecuéncia deste resultado, o rango dunha matriz será sempre menor ou igual que o menor dos índices da sua dimensión: se $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, entón $rang\ A \leqslant min\{m,n\}$.

Ex 9 Estudar o rango da matriz $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \\ -5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Podemos tomar filas ou colunas, indistintamente. Traballando por exemplo coas filas, a matriz A pode-se contemplar como o conxunto formado polos vectores $A=\{(4,-2,1),(0,-2,5),(-5,2,0)\}$, ao que lle estudaremos a sua dependéncia linear:

$$\alpha(4,-2,1)+\beta(0,-2,5)+\gamma(-5,2,0)=(0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha-5\gamma=0 \\ -2\alpha-2\beta+2\gamma=0 \\ \alpha+5\beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-\dfrac{\alpha}{5} \\ \gamma=\dfrac{4\alpha}{5} \end{cases}$$

Logo existen múltiples solucións, asi que o conxunto $A=\{(4,-2,1),(0,-2,5),(-5,2,0)\}$ e linearmente dependente e sabe-se que algún dos seus vectores terá que ser combinación linear dos outros; tomando unha solución particular, por exemplo $\alpha=5$, resulta $\beta=-1$ e $\gamma=4$ e asi:

$5(4,-2,1)-(0,-2,5)+4(-5,2,0)=(0,0,0) \Leftrightarrow 5(4,-2,1)+4(-5,2,0)=(0,-2,5)$, logo a segunda fila é combinación linear das outras duas.

Estudaremos a dependéncia linear do conxunto $A'=\{(4,-2,1),(-5,2,0)\}$:

$$\alpha(4,-2,1)+\beta(-5,2,0)=(0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha-5\beta=0 \\ -2\alpha+2\gamma=0 \\ \alpha=0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$$

Logo o conxunto $A'=\{(4,-2,1),(-5,2,0)\}$ é linearmente independente, asi que o maior número de filas da matriz A que forman un conxunto independente é 2: $rang\ A=2$

Nota: se traballásemos coas colunas obteríamos o mesmo resultado.

3. PRODUTO DE MATRICES

3.1. DEFINICIÓN DO PRODUTO DE MATRICES

Def 6 Di-se que duas matrices A e B son multiplicábeis se o número de colunas de A é igual ao número de filas de B: $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{p,q}(\mathbb{R})$ son multiplicábeis $:\Leftrightarrow n=p$. Só neste suposto definiremos o produto $A \cdot B$, que non terá sentido no caso de que o número de colunas de A sexa distinto do número de filas de B.

Nas condicións anteriores, define-se o produto $A \cdot B$ da seguinte forma: $A \cdot B$ é unha matriz de dimensión $m \times q$ na que o elemento da posición ij é a suma das multiplicacións, elemento a elemento, dos elementos da fila i da matriz A cos elementos da coluna j de B.

É dicer, se $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & \dots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & \dots & b_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & \dots & b_{pq} \end{pmatrix}$, o elemento ij da matriz produto obtén-se multiplicando escalarmente a fila i de A pola coluna j de B:

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \dots \\ \dots \\ b_{pj} \end{pmatrix} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{pj}$$

[Nota: Non se debe esquecer que $n=p$.]

Ex 10 Calcular o produto $A \cdot B$, con $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 4 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$.

As matrices son multiplicábeis, porque $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{3,2}(\mathbb{R})$, logo o produto será unha matriz $A \cdot B \in M_{3,2}(\mathbb{R})$.

$$A \cdot B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 4 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-3) - 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 - 2 \cdot 4 \\ 3 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot (-6) \\ 5 \cdot (-3) & 5 \cdot 1 - 4 \cdot (-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -7 \\ -7 & 5 \\ -15 & 29 \end{pmatrix}$$

3.2. PROPRIEDADES

O produto de matrices posúe as seguintes propriedades (dado por suposto, no que segue, que as matrices son multiplicábeis):

i. Propriedade asociativa: $\forall\ A,B,C\ \ (A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$.

ii. Propriedade distributiva a respeito da suma de matrices:
$\forall\ A,B,C\ \ A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$ e tamén $\forall\ A,B,C\ \ (A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$.

iii. Elemento neutro: se $A\in M_{m,n}(\mathbb{R})$, as matrices unitárias de orde m e n, $I_m=\begin{pmatrix}1&0&\dots&\dots&0\\0&1&\dots&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&\dots&1\end{pmatrix}\in M_m(\mathbb{R})$ e $I_n=\begin{pmatrix}1&0&\dots&\dots&0\\0&1&\dots&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&\dots&1\end{pmatrix}\in M_n(\mathbb{R})$, cumpren a propriedade de que $I_m\cdot A=A$ e $A\cdot I_n=A$.

iv. Propriedade homoxénea: $\forall\ A,B\ \ \forall\ \alpha\in\mathbb{R}\ \ \alpha\cdot(A\cdot B)=(\alpha\cdot A)\cdot B=A\cdot(\alpha\cdot B)$.

É de especial interese salientar que a operación produto de matrices non cumpre a propriedade comutativa, xá que en xeral $A\cdot B\neq B\cdot A$. Isto terá consecuéncias mui importantes á hora de resolver ecuacións matriciais nas que aparezan produtos de matrices.

Ex 11

Calcular a matriz simétrica de orde 2 tal que comute con $A=\begin{pmatrix}1&-1\\-3&2\end{pmatrix}$.

Sexa $B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}$ a matriz pedida: pide-se que $A\cdot B=B\cdot A$

$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&-1\\-3&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}-b_{21}&b_{12}-b_{22}\\-3b_{11}+2b_{21}&-3b_{12}+2b_{22}\end{pmatrix}$ e $B\cdot A=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\-3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}-3b_{12}&-b_{11}+2b_{12}\\b_{21}-3b_{22}&-b_{21}+2b_{22}\end{pmatrix}$.

$$A\cdot B=B\cdot A\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}b_{11}-b_{21}=b_{11}-3b_{12}\\b_{12}-b_{22}=-b_{11}+2b_{12}\\-3b_{11}+2b_{21}=b_{21}-3b_{22}\\-3b_{12}+2b_{22}=-b_{21}+2b_{22}\end{cases}$$

Como ademais B é simétrica, ten que ser $b_{12}=b_{21}$, logo do sistema anterior obtemos:

$b_{11}-b_{21}=b_{11}-3b_{12}\ \Leftrightarrow\ -b_{12}=-3b_{12}\ \Leftrightarrow\ b_{12}=b_{21}=0$, co que o sistema se reduce a $\begin{cases}-b_{22}=-b_{11}\\-3b_{11}=-3b_{22}\end{cases}\ \Leftrightarrow\ b_{11}=b_{22}$

Polo tanto a matriz que procuramos é da forma $B=\begin{pmatrix}k&0\\0&k\end{pmatrix}$, con $k\in\mathbb{R}$, é dicer, calquer matriz escalar.

4. SISTEMAS LINEARES E MÉTODO DE GAUSS

4.1. SISTEMAS DE ECUACIÓNS LINEARES

Def 7 Chama-se ecuación linear de n incógnitas a toda expresión do tipo $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n = b$, na que $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ son os coeficientes da ecuación, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son as incógnitas e $b \in \mathbb{R}$ é o termo independente. Entendemos por solución da ecuación ao conxunto formado por todos os vectores $(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que ao substituir cada incógnita x_i polo valor s_i a ecuación convirte-se nunha identidade. Un sistema linear de m ecuacións e n incógnitas é un conxunto de m ecuacións lineares da forma $\left\{ \begin{array}{c} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{array} \right.$.

A solución dun sistema linear será o conxunto de vectores $(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ que son solución de todas e cada unha das ecuacións que conforman o sistema e entenderá-se que resolver un sistema consiste en obter todos os elementos do conxunto solución. Diremos que duas ecuacións son equivalentes, ou en xeral, dous sistemas lineares son equivalentes se teñen o mesmo conxunto solución.

Un sistema linear chama-se compatíbel se ten solución e incompatíbel no caso contrário. No caso de ser compatíbel, o sistema será ademais determinado se a sua solución contén un só elemento (solución única), e indeterminado se a sua solución ten mais dun elemento (neste caso a solución é un conxunto que contén infinitos elementos e di-se que a solución é múltiple).

Chama-se sistema homoxéneo ao sistema linear no que todos os termos independentes son nulos. É imediato que todos os sistemas homoxéneos teñen solución, é dicer, son compatíbeis, xá que cando menos o vector $(0,0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^n$ é solución de todas as ecuacións. Esta solución recebe o nome de solución trivial.

Un sistema linear pode ser expresado das seguintes formas:

i. *Forma usual* $\left\{ \begin{array}{c} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{array} \right.$

ii. *Forma matricial* $M^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ que se chama matriz ampliada do sistema, en tanto que $M=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ é a matriz dos coeficientes do sistema.

iii. *Produto matricial* $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$, ou simbolicamente $M \cdot X = B$.

iv. *Forma vectorial* $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \cdot x_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \cdot x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$, ou tamén expresado en termos das colunas: $C_1 \cdot x_1 + C_2 \cdot x_2 + \dots + C_n \cdot x_n = B$, onde $C_1, C_2, \dots, C_n$ son as colunas dos coeficientes e B e a coluna dos termos independentes do sistema.

Ex 12

Expresar de distintas formas o sistema linear $S \equiv \begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ x+5z=-4 \\ -3x+2y+z=-3 \end{cases}$.

Forma matricial: a matriz ampliada do sistema é $M^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & -4 \\ -3 & 2 & 1 & -3 \end{array}\right)$, en tanto que as trés primeiras colunas conforman a matriz de coeficientes $M=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Produto matricial: $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Forma vectorial: se chamamos $C_1=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C_2=\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ temos a expresión vectorial $C_1 \cdot x + C_2 \cdot y + C_3 \cdot z = B$.

4.2. MÉTODO DE GAUSS PARA A RESOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEARES

O método de Gauss para a resolución de sistemas lineares é unha sistematización do método de redución, baseado na eliminación progresiva de incógnitas a través da realización de transformacións apropriadas entre as ecuacións. En particular, para desenvolver este método utiliza-se a matriz ampliada do sistema e o obxectivo último consiste en triangular esta matriz, sumando-lle ás suas filas múltiplos de outras filas da própria matriz. O fundamento do método é que se a unha ecuación dun sistema lle sumamos unha combinación linear das outras ecuacións, o sistema resultante é equivalente ao inicial. Asi, realizando as transformacións oportunas (chamadas transformacións elementares da matriz) nas filas, a matriz ampliada do sistema convertirá-se en outra matriz triangular superior na que será imediato calcular o valor das incógnitas sen mais que recuperar a ecuación correspondente a cada fila nesta nova matriz. A correcta interpretación da matriz obtida trás aplicar este método informa ademais acerca da compatibilidade do sistema, e no caso de ser compatíbel indica tamén se a solución é única (sistema compatíbel determinado) ou se é múltiple (sistema compatíbel indeterminado).

Se na matriz resultante aparecen filas nulas (que se corresponden con identidades do tipo $0=0$), serán eliminadas. Entre as restantes filas, se hai algunha que teña nulos todos os coeficientes e o termo independente distinto de cero (correspondente a unha igualdade do tipo $0=k\neq 0$), o sistema será incompatíbel.

Finalmente, a comparación entre o número final de ecuacións non dexeneradas e o número de incógnitas proporciona a resposta: se coinciden o sistema será compatíbel determinado, e se hai menor número de ecuacións que de incógnitas, o sistema será compatíbel indeterminado.

Neste último caso, a diferenza entre o número de incógnitas e o número final de ecuacións chama-se grau de liberdade do sistema e é indicador da dimensión da solución, é dicer, esta diferenza corresponde-se co número de variábeis libres, tamén chamadas parámetros, dos que dependerá a solución.

Existe á sua vez unha extensión do método de Gauss, que dá lugar ao chamado método de Gauss-Jordan. Conforme este método, unha vez que se obtén a matriz triangular de Gauss, e eliminadas as posíbeis filas nulas resultantes, intenta-se diagonalizar a matriz, sempre sumando a unha fila múltiplos de outras filas. Consigue-se con isto un sistema equivalente ao inicial no que cada ecuación contén só unha das incógnitas, polo que resulta sumamente cómodo o cálculo da solución.

Ex 13

Resolver utilizando o método de Gauss o sistema linear $S\equiv\begin{cases}2x-3y+z=0\\ x+5z=-4\\ -3x+2y+z=-3\end{cases}$.

A matriz ampliada do sistema é $M^*=\begin{pmatrix}2&-3&1&0\\1&0&5&-4\\-3&2&1&-3\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}2&-3&1&0\\1&0&5&-4\\-3&2&1&-3\end{pmatrix}\overset{\substack{F_3+3F_2\\2F_2-F_1}}{\sim}\begin{pmatrix}2&-3&1&0\\0&3&9&-8\\0&2&16&-15\end{pmatrix}\overset{3F_3-2F_2}{\sim}\begin{pmatrix}2&-3&1&0\\0&3&9&-8\\0&0&30&-29\end{pmatrix}$$ [1], logo:

$30z=-29 \Leftrightarrow z=-\frac{29}{30}$; $3y+9z=-8 \Leftrightarrow y=\frac{-8-9z}{3}=\frac{-8+\frac{87}{10}}{3}=\frac{7}{30}$ e $2x-3y+z=0 \Leftrightarrow x=\frac{3y-z}{2}=\frac{\frac{7}{10}+\frac{29}{30}}{2}=\frac{5}{6}$.

Polo tanto a solución é $\left(\frac{5}{6},\frac{7}{30},-\frac{29}{30}\right)$.

[1] Continuando co método de Gauss-Jordan resulta:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & -8 \\ 0 & 0 & 30 & -29 \end{pmatrix} \overset{\substack{10F_2-3F_3 \\ 30F_1-F_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 60 & -90 & 0 & 29 \\ 0 & 30 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 30 & -29 \end{pmatrix} \overset{F_1+3F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 60 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 30 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 30 & -29 \end{pmatrix} \overset{\substack{\frac{1}{60}\cdot F_1 \\ \frac{1}{30}\cdot F_2 \\ \frac{1}{30}\cdot F_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{30} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{29}{30} \end{pmatrix}$$

Desta forma obtemos a solución explicitamente: $x=\frac{5}{6}$, $y=\frac{7}{30}$ e $z=-\frac{29}{30}$.

4.3. MÉTODO DE GAUSS PARA O CÁLCULO DO RANGO DUNHA MATRIZ

O método de Gauss permite tamén obter o rango dunha matriz, da seguinte forma: sexa A' a matriz triangular superior resultante de aplicar o método de Gauss á matriz $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$; ao eliminarmos as filas nulas que se obtivesen, as filas non nulas de A' forman un conxunto linearmente independente, e polo tanto o número de filas non nulas será o rango da matriz A', que á sua vez é igual ao rango da matriz orixinal A.

Ex 14

Calcular o rango da matriz $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 5 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 5 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \overset{\substack{F_4-F_1 \\ 2F_3-F_1 \\ 2F_2-5F_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -11 & 6 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -6 & 4 \end{pmatrix} \overset{\substack{F_4-2F_3 \\ 11F_3-3F_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -11 & 6 \\ 0 & 0 & 26 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \overset{13F_4+2F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -11 & 6 \\ 0 & 0 & 26 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$, polo tanto $rang\ B=3$.

5. MATRIZ INVERSA

5.1. DEFINICIÓN DE MATRIZ INVERSA

Def 8 Dada unha matriz cuadrada $A \in M_n(\mathbb{R})$, chama-se matriz inversa de A e designa-se por A^{-1} a outra matriz de igual orde que A tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$, onde I_n é a matriz unidade de orde n.

Di-se que unha matriz cuadrada é regular ou inversíbel se ten inversa. En caso contrário diremos que a matriz é singular.

5.2. CÁLCULO DA INVERSA

O método de Gauss-Jordan serve tamén para o cálculo da inversa dunha matriz cuadrada regular. Dada unha matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ regular, o método consiste, neste caso, en diagonalizar a matriz A e realizar simultaneamente as mesmas transformacións das filas de A na matriz unidade de orde n. Ao final do proceso a matriz A convirte-se na matriz unidade de orde n, mentres que a matriz unidade se convirte na inversa de A.

O cálculo da inversa dunha matriz resolver sistemas do tipo $M \cdot X = B$, onde M é a matriz de coeficientes do sistema, X é a matriz coluna das incógnitas e B é a matriz coluna dos termos independentes, sempre que M sexa unha matriz cuadrada regular. Neste caso existe a inversa de M, e polo tanto:

$$M \cdot X = B \Rightarrow M^{-1} \cdot (M \cdot X) = M^{-1} \cdot B \Rightarrow (M^{-1} \cdot M) \cdot X = M^{-1} \cdot B \Rightarrow I_n \cdot X = M^{-1} \cdot B \Rightarrow X = M^{-1} \cdot B.$$

Asi, a matriz incógnita X é o produto da inversa de M pola matriz B dos termos independentes: $X = M^{-1} \cdot B$.

[Nota: No caso de que a ecuación matricial sexa do tipo $X \cdot M = B$, a solución será $X = B \cdot M^{-1}$. A diferenza entre ambos casos debe-se a que o produto de matrices non é comutativo.]

Ex 15

Resolver o sistema linear $S \equiv \begin{cases} x-2y+z=1 \\ x+2y-z=0 \\ 2x+y-4z=-2 \end{cases}$.

A matriz ampliada do sistema é $M=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, co que podemos expresar o sistema da forma $M \cdot X = B$, con $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, e asi a solución será a matriz $X=M^{-1} \cdot B$.

$$(M \mid I_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)^{\substack{F_3-2F_1 \\ F_2-F_1}} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -6 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)^{4F_3-5F_2} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & -3 & -5 & 4 \end{array}\right)^{\substack{7F_2-F_3 \\ 14F_1+F_3}} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 14 & -28 & 0 & 11 & -5 & 4 \\ 0 & 28 & 0 & -4 & 12 & -4 \\ 0 & 0 & -14 & -3 & -5 & 4 \end{array}\right)^{F_1-F_2} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 14 & 0 & 0 & 7 & 7 & 0 \\ 0 & 28 & 0 & -4 & 12 & -4 \\ 0 & 0 & -14 & -3 & -5 & 4 \end{array}\right)^{\substack{\frac{1}{14}\cdot F_1 \\ \frac{1}{28}\cdot F_2 \\ -\frac{1}{14}\cdot F_3}} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{14} & \frac{5}{14} & -\frac{2}{7} \end{array}\right)$$

Logo $M^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{5}{14} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}=\frac{1}{14}\cdot\begin{pmatrix} 7 & 7 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ e finalmente $X=M^{-1}\cdot B=\frac{1}{14}\cdot\begin{pmatrix} 7 & 7 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}=\frac{1}{14}\cdot\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$; asi que a solución ao sistema é $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{7}$ e $z=\frac{11}{14}$, ou doutro xeito $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{7}, \frac{11}{14}\right)$.

A proba do cálculo da inversa fai-se obtendo os produtos:

$$M\cdot M^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{14}\cdot\begin{pmatrix} 7 & 7 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}=\frac{1}{14}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7 & 7 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}=\frac{1}{14}\cdot\begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1}\cdot M=\frac{1}{14}\cdot\begin{pmatrix} 7 & 7 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}=\frac{1}{14}\cdot\begin{pmatrix} 7 & 7 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}=\frac{1}{14}\cdot\begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Logo $M\cdot M^{-1}=M^{-1}\cdot M=I_3$, asi que a inversa é correcta.

6. DETERMINANTE DUNHA MATRIZ CUADRADA

6.1. DEFINICIÓN DE DETERMINANTE E PROPRIEDADES

Def 9 Dada unha matriz cuadrada $A \in M_n(\mathbb{R})$, define-se o determinante de A como unha aplicación que a toda matriz cuadrada A asócia-lle un número real, que se chamará determinante de A e designará-se por $det\ A$ ou tamén por $|A|$. Tal aplicación ten várias propriedades, que serán descritas a continuación. Para iso utilizaremos unha notación particular, que facilitará a expresión e a comprensión das mesmas.

Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é unha matriz cuadrada de n filas e n colunas, identificaremos da forma $F_1, F_2, \dots, F_n$ as filas e da forma $C_1, C_2, \dots, C_n$ as colunas de A. Ademais usaremos α para designar un escalar calquer. Asi, a matriz A poderá expresar-se da forma $A=(F_1, F_2, \dots, F_n)$ facendo referéncia ás suas filas ou ben $A=(C_1, C_2, \dots, C_n)$ se queremos referir-nos ás suas colunas. Unha fila nula ou unha coluna nula nunha matriz, identificaremo-la por O. Daquela, o determinante dunha matriz A posue as seguintes propriedades.

[Nota: As propriedades seguintes son válidas para calquer fila ou coluna da matriz.]

1ª O determinante conserva a suma de filas ou de colunas:

i. $det(F_1, \dots, F_i + F_i', \dots, F_n) = det(F_1, \dots, F_i, \dots, F_n) + det(F_1, \dots, F_i', \dots, F_n)$

ii. $det(C_1, \dots, C_i + C_i', \dots, C_n) = det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n) + det(C_1, \dots, C_i', \dots, C_n)$

2ª O determinante conserva o produto de filas ou colunas por escalares:

i. $det(F_1, \dots, \alpha \cdot F_i, \dots, F_n) = \alpha \cdot det(F_1, \dots, F_i, \dots, F_n)$

ii. $det(C_1, \dots, \alpha \cdot C_i, \dots, C_n) = \alpha \cdot det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n)$

3ª O determinante conserva o produto de matrices: $det(A \cdot B) = det\ A \cdot det\ B$.

4ª A permuta de duas filas ou colunas dunha matriz alterna o signo do determinante:

i. $det(F_1, \dots, F_i, \dots, F_j, \dots, F_n) = -det(F_1, \dots, F_j, \dots, F_i, \dots, F_n)$

ii. $det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) = -det(C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_n)$

5ª Se unha matriz ten unha fila ou unha coluna nula o seu determinante é cero:

i. $det(F_1, \dots, O, \dots, F_n) = 0$ ii. $det(C_1, \dots, O, \dots, C_n) = 0$

6ª Se nunha matriz duas filas ou duas colunas son iguais o seu determinante é cero:

i. $det(F_1, \dots, F_i, \dots, F_i, \dots, F_n) = 0$ ii. $det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_i, \dots, C_n) = 0$

7ª Se nunha matriz unha fila é múltiplo de outra ou ben unha coluna é múltiplo de outra o seu determinante é cero:

i. $det(F_1, \dots, F_i, \dots, \alpha \cdot F_i, \dots, F_n) = 0$ ii. $det(C_1, \dots, C_i, \dots, \alpha \cdot C_i, \dots, C_n) = 0$

8ª Se nunha matriz unha fila é combinación linear de outras filas ou ben unha coluna é combinación linear de outras colunas o seu determinante é nulo.

9ª Ao sumar-lle a unha fila unha combinación linear de outras ou ben a unha coluna unha combinación linear de outras o determinante non varia.

Ex 16

Demostrar que o determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2k+1 & 0 & k \\ 0 & 2\pi & \frac{1}{2} & \pi \\ 4 & 8 & -3 & 2 \\ 4 & 4 & k & 0 \end{vmatrix}$ é nulo.

Utilizando a primeira das propriedades dos determinates obtemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2k+1 & 0 & k \\ 0 & 2\pi & \frac{1}{2} & \pi \\ 4 & 8 & -3 & 2 \\ 4 & 4 & k & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & k \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \pi \\ 4 & 4 & -3 & 2 \\ 4 & 4 & k & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2k & 0 & k \\ 0 & 2\pi & \frac{1}{2} & \pi \\ 4 & 4 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & k & 0 \end{vmatrix}$$

Resultan dous determinantes nulos, xá que o primeiro deles ten a primeira e segunda colunas iguais (sexta propriedade) e o segundo ten a segunda coluna múltiplo da cuarta (sétima propriedade).

Asi que o determinante inicial é nulo por ser suma de dous determinantes nulos.

7. Cálculo do Determinante dunha Matriz Cuadrada

7.1. Determinantes de Orde 1 e 2

O determinante dunha matriz cuadrada de orde 1 coincide co valor do seu único elemento: $det\ (a_{11}) = a_{11}$

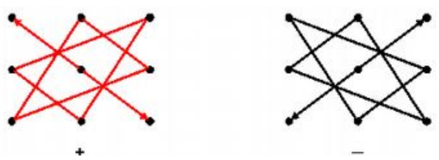
Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ é unha matriz cuadrada de orde 2, o seu determinante calcula-se da seguinte forma: $det\ A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

7.2. Determinante de Orde 3

Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ é unha matriz cuadrada de orde 3, o seu determinante é:

$$det\ A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}\ .$$

Existe unha descrición gráfica que permite memorizar esta fórmula, e que se coñece como regra de Sarrus.



Ex 17

Calcular os determinantes $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ k & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot (-4) = 10 + 12 = 22$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ k & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) \cdot 0 + 4 \cdot k \cdot 5 - 4 \cdot 3 \cdot 0 - (-2) \cdot k \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \cdot 5 = 3 + 20k + 2k + 5 = 22k + 8$$

7.3. DETERMINANTES DE ORDE SUPERIOR

O cálculo de determinantes de matrices de orde superior a 3 fará-se utilizando o método de desenrolo polos elementos dunha fila ou coluna. Antes da descrición deste método é preciso definir algúns conceitos.

Def 10 Sexa a_{ij} un elemento dunha matriz cuadrada A de orde n; define-se menor complementar do elemento a_{ij}, e designa-se por α_{ij}, ao determinante de orde $n-1$ que se obten ao eliminar na matriz A a fila i e a coluna j.

O adxunto dun elemento a_{ij} designa-se por A_{ij} e define-se como $A_{ij}:=(-1)^{i+j}\cdot\alpha_{ij}$.

Asi definido, o adxunto é un número que coincide co menor complementar se a suma de sub-índices i e j do elemento a_{ij} é par, e co seu oposto se esta suma é impar.

Define-se matriz adxunta de A, e designa-se por $Adj\ A$, como a matriz formada polos adxuntos dos elementos de A: $Adj\ A=(A_{ij})$

Ex 18 Dada a matriz $A=\begin{pmatrix}4 & -1 & 3\\ 0 & -2 & 5\\ 3 & 5 & -2\end{pmatrix}$, obter o menor complementar α_{21} e o adxunto A_{21}; calcular a matriz $Adj\ A$ (adxunta de A).

O menor complementar α_{21} obtén-se eliminando a fila 2 e coluna 1 da matriz A, e calculando o determinante resultante: $\alpha_{21}=\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 5 & -2\end{vmatrix}=(-1)\cdot(-2)-3\cdot 5=2-15=-13$

O adxunto A_{21} obtén-se a partir do menor complementar: $A_{21}=(-1)^{(2+1)}\cdot\alpha_{21}=(-1)^3\cdot(-13)=-1\cdot(-13)=13$

A matriz adxunta é a matriz formada por todos os adxuntos da matriz A: $Adj\ A=\begin{pmatrix}-21 & 15 & 6\\ 13 & -17 & -23\\ 1 & -20 & -8\end{pmatrix}$

Á vista do precedente, o método para o cálculo de determinantes de calquer orde é:

1º seleciona-se unha fila ou unha coluna da matriz A;

2º calculan-se os adxuntos dos elementos da fila ou coluna selecionada;

3º o determinante buscado é $det\ A=\sum a_{ij}\cdot A_{ij}$, onde a_{ij} son os elementos da fila ou coluna selecionada a A_{ij} son os adxuntos correspondentes.

Ex 19 Calcular o determinante da matriz $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & -2\\ 4 & 0 & -3 & 4\\ -3 & 2 & -2 & 1\\ -1 & 4 & 0 & 1\end{pmatrix}$ polo método de desenrolo polos elementos dunha fila ou coluna.

Atendendo á fórmula $det\ A=\sum a_{ij}\cdot A_{ij}$, sempre que un elemento a_{ij} sexa nulo, o valor do seu correspondente adxunto A_{ij} é irrelevante; por este motivo é conveniente escoller filas ou colunas que conteñan elementos nulos. Neste caso podemos escoller as filas F_2 ou F_4, ou ben as colunas C_2 ou C_3.

Escollamos a fila C_2, formada polos elementos $a_{12}=-1$, $a_{22}=0$, $a_{32}=2$ e $a_{42}=4$; daquela teremos que calcular os adxuntos A_{12}, A_{22}, A_{32} e A_{42}, aínda que ao ser $a_{22}=0$ podemos evitar o cálculo de A_{22}.

Os menores complementares son: $\alpha_{12}=\begin{vmatrix}4 & -3 & 4\\ -3 & -2 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=-22$, $\alpha_{32}=\begin{vmatrix}2 & 3 & -2\\ 4 & -3 & 4\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=-24$ e $\alpha_{42}=\begin{vmatrix}2 & 3 & -2\\ 4 & -3 & 4\\ -3 & -2 & 1\end{vmatrix}=-4$.

E os adxuntos serán $A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot(-22)=22$, $A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot(-24)=24$ e $A_{42}=(-1)^{4+2}\cdot(-4)=-4$; logo o determinante é: $det\ A=\sum a_{ij}\cdot A_{ij}=a_{12}\cdot A_{12}+a_{22}\cdot A_{22}+a_{32}\cdot A_{32}+a_{42}\cdot A_{42}=(-1)\cdot 22+0\cdot A_{22}+2\cdot(-24)+4\cdot(-4)=-22-48-16=-86$

7.4. CÁLCULO DE DETERMINANTES POR TRANSFORMACIÓNS ELEMENTARES

Dito dunha forma un tanto imprecisa, chaman-se transformacións elementares algunhas das operacións descritas anteriormente como propriedades dos determinantes. O uso destas transformacións permite obter un método alternativo para o cálculo de determinantes. O fundamento deste método é a propriedade 9ª, que afirma que o determinante non varia se a unha fila se lle suma unha combinación linear de outras filas ou ben se a unha coluna se lle suma unha combinación linear de outras colunas. Asi, o método consiste en triangular a matriz cuadrada de partida, tendo en conta as seguintes propriedades dos determinantes:

i. ao sumar-lle a unha fila un múltiplo ou combinación linear de outras filas, ou a unha coluna un múltiplo ou combinación linear de outras colunas, o determinante conserva o seu valor;

ii. ao permutar duas filas ou duas colunas o determinante cámbia de signo;

iii. ao multiplicar unha fila ou coluna da matriz por un escalar distinto de cero, o seu determinante ve-se multiplicado polo mesmo factor.

Ex 20

Calcular o determinante da matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ polo método das transformacións elementares.

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}^{C_1\leftrightarrow C_4} \overset{[1]}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}^{\substack{F_2-3F_1 \\ F_3+F_1 \\ F_4-F_1}} \overset{[2]}{=} -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -9 & -1 \\ 0 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & -4 \end{vmatrix}^{C_2+2C_4} \overset{[3]}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -4 \end{vmatrix}^{-2F_4} =$$

$$\overset{[4]}{=} \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \end{vmatrix}^{F_4-3F_2} \overset{[5]}{=} \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 31 & 11 \end{vmatrix}^{5F_4-31F_3} \overset{[6]}{=} \frac{1}{10}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{vmatrix} \overset{[7]}{=} \frac{1}{10}\cdot 1\cdot 2\cdot 5\cdot 24 = 24$$

Explicación do proceso:

[1] $C_1 \leftrightarrow C_4$ Ao permutar duas colunas o determinante muda o signo.

[2] $\begin{cases} F_2-3F_1 \\ F_3+F_1 \\ F_4-F_1 \end{cases}$ Son trés operacións independentes que modifican cada unha das filas F_2, F_3 e F_4 sumando-lles múltiplos da fila F_1. Estas trés operacións poden facer-se de xeito simultáneo.

[3] C_2+2C_4 Muda a coluna C_2 sumando-lle un múltiplo de C_4.

[4] $-2F_4$ Ao multiplicar unha fila polo factor -2 o determinante sofre esa mesma modificación, polo que debe ser introducido o factor corretor $-\frac{1}{2}$.

[5] F_4-3F_2 Muda a fila F_4 sumando-lle un múltiplo de F_2.

[6] $5F_4-31F_3$ Representa en realidade duas operacións consecutivas: a primeira multiplica F_4 polo factor 5 e, en consecuéncia, introduce o factor corretor $\frac{1}{5}$; a segunda resta un múltiplo de F_3.

[7] O determinante dunha matriz triangular é o produto dos elementos da sua diagonal principal.

8. Aplicacións do Cálculo de Determinantes

8.1. Cálculo da Inversa dunha Matriz Cuadrada

Di-se que unha matriz A, cuadrada de orde n, é unha matriz regular se ten inversa, é dicer, se existe A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$. O cálculo de determinantes proporciona un resultado polo que podemos recoñecer se unha matriz é regular ou singular, ou sexa, se ten ou non inversa, e ademais permite calcular a inversa no caso de que exista.

Th 2 *Proposición*

Sexa A unha matriz cuadrada de orde n; entón: A é regular $\Leftrightarrow$ $det\ A \neq 0$; e ademais se A é regular a matriz inversa de A é: $A^{-1} = \frac{1}{det\ A} \cdot Adj^t\ A$

Demostración

$\Rightarrow$ Condición necesária

Se A é unha matriz regular entón $\exists\ A^{-1}\ /\ A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$. E polas propriedades dos determinantes: $det\ A \cdot det\ A^{-1} = det\ (A \cdot A^{-1}) = det\ I_n = 1$. Polo tanto $det\ A \neq 0$ e ademais $det\ A^{-1} = \frac{1}{det\ A}$.

$\Leftarrow$ Condición suficiente

Supoñamos que $det\ A \neq 0$. A demostración de que a matriz $A^{-1} = \frac{1}{det\ A} \cdot Adj^t\ A$ é precisamente a inversa de A consiste en realizar o produto de A pola matriz $Adj^t\ A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$, onde A_{ij} son os adxuntos dos correspondentes elementos a_{ij} da matriz A.

Utilizando propriedades dos determinantes, de demostración pesada, obtén-se que os elementos da diagonal principal da matriz produto teñen valor $det\ A$, mentres que o resto dos elementos son nulos: $Adj^t\ A \cdot A = A \cdot Adj^t\ A = \begin{pmatrix} det\ A & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & det\ A & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & det\ A \end{pmatrix}$

Polo tanto, ao multiplicar este produto por $\frac{1}{det\ A}$ resulta a matriz identidade.

Ex 21 Estudar se a matriz $A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & t\\ t & 0 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ é regular e calcular, se é posíbel, a sua inversa para $t=2$.

$det\ A=\begin{vmatrix}-2 & 3 & t\\ t & 0 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=3+2t^2-9t+4=2t^2-9t+7$; $det\ A=0 \Leftrightarrow 2t^2-9t+7=0 \Leftrightarrow t=\frac{9\pm\sqrt{81-56}}{4}=\frac{9\pm5}{4} \Leftrightarrow \begin{cases}t=\frac{7}{2}\\ t=1\end{cases}$

Logo a matriz é singular se $t=\frac{7}{2}$ ou $t=1$ e é regular $\forall\ t\neq\frac{7}{2}, t\neq1$.

No caso particular $t=2$ o determinante da matriz é $det\ A=\begin{vmatrix}-2 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=2\cdot2^2-9\cdot2+7=8-18+7=-3$, polo que a matriz A é regular, é dicer, $\exists\ A^{-1}\in M_3(\mathbb{R})\ /\ A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I_3$.

Logo a inversa será $A^{-1}=\frac{1}{-3}\cdot\begin{pmatrix}-2 & -5 & 3\\ -5 & -8 & 6\\ 4 & 7 & -6\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}2 & 5 & -3\\ 5 & 8 & -6\\ -4 & -7 & 6\end{pmatrix}$.

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}2 & 5 & -3\\ 5 & 8 & -6\\ -4 & -7 & 6\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 5 & -3\\ 5 & 8 & -6\\ -4 & -7 & 6\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A\cdot A^{-1}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}2 & 5 & -3\\ 5 & 8 & -6\\ -4 & -7 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Logo en ambos casos resulta $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I_3$, polo que a inversa é correta.

8.2. CÁLCULO DO RANGO DUNHA MATRIZ

Outra aplicación dos determinantes é o cálculo do rango de matrices, é dicer, a determinación do número máximo de filas ou de colunas dunha matriz que forman un conxunto linearmente independente. Atendendo á propriedade 8ª e ao seu recíproco, se o determinante é distinto de 0 entón o conxunto formado polas filas é linearmente independente e, de igual xeito, o conxunto formado polas colunas é tamén linearmente independente.

O método consiste polo tanto na busca da maior sub-matriz cuadrada de A que teña determinante distinto de cero. Esta sub-matriz informa do número máximo de filas e colunas de A que forman un conxunto independente, e indica tamén que filas ou colunas integran tal conxunto máximo.

Ex 22 Obter o rango da matriz $A=\begin{pmatrix}3 & 3 & -1 & 2\\ 0 & 9 & 1 & 7\\ -5 & -2 & 2 & -1\end{pmatrix}$.

Se chamamos F_1, F_2 e F_3 ás filas e C_1, C_2, C_3 e C_4 ás colunas, resulta que partindo das duas primeiras filas e duas primeiras colunas temos:

$\begin{vmatrix}3 & 3\\ 0 & 9\end{vmatrix}=27\neq0$ [1], logo tanto $\{F_1,F_2\}$ como $\{C_1,C_2\}$ son conxuntos linearmente independentes e $rang\ A\geqslant2$.

Engadindo F_3 e C_3 temos $\begin{vmatrix}3 & 3 & -1\\ 0 & 9 & 1\\ -5 & -2 & 2\end{vmatrix}=0$ e ao mudarmos C_3 por C_4 resulta $\begin{vmatrix}3 & 3 & 2\\ 0 & 9 & 7\\ -5 & -2 & -1\end{vmatrix}=0$.

Logo, partindo do determinante [1] é imposíbel obter un novo determinante de maior orde que o conteña. Como conclusión resulta que $rang\ A=2$; ademais $\{F_1,F_2\}$ e $\{C_1,C_2\}$ son linearmente independentes e calquer conxunto que conteña mais filas ou colunas será forzosamente linearmente dependente, polo que podemos concluir a maiores que F_3 é combinación linear de F_1 e F_2, e que C_3 e C_4 son ambas combinación linear de C_1 e C_2.

Ex 23

Obter o rango da matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 1 & k & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dependendo do valor do parámetro k .

Chamando F_1 , F_2 , F_3 e F_4 ás filas e C_1 , C_2 e C_3 ás colunas e tomando o determinante formado polas trés últimas filas, temos:

$det\,(F_2, F_3, F_4)=\begin{vmatrix} 1 & k & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=k-1$, de xeito que $k-1=0 \Leftrightarrow k=1$.

Logo, no caso xeral $k\neq 1$ os conxuntos formados polas filas $\{F_2, F_3, F_4\}$ e polas colunas $\{C_1, C_2, C_3\}$ son linearmente independentes, asi que $rang\ A\geqslant 3$. Resulta evidente que o rango de A non pode ser superior a 3 , xá que é imposíbel atopar un conxunto de mais de trés colunas que sexa linearmente independente (non hai mais que trés colunas). E como o rango há de coincidir tanto para filas como para colunas, resulta finalmente que se $k\neq 1$, $rang\ A=3$. Asi que os conxuntos $\{F_2, F_3, F_4\}$ e $\{C_1, C_2, C_3\}$ son linearmente independentes e a fila F_1 debe ser combinación linear das outras trés filas.

No caso particular $k=1$, a matriz A transforma-se en $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e como o determinante formado polas filas $\{F_2, F_3, F_4\}$ é neste caso nulo, tratamos de formar outro de orde trés que non o sexa.

É imediato ver que o determinante de orde 2 formado combinando $\{F_3, F_4\}$ e $\{C_1, C_2\}$ é distinto de cero: $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$; logo a única posibilidade de formar un novo determinante de orde trés a partir deste último consiste en engadir F_1 e C_3 , co que obtemos: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$.

Logo se $k=1$, resulta $rang\ A=2$, con $\{F_3, F_4\}$ e $\{C_1, C_2\}$ como conxuntos linearmente independentes e F_1 e F_2 que serán combinación linear de F_3 e F_4 , e C_3 que será combinación linear de C_1 e C_2 .

Resumindo: $rang\ A=3\ \forall\ k\neq 1$ e $rang\ A=2 \Leftrightarrow k=1$.

9. Compatibilidade e Resolución de Sistemas Lineares por Determinantes

9.1. Teorema de Rouché-Fröbenius

O cálculo do rango da matriz de coeficientes e da matriz ampliada dun sistema linear proporciona toda a información necesária acerca da compatibilidade dun sistema, conforme o enunciado do Teorema de Rouché-Fröbenius.

Th 3 *Teorema de Rouché-Fröbenius*

Sexa $S \equiv C_1 \cdot x_1 + C_2 \cdot x_2 + \ldots + C_n \cdot x_n = B$ un sistema linear de m ecuacións e n incógnitas, e sexan M a matriz de coeficientes e M^* a matriz ampliada do sistema, entón: S é un sistema compatíbel $\Leftrightarrow$ $rang\ M = rang\ M^*$.

Ademais, no caso de que $rang\ M = rang\ M^*$, o sistema será compatíbel determinado $\Leftrightarrow$ $rang\ M = rang\ M^* = n$ e o sistema será compatíbel indeterminado $\Leftrightarrow$ $rang\ M = rang\ M^* < n$.

Demostración

Sexa o sistema linear $S \equiv C_1 \cdot x_1 + C_2 \cdot x_2 + \ldots + C_n \cdot x_n = B$; resulta o seguinte:

S é compatíbel $\Leftrightarrow$ $\exists (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ / $C_1 \cdot s_1 + C_2 \cdot s_2 + \ldots + C_n \cdot s_n = B$ $\Leftrightarrow$ a coluna B é combinación linear das colunas de coeficientes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ $\Leftrightarrow$ $rang\ (C_1, C_2, \ldots, C_n) = rang\ (C_1, C_2, \ldots, C_n, B)$ $\Leftrightarrow$ $rang\ M = rang\ M^*$.

Para demostrar a segunda parte, supoñamos que o sistema é compatíbel (e, polo tanto $rang\ M = rang\ M^*$) e indeterminado, polo que terá polo menos duas solucións distintas $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ e $(s_1', s_2', \ldots, s_n')$. Logo $C_1 \cdot s_1 + C_2 \cdot s_2 + \ldots + C_n \cdot s_n = B$ e $C_1 \cdot s_1' + C_2 \cdot s_2' + \ldots + C_n \cdot s_n' = B$, e restando ambas expresións obtemos que $C_1 \cdot (s_1 - s_1') + C_2 \cdot (s_2 - s_2') + \ldots + C_n \cdot (s_n - s_n') = O$, onde non todos os factores que multiplican ás colunas $C_1, C_2, \ldots, C_n$ son nulos, xá que supuxéramos que as solucións eran distintas. Isto equivale a afirmar que o conxunto das colunas $C_1, C_2, \ldots, C_n$ é linearmente dependente e polo tanto $rang\ M = rang\ M^* < n$.

Reciprocamente, supoñamos que $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ é unha solución do sistema, de maneira que $C_1 \cdot s_1 + C_2 \cdot s_2 + \ldots + C_n \cdot s_n = B$. E supoñamos tamén que $rang\ M = rang\ M^* < n$, polo que o conxunto das colunas $C_1, C_2, \ldots, C_n$ é linearmente dependente. Asi, há de existir un conxunto de escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, de xeito que non todos sexan nulos e tal que $C_1 \cdot \alpha_1 + C_2 \cdot \alpha_2 + \ldots + C_n \cdot \alpha_n = O$.

Sumando as duas combinacións lineares das colunas $C_1, C_2, \ldots, C_n$ resulta $C_1 \cdot (s_1 + \alpha_1) + C_2 \cdot (s_2 + \alpha_2) + \ldots + C_n \cdot (s_n + \alpha_n) = B$, asi que $(s_1 + \alpha_1, s_2 + \alpha_2, \ldots, s_n + \alpha_n)$ será outra solución do sistema, distinta da inicial, o que equivale a afirmar que o sistema é compatíbel indeterminado.

Segundo o anterior, se un sistema é compatíbel indeterminado, ou sexa, $rang\ M = rang\ M^* < n$, o rango da matriz de coeficientes indica cantas e cales son as ecuacións principais e as incógnitas principais do sistema. O resto de ecuacións son prescindíbeis por seren combinación linear das principais. O resto das incógnitas perden tal condición para convertiren-se en parámetros, é dicer, pasan a ser variábeis libres (poden tomar como valor calquer número real) das que dependerá o valor das incógnitas principais, e dicer, das que dependerá a solución do sistema.

Ex 24

Estudar a compatibilidade do sistema linear $S=\begin{cases} x+y-2z=1 \\ 4x-4z=5 \\ 2x-2y=3 \end{cases}$.

As matrices de coeficientes e ampliada son, respectivamente, $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ e $M^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -4 & 5 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}=-4\neq 0 \Rightarrow rang\ M\geqslant 2$ e $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow rang\ M<3$; polo tanto $rang\ M=2$.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}=0$ e polo tanto $rang\ M^*=2$; logo temos un sistema compatíbel xá que $rang\ M=rang\ M^*=2$.

Como ademais o rango é inferior nunha unidade ao número de incógnitas, resulta un sistema compatíbel indeterminado con 1 grau de liberdade.
O maior determinante distinto de cero, que é o que proporciona o rango de ambas matrices, indica tamén que ecuacións podemos considerar como suficientes para resolver o sistema, á vez que indica que incógnitas poden ser consideradas como variábeis dependentes e que outras poden adoptar o papel de variábeis libres ou parámetros.
Neste caso o maior determinante non nulo é o formado polas filas $\{F_1,F_2\}$ e polas colunas $\{C_1,C_2\}$: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}\neq 0$, polo tanto o sistema pode reducir-se ás duas primeiras ecuacións (a terceira ecuación é combinación linear das duas primeiras) e ás duas primeiras incógnitas (z converte-se en parámetro). Deste xeito obtemos o sistema equivalente $S'=\begin{cases} x+y-2z=1 \\ 4x-4z=5 \end{cases}$ ou incluso $S''=\begin{cases} x+y=2z+1 \\ 4x=4z+5 \end{cases}$, onde o parámetro pasa a formar parte dos termos independentes.
Este último sistema pode resolver-se facilmente polos métodos de Gauss ou Gauss-Jordan, entre outros:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2z+1 \\ 4 & 0 & 4z+5 \end{array}\right)^{4F_1-F_2} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 4 & 4z-1 \\ 4 & 0 & 4z+5 \end{array}\right)^{\frac{1}{4}F_1}_{\frac{1}{4}F_2} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & z-\frac{1}{4} \\ 1 & 0 & z+\frac{5}{4} \end{array}\right)^{F_1\leftrightarrow F_2} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & z+\frac{5}{4} \\ 0 & 1 & z-\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

A solución polo tanto será $x=z+\frac{5}{4}$, $y=z-\frac{1}{4}$, $z\in\mathbb{R}$, ou tamén $\left(z+\frac{5}{4}, z-\frac{1}{4}, z\right)$ $z\in\mathbb{R}$.

9.2. REGRA DE CRAMER

A regra de Cramer é un método directo para o cálculo da solución de sistemas lineares compatíbeis.

Def 11 Sexa $S\equiv C_1\cdot x_1+C_2\cdot x_2+\ldots+C_n\cdot x_n=B$ un sistema linear, di-se que S é un sistema de Cramer $:\Leftrightarrow$ a matriz M dos coeficientes de S é unha matriz cuadrada regular, ou o que é equivalente, se $\det M\neq 0$.

Th 4 *<u>Regra de Cramer</u>*

Se S é un sistema de Cramer, entón S é compatíbel determinado e a sua solución é $x_1=\dfrac{\det(B,C_2,\ldots,C_n)}{\det(C_1,C_2,\ldots,C_n)}$, $x_2=\dfrac{\det(C_1,B,\ldots,C_n)}{\det(C_1,C_2,\ldots,C_n)}$, e en xeral $x_i=\dfrac{\det(C_1,\ldots,\overset{(i}{B},\ldots,C_n)}{\det(C_1,C_2,\ldots,C_n)}$, onde a coluna B ocupa na matriz de coeficientes o lugar da coluna C_i.

<u>Demostración</u>

[Nota: A demostración fará-se para o cálculo de x_1, xá que o cálculo do resto das fórmulas é similar.]

O facto de ser $S\equiv C_1\cdot x_1+C_2\cdot x_2+\ldots+C_n\cdot x_n=B$ un sistema de Cramer implica que a matriz M de coeficientes é cuadrada e regular, polo que o $\det M\neq 0$ e como consecuéncia $\operatorname{rang} M=\operatorname{rang} M^*=n$. Asi, todo sistema de Cramer é compatíbel determinado. Supoñamos que a sua solución é $(s_1,s_2,\ldots,s_n)$, de maneira que $C_1\cdot s_1+C_2\cdot s_2+\ldots+C_n\cdot s_n=B$; logo utilizando as propriedades dos determinantes resulta:

$$\begin{aligned}&\det(B,C_2,\ldots,C_n)=\det(C_1\cdot s_1+C_2\cdot s_2+\ldots+C_n\cdot s_n,C_2,\ldots,C_n)=\\&=\det(C_1\cdot s_1,C_2,\ldots,C_n)+\det(C_2\cdot s_2,C_2,\ldots,C_n)+\ldots+\det(C_n\cdot s_n,C_2,\ldots,C_n)=\\&=\det(C_1\cdot s_1,C_2,\ldots,C_n)=s_1\cdot\det(C_1,C_2,\ldots,C_n).\end{aligned}$$

Igualando o primeiro e o último membro das igualdades anteriores resulta a igualdade $=\det(B,C_2,\ldots,C_n)=s_1\cdot\det(C_1,C_2,\ldots,C_n)$, de onde se obtén $s_1=\dfrac{\det(B,C_2,\ldots,C_n)}{\det(C_1,C_2,\ldots,C_n)}$.

Ex 25 Estudar se $S=\begin{cases}2x-y-z=3\\ x+2z=0\\ x-3y+z=1\end{cases}$ é un sistema de Cramer e resolvé-lo nese caso.

Para ser un sistema de Cramer a sua matriz de coeficientes há de ser regular, é dicer, cuadrada e con determinante non nulo:

$M=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\1&0&2\\1&-3&1\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$ e $\det M=\begin{vmatrix}2&-1&-1\\1&0&2\\1&-3&1\end{vmatrix}=14\neq 0$; logo S é un sistema de Cramer.

A solución é: $x=\dfrac{\begin{vmatrix}3&-1&-1\\0&0&2\\1&-3&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&-1&-1\\1&0&2\\1&-3&1\end{vmatrix}}=\dfrac{16}{14}=\dfrac{8}{7}$, $y=\dfrac{\begin{vmatrix}2&3&-1\\1&0&2\\1&1&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&-1&-1\\1&0&2\\1&-3&1\end{vmatrix}}=-\dfrac{2}{14}=-\dfrac{1}{7}$ e $z=\dfrac{\begin{vmatrix}2&-1&3\\1&0&0\\1&-3&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&-1&-1\\1&0&2\\1&-3&1\end{vmatrix}}=-\dfrac{8}{14}=-\dfrac{4}{7}$

Asi que $x=\dfrac{8}{7}$, $y=-\dfrac{1}{7}$, $z=-\dfrac{4}{7}$ ou, expresada en forma vectorial: $\left(\dfrac{8}{7},-\dfrac{1}{7},-\dfrac{4}{7}\right)$.

Embora a regra de Cramer foi estabelecida para sistemas compatíbeis determinados, tamén pode ser utilizada para resolver sistemas indeterminados. O proceso consiste en selecionar as ecuacións e incógnitas principais, a partir do estudo do rango da matriz de coeficientes. Unha vez feita esta seleción, as ecuacións non principais poden desprezar-se e as incógnitas non principais (os parámetros ou variábeis libres) pasan a formar parte dos termos independentes de cada ecuación. Na sua nova expresión, o sistema pasa a ser de Cramer e aplica-se-lle a regra correspondente.

Ex 26

Estudar se $S=\begin{cases} -2x+2y+z=0 \\ x-y+z=3 \\ 4x-4y+z=6 \end{cases}$ é un sistema de Cramer e resolvé-lo se é posíbel.

$M=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ e $\det M=\begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \end{vmatrix}=0$; logo S non é un sistema de Cramer.

Calquer determinante de orde 2 formado coas duas primeiras colunas é nulo, debido a que son opostas. Logo trataremos de buscar determinantes de orde 2 non nulos coa primeira e terceira colunas:

$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-3\neq 0$ [1], asi que $rang\ M=2$ e os conxuntos $\{F_1,F_2\}$ e $\{C_1,C_3\}$ son linearmente independentes.

Ademais $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix}=0$, asi que $rang\ M=rang\ M^*=2$, polo que temos un sistema compatíbel indeterminado, con 1 grau de liberdade.

Tomando as duas primeiras ecuacións e reservando como incógnitas x e z , podemos transformar e reducir o sistema suprimindo a terceira ecuación, por ser combinación linear das duas primeiras, e considerando y como libre (parámetro):

O sistema inicial é equivalente a $S'=\begin{cases} -2x+z=-2y \\ x+z=y+3 \end{cases}$, que si é un sistema de Cramer xá que, por [1], a sua matriz de coeficientes ten determinante non nulo.

Resolvendo polo método de Cramer obtemos:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -2y & 1 \\ y+3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{-3y-3}{-3}=y+1 \quad \text{e} \quad z=\frac{\begin{vmatrix} -2 & -2y \\ 1 & y+3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{-6}{-3}=2$$

Asi que a solución é $x=y+1$, $z=2$, $\forall\ y\in\mathbb{R}$ ou tamén: $(y+1,y,2)$ $y\in\mathbb{R}$.

Ex 27

Estudar a compatibilidade e resolver, se é posíbel, o sistema $S=\begin{cases} kx+2y-z=2 \\ 4x+ky+z=-1 \\ 3x-y+2z=-3 \end{cases}$, dependente do parámetro t.

As matrices do sistema son $M=\begin{pmatrix} k & 2 & -1 \\ 4 & k & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ e $M^*=\begin{pmatrix} k & 2 & -1 & 2 \\ 4 & k & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$.

$\det M=\begin{vmatrix} k & 2 & -1 \\ 4 & k & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}=2k^2+4k-6$; $\det M=0 \Leftrightarrow 2k^2+4k-6=0 \Leftrightarrow k^2+2k-3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} k=1 \\ k=-3 \end{cases}$

Polo tanto teremos un sistema de Cramer sempre que $k\neq 1$ e $k\neq -3$, é dicer, un sistema compatíbel determinado, no que $rang\ M=rang\ M^*=3$.

Nos casos particulares temos:

$k=1$: $M^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=-7\neq 0 \Rightarrow rang\ M=2$ e $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow rang\ M^*=2$, logo é un sistema compatíbel indeterminado con 1 grau de liberdade, por ser $rang\ M=rang\ M^*=2<3$.

$k=-3$: $M^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=1\neq 0 \Rightarrow rang\ M=2$ e $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix}=4\neq 0 \Rightarrow rang\ M^*=3$, logo é un sistema incompatíbel, por ser $rang\ M<rang\ M^*$.

En resumo: estamos ante un sistema compatíbel determinado (sistema de Cramer) se $k\neq 1$ e $k\neq -3$, un sistema compatíbel indeterminado con 1 grau de liberdade se $k=1$ e un sistema incompatíbel se $k=-3$.

Resolución no caso xeral $k\neq 1$ e $k\neq -3$:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & k & 1 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k & 2 & -1 \\ 4 & k & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{k-1}{2k^2+4k-6}=\frac{k-1}{2\cdot(k-1)\cdot(k+3)}=\frac{1}{2(k+3)},\qquad y=\frac{\begin{vmatrix} k & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k & 2 & -1 \\ 4 & k & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{k-1}{2k^2+4k-6}=\frac{1}{2(k+3)}\quad \text{e}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} k & 2 & 2 \\ 4 & k & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k & 2 & -1 \\ 4 & k & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{-3k^2-7k+10}{2k^2+4k-6}=\frac{-(k-1)\cdot(3k+10)}{2\cdot(k-1)\cdot(k+3)}=-\frac{3k+10}{2(k+3)}$$

Asi que $x=\frac{1}{2(x+3)}$, $y=\frac{1}{2(x+3)}$, $z=-\frac{3k+10}{2(x+3)}$ ou en forma vectorial: $\left(\frac{1}{2(x+3)},\frac{1}{2(x+3)},-\frac{3k+10}{2(x+3)}\right)$ $k\neq 1$, $k\neq -3$.

Resolución no caso xeral $k=1$:

O maior determinante non nulo é $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=-7\neq 0$, logo tomando as duas primeiras ecuacións e duas primeiras incógnitas, obtemos o sistema equivalente $S'=\begin{cases} x+2y=z+2 \\ 4x+y=-z-1 \end{cases}$, que se pode resolver tamén polo método de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} z+2 & 2 \\ -z-1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{3z+4}{-7}=-\frac{3z+4}{7}\quad \text{e}\quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & z+2 \\ 4 & -z-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{-5z-9}{-7}=\frac{5z+9}{7}$$

Asi que a solución é $x=-\frac{3z+4}{7}$, $y=\frac{5z+9}{7}$, $\forall\ z\in\mathbb{R}$ ou tamén: $(-\frac{3z+4}{7},\frac{5z+9}{7},z)$ $z\in\mathbb{R}$.

1. ÁLXEBRA DE MATRICES

1. Calcular o valor dos parámetros seguintes para que as matrices $A=\begin{pmatrix} 2t & 0 & a+3 \\ -1 & \pi & 0.5 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} -7 & 0 & 3 \\ -1 & \pi & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ sexan iguais.

2. Calcular o valor dos parámetros para que as matrices $A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 & 1 \\ t & 3 & 0 & -1 \\ t-s & 0 & -4 & s \\ 1 & -1 & -7 & 0 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & a+b \\ b & 0 & -4 & a \\ 1 & -1 & -7 & 0 \end{pmatrix}$ sexan simétricas.

3. Demostrar que se A e B son matrices simétricas, entón $A+B$ tamén é simétrica.

4. Demostrar que o conxunto $M_{3,4}(\mathbb{R})$, coas operacións naturais, é un espazo vectorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.

5. Dadas as matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, calcular $2A+2(B-C)$ e $-4A-\left(B+\frac{1}{2}C\right)$.

6. Resolver o sistema de ecuacións matriciais: $2A-B=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $4A+7B=\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$, $A+4B=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

7. Consideran-se duas matrices A e B que verifican $A+B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ e $A-B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; calcular A^2-B^2.

8. Resolver a ecuación matricial $2A-X=X+\frac{3}{4}B$, con $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

9. Resolver a ecuación matricial $-2B-A+2X=3A$, con $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. COMBINACIÓN LINEAR E DEPENDÉNCIA LINEAR

10. Obter trés combinacións lineares diferentes cos vectores $u=(3,-1,2,0)$, $v=(1,\frac{\pi}{2},0,-2)$ e $w=(0,0,-3,2)$.
11. Expresar o vector $a=(0,-1,2,6)$ como combinación linear dos vectores $u=(3,-1,2,0)$, $v=(-1,0,0,2)$ e $w=(3,0,3,-1)$.
12. Expresar o vector $a=(0,-1,2,6)$ como combinación linear dos vectores $u=(3,0,2,1)$, $v=(1,0,2,2)$ e $w=(3,0,-1,0)$.
13. Obter de várias formas distintas o vector $a=(3,3,-4)$ como combinación linear dos vectores $u=(-1,1,2)$, $v=(2,1,-3)$ e $w=(0,3,1)$.
14. Obter de várias formas distintas o vector $O=(0,0,0)$ como combinación linear dos vectores $u=(-1,1,2)$, $v=(2,1,-3)$ e $w=(0,3,1)$.
15. Obter de várias formas distintas o vector $a=(3,3,-4)$ como combinación linear dos vectores $u=(-1,1,2)$, $v=(2,1,-3)$ e $w=(0,-3,1)$.
16. Dados os vectores $u=(2,-3,0)$, $v=(1,0,4)$ e $w=(-1,2,3)$:
    i. cantas combinacións lineares distintas producen o vector nulo?
    ii. é posíbel obter o vector u como combinación linear de v e w?
    iii. é posíbel obter algún dos vectores u, v ou w como combinación linear dos outros dous?
17. Demostrar a seguinte proposición: un conxunto de vectores $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ é linearmente dependente $\Leftrightarrow$ algún dos vectores do conxunto é combinación linear dos outros vectores.
18. Calcular o valor de t sabendo que o vector vector $b=(0,t-1,2,4)$ é combinación linear dos vectores $u=(1,1,1,-1)$, $v=(-1,0,2,-3)$ e $w=(-2,1,0,0)$.
19. Estudar a dependéncia linear do conxunto $T=\{(-1,1,4),(0,0,0),(2,-1,2),(0,1,3),(2,-2,-2)\}$. Eliminar de T a mínima cantidade de vectores para obter un subconxunto de T que sexa linearmente independente.
20. Estudar o rango do conxunto T do exercício anterior.

3. PRODUTO DE MATRICES

21. Comprobar, utilizando exemplos, que se verifican as propriedades do produto matricial.
22. Dadas trés matrices A, B e C, sabe-se que $A \cdot B \cdot C \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ e que $B \cdot C \in M_{4,3}(\mathbb{R})$. Obter de forma razoada a dimensión de A.
23. Dadas $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, calcular $A \cdot B$, $B \cdot A$, $A \cdot A$ e B^3.

24. Dadas $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $V=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ e $W=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, calcular $A\cdot I_3$, $I_3\cdot A$, $A\cdot W$, $V\cdot W$ e $W\cdot V$.

25. Calcular M^{13}, onde $M=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{13} & \frac{1}{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

26. Se A é unha matriz cuadrada de orde n tal que $A^2=A$, I_n é a matriz identidade de orde n e $B=2A-I_n$, calcular B^2.

27. Se A é unha matriz tal que $A^2=A$ e $B=\frac{1}{2}A$, calcular B^2, B^3, B^{45} e B^n.

28. Calcular os valores de a e b na matriz $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ para que $A^2=A$.

29. Aportar algún exemplo no que se amose que o produto de matrices, en xeral, non é comutativo.

30. Obter as matrices que comutan coa matriz $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

31. Demostrar que as matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ comutan, $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$.

32. Calcular o valor de γ para que as matrices $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & \gamma \\ 2 & \gamma & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ comuten.

33. Demostrar que se A e B son matrices de igual dimensión, entón $(A+B)^t=A^t+B^t$.

34. Supondo que as matrices A e B poden multiplicar-se, demostrar que $(A\cdot B)^t=B^t\cdot A^t$.

35. Demostrar que dada unha matriz A, o produto $A\cdot A^t$ é unha matriz cuadrada e simétrica.

36. É certa, en xeral, a igualdade matricial $(A+B)^2=A^2+2\,AB+B^2$? Hai algunha circunstáncia na que tal igualdade sexa certa?

37. Se A e B son matrices cuadradas de orde n, é certa a igualdade $(A+B)\cdot(A-B)=A^2-B^2$?

38. Unha empresa produce fariñas para alimentación animal de trés tipos, misturando en distintas cantidades catro matérias primas: cada saco de fariña do tipo I contén 20 unidades da matéria prima A, 15 da B, 20 da C e 5 da D; o saco de fariña do tipo II compón-se de 5, 30, 20 e 10 unidades, respectivamente e a de tipo III contén 10, 10, 10 e 30 unidades, respectivamente. Cada unha das matérias primas é subministrada por duas cooperativas diferentes aos prezos seguintes: a cooperativa T vende a $1€$ cada unidade da matéria prima A, a $3€$ a B, a $2€$ a C e a $5€$ a D e a cooperativa K vende a $2€$, $4€$, $1€$ e $4€$, respectivamente.

i. Formar con estes dados as matrices F coas componentes dos distintos tipos de fariña e P cos prezos das matérias primas para cada cooperativa, de forma que F e P sexan multiplicábeis.

ii. Calcular e interpretar o produto $F \cdot P$.

iii. Que cooperativa permite minimizar os custos de produción de cada tipo de fariña?

iv. Se se queren producir 100 sacos de fariña do tipo I, 90 sacos do tipo II e 110 sacos do tipo III encargando-lle toda a subministración a unha soa cooperativa, a cal se lle encargaria, dando por suposto que as calidades dos produtos subministrados son semellantes? Obter a resposta matricialmente.

4. SISTEMAS LINEARES E MÉTODO DE GAUSS

39. Discutir e resolver os seguintes sistemas lineares, utilizando o método de Gauss, e indicar o grau de liberdade do sistema, no caso de ser compatíbel indeterminado:

i. $\begin{cases} 2x+3y-z=3 \\ x-3y+2z=0 \\ 3x+3y-z=3 \\ -x-y-z=-5 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ 3x-3z+2y+t=0 \\ 4z-2t+2x-3y=0 \\ -x-y-3z+4t=0 \end{cases}$

iii. $\begin{cases} y+3z-t=5 \\ x-y-z+3t=2 \\ x+2z+2t=7 \end{cases}$

iv. $\begin{cases} 2x-3y+4z=-1 \\ 4x-y+2z=3 \\ 2x+2y-2z=3 \end{cases}$

v. $\begin{cases} 2x-3y+4z=3 \\ 4x-y+2z=5 \end{cases}$

vi. $\begin{cases} x+2y-z=8 \\ 2x+3y+8z=12 \\ -2x+4y-5z=-7 \end{cases}$

vii. $\begin{cases} x-2y=3 \\ x+3y=-2 \\ y-x=1 \\ 2y+x=-3 \end{cases}$

viii. $\begin{cases} x-y=z \\ y-z=x \\ z-x=y \end{cases}$

40. Resolver os seguintes sistemas utilizando o método de Gauss-Jordan:

i. $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ 3x+2y-z+t=0 \\ 2x-3y+4z-2t=0 \\ -x-y-3z+5t=0 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} 2x+5y+z+3t=6 \\ x+3y+2z+5t=0 \\ -x+3y+3t=-2 \\ y+2z+3t=-2 \end{cases}$

iii. $\begin{cases} x+3z+1=0 \\ 2x+2y+z=0 \\ x-4y+z+5=0 \\ 2y+z-2=0 \end{cases}$

41. Calcular as inversas de $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $C=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ utilizando o método de Gauss-Jordan.

5. MATRIZ INVERSA

42. Resolver a ecuación $AX+B=C$, onde $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ e $C=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

43. Dadas as matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, resolver a ecuación matricial $ABX-CX=2C$.

44. Resolver a ecuación matricial $AXB=C$, onde $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ e $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

45. Resolver a ecuación matricial $AX-2B=3X$, con $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

46. Obter, se existe, a matriz X tal que $B^2X-BX+X=B$, con $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

47. Dadas as matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ e $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, resolver, se é posíbel, a ecuación $A\cdot X+C\cdot B^t=B\cdot B^t$.

48. Se A, B e C son matrices cuadradas da mesma orde, sabe-se que da igualdade $AB=AC$ non se pode deducir que $B=C$. Probar que tal conclusión pode derivar-se no caso de que a matriz A sexa regular.

49. Se A e B son duas matrices cuadradas inversíbeis de orde n: ten inversa a matriz produto AB? Razoá-lo.

50. Probar que se A é unha matriz regular, entón a inversa do cuadrado de A coincide co cuadrado da inversa de A e, en xeral, a inversa da poténcia n-ésima de A coincide coa poténcia n-ésima da inversa de A.

51. Comprobar que $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2-2 \end{pmatrix}$ é unha matriz regular para todo valor de a e calcular a sua inversa en función do parámetro a.

52. Resolver os seguintes sistemas utilizando a matriz inversa:

i. $\begin{cases} x+y-3z=2 \\ 2x+y-6z=1 \\ 3x-4y-z=1 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} x+y-z-3=0 \\ 2x-2y-3z=1 \\ x+y-2z-2=0 \end{cases}$

53. Resolver o sistema $\frac{1}{3}(A^t-A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, con $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

54. Resolver a ecuación $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, de duas formas diferentes.

55. Se A é unha matriz cuadrada de orde trés, probar que $A+A^t$ é unha matriz simétrica. Calcular a inversa de $A+A^t$, con $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

56. Demostrar que a matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ verifica a ecuación $A^2+\alpha A+\beta I_2=O$, onde I_2 é a matriz identidade de orde 2, e determinar neste caso os valores dos parámetros α e β. Utilizar o anterior para calcular a inversa de A.

6. DETERMINANTE DUNHA MATRIZ CUADRADA

57. Calcular o valor dos determinantes:

i. $\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 11 & \frac{3}{7} \end{vmatrix}$

ii. $\begin{vmatrix} 11 & \frac{3}{7} \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$

iii. $\begin{vmatrix} -1 & 11 \\ 5 & \frac{3}{7} \end{vmatrix}$

iv. $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

v. $\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}$

vi. $\begin{vmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -7 \end{vmatrix}$

vii. $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -12 \end{vmatrix}$

viii. $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$

ix. $\begin{vmatrix} 12 & 20 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$

x. $\begin{vmatrix} -12 & -20 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$

xi. $\begin{vmatrix} -12 & 20 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

xii. $\begin{vmatrix} x & y \\ 0 & x \end{vmatrix}$

xiii. $\begin{vmatrix} t-1 & 1 \\ t^2 & t+1 \end{vmatrix}$

xiv. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ k\cdot a_{11} & k\cdot a_{12} \end{vmatrix}$

xv. $\begin{vmatrix} a_{11} & k\cdot a_{11} \\ a_{21} & k\cdot a_{21} \end{vmatrix}$

58. Calcular o valor dos determinantes:

i. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 5 & 3 & -4 \end{vmatrix}$

ii. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & -4 \end{vmatrix}$

iii. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

iv. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & 4 \\ -4 & 3 & -20 \end{vmatrix}$

v. $\begin{vmatrix} 20 & -30 & -40 \\ 0 & 20 & 40 \\ -40 & 30 & -200 \end{vmatrix}$

vi. $\begin{vmatrix} 19 & -22 & -4 \\ 19 & -22 & 4 \\ 19 & -22 & -20 \end{vmatrix}$

vii. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

viii. $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -9 & 6 & -3 \end{vmatrix}$

ix. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

x. $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$

xi. $\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{vmatrix}$

xii. $\begin{vmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 \end{vmatrix}$

xiii. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

xiv. $\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ -2 & a+1 & b \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

59. Calcular o valor dos determinantes:

i. $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 5 & -1 \\ 4 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ v. $\begin{vmatrix} t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{vmatrix}$ viii. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 9 & 12 & 15 \end{vmatrix}$

ii. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ vi. $\begin{vmatrix} -t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -t \end{vmatrix}$ ix. $\begin{vmatrix} 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x \\ x & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

iii. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ vii. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 15 \end{vmatrix}$ x. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 201 & 5.5 & -1 & 0 \\ -3 & -3 & -3 & -3 \\ 47 & -22 & -\frac{2}{5} & 133 \end{vmatrix}$

iv. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

60. Calcular o valor de x na matriz $A=\begin{pmatrix} x-1 & x-2 \\ x-2 & x-3 \end{pmatrix}$ tal que $det\ A=-1$.

61. Calcular o valor de x na matriz $A=\begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 1 & 0 & x+1 \end{pmatrix}$ tal que $det\ A=0$.

62. Obter a matriz $A=(a_{ij})\in M_{3,3}(\mathbb{R})$, tal que $a_{21}=a_{32}=0$ e $A+A^t=4I_3$, onde I_3 é matriz identidade de orde 3, sabendo ademais que $det\ A=10$.

63. Calcular o valor dos determinantes utilizando transformacións elementares:

i. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ iii. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

ii. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ iv. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix}$

64. Calcular o valor dos determinantes:

i. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{vmatrix}$ iii. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$

ii. $\begin{vmatrix} t & 5x & 9k & 13z \\ 2t & 6x & 10k & 14z \\ 3t & 7x & 11k & 15z \\ 4t & 8x & 12k & 16z \end{vmatrix}$ iv. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix}$

65. Resolver as ecuacións:

i. $\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & 1 & 0 & x \\ x & 0 & x & 1 \\ x & x & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ ii. $\begin{vmatrix} -x & a & b & c \\ -a & x & b & c \\ -a & -b & -x & c \\ -a & -b & -c & x \end{vmatrix} = 0$

66. Sabendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} = 25$, calcular o valor dos determinantes:

i. $\begin{vmatrix} 2a & 2c & 2b \\ 2u & 2w & 2v \\ 2p & 2r & 2q \end{vmatrix}$ ii. $\begin{vmatrix} w & u & v \\ c+r & a+p & b+q \\ 3c & 3a & 3b \end{vmatrix}$ iii. $\begin{vmatrix} a+p & 3a+2u & 4p+u \\ c+r & 3c+2w & 4r+w \\ b+q & 3b+2v & 4q+v \end{vmatrix}$

67. Calcular utilizando transformacións elementares, o valor do determinante $\begin{vmatrix} 2+a & b & c \\ a & 2+b & c \\ a & b & 2+c \end{vmatrix}$ e xustificar as transformacións utilizadas.

68. Demostrar que o determinante $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$ é nulo sen utilizar a regra de Sarrus.

69. Sabendo que $det\ A = 5$ e que A é unha matriz de orde 2, calcular o valor de $det\ (3A)$. Razoá-lo.

70. Se A é unha matriz cuadrada de orde 4, que relación existe entre $det\ A$ e $det\ (kA)$, con $k \in \mathbb{R}$?

71. Sexa A unha matriz de orde 2 con colunas C_1 e C_2 e determinante 4, e sexa B outra matriz da mesma orde e determinante 2. Se C é a matriz de colunas $C_1 + C_2$ e $3C_2$, calcular o determinante da matriz $B \cdot C^{-1}$.

72. Calcular o valor dos determinantes de orde n:

i. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & x & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & x \end{vmatrix}$ ii. $\begin{vmatrix} 1 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & x & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$

73. Calcular o valor do determinante de orde n $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & \dots & n \\ -1 & -2 & -3 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & 0 \end{vmatrix}$.

7. Inversa dunha Matriz Cuadrada

74. Averiguar para que valores de t a matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & t & 3 \\ 4 & 1 & -t \end{pmatrix}$ é singular. Calcular A^{-1} para $t=2$.

75. Achar a inversa das matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

76. Calcular a inversa de $M=\begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & a \\ 7 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ nos casos en que sexa regular.

77. Resolver a ecuación $AX+B=C$, onde $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ e $C=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

78. Dadas as matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, resolver a ecuación matricial $ABX-CX=2C$.

79. Resolver a ecuación $AXB=C$, con $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ e $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

80. Dada a matriz $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$, calcular os rangos de $A\cdot A^t$ e de $A^t\cdot A$, sendo A^t a matriz transposta de A. Para o valor $a=1$, resolver a ecuación matricial $A\cdot A^t\cdot X=B$, sendo $B=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

81. Sexa M unha matriz cuadrada de orde 3 con $det\ M=-1$ e que ademais verifica $M^3+M+I_3=O$, sendo I_3 a matriz unidade de orde 3. Calcular os determinantes das matrices $M+I_3$ e $3M+3I_3$.

82. Sexan A, B e C trés matrices cuadradas da mesma orde. Sabe-se que da igualdade $AB=AC$ non se pode deducir, en xeral, que $B=C$. Probar que se no caso particular de ser A unha matriz regular, entón si se pode derivar tal conclusión.

83. Sexan P e Q duas matrices cuadradas regulares de orde n. Ten inversa a matriz PQ? Razoá-lo.

84. Demostrar que se A é unha matriz regular, entón $det\ (A^{-1})=(det\ A)^{-1}$.

8. RANGO DUNHA MATRIZ

85. Calcular o rango das seguintes matrices:

i. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

ii. $B=\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -6 & 1 \\ \frac{1}{3} & 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

iii. $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

iv. $D=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 7 & 3 & 7 \\ 4 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

v. $E=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

vi. $F=\begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

vii. $G=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & -3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

viii. $H=\begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

86. Dada a matriz $A=\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$:

i. engadir-lle unha fila de forma que aumente o seu rango unha unidade;
ii. engadir -lle unha fila de forma que non aumente o seu rango;
iii. engadir -lle duas filas de forma que aumente o seu rango unha unidade;
iv. engadir -lle duas filas de forma que non aumente o seu rango;
v. suprimir-lle unha fila de forma que diminua o seu rango unha unidade;
vi. suprimir-lle unha fila de forma que non diminua o seu rango;
vii. suprimir-lle duas filas de forma que diminua o seu rango unha unidade;
viii. suprimir-lle duas filas de forma que diminua o seu rango duas unidades;
ix. suprimir-lle duas filas de forma que non varie o rango.

87. Calcular, en función de t, o rango das matrices:

i. $A=\begin{pmatrix} 2 & t \\ -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

ii. $B=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ t & 1 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

iii. $C=\begin{pmatrix} -t & -2 & 1 \\ 1 & 3 & t \end{pmatrix}$

iv. $D=\begin{pmatrix} t-1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & t+1 \end{pmatrix}$

v. $E=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -3 & t & 1 \\ t+1 & -1 & t-1 \end{pmatrix}$

vi. $F=\begin{pmatrix} 1 & 1 & t+1 \\ 1 & t+1 & 1 \\ t+1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

vii. $G=\begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & t & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

viii. $H=\begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 & -5 \\ 2t & 3 & -1 & 4 \\ 3 & t & 0 & 3 \\ -2 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

88. Obter o rango do conxunto $T=\{(-2,3,-1),(1,0,-1),(0,1,-1),(-2,1,1),(-2,2,0)\}$.

89. Estudar o rango do conxunto $B=\{(1,a,b),(0,1,c),(0,0,1)\}$.

9. COMPATIBILIDADE E RESOLUCIÓN DE SISTEMAS

90. Estudar, usando o teorema de Rouché, a compatibilidade dos seguintes sistemas e resolvé-los, se é posíbel:

i. $\begin{cases} 2x-y-z=1 \\ x-y+2z=3 \\ y-2z=0 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} x+3y=1 \\ x-3y=2 \\ 2x+y=1 \end{cases}$

iii. $\begin{cases} x+y-t=0 \\ 4y+z-3t=-1 \\ 2x-2y-z+t=1 \end{cases}$

iv. $\begin{cases} 3x+y-2z=0 \\ x-y-z=0 \\ x+3z=0 \\ 2x+2y-3z=0 \end{cases}$

v. $\begin{cases} x-y-z-t=1 \\ x-y+z+t=1 \\ x+y-z+t=2 \\ x+y+z-t=-1 \end{cases}$

vi. $\begin{cases} y-3z=t-2 \\ x=5-3t+y \\ x-z=t+y \\ 2z-t+5=2y \end{cases}$

vii. $\begin{cases} \frac{x}{2}-3y+\frac{2}{3}z=-1 \\ \frac{3x}{5}+\frac{1}{4}y=\frac{1}{2} \\ -2x+2y+\frac{2}{5}z=4 \end{cases}$

91. É compatíbel determinado o sistema $\begin{cases} 3x+2z=2 \\ 5x+2y=1 \\ x-2y+4z=3 \end{cases}$? Razoar a resposta e, en consecuéncia, xustificar se tén unha, nengunha ou mais de unha solución.

92. Estudar a compatibilidade dos seguintes sistemas, e resolvé-los se é posíbel, dependendo do valor dos parámetros:

i. $\begin{cases} x+2y+3z=k \\ 2x+4y+6z=8 \\ 3x+6y+9z=12 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} mx+y-z=1 \\ x-2y+z=1 \\ 3x+4y-2z=-3 \end{cases}$

iii. $\begin{cases} 3x+2y+az=1 \\ 5x+3y+3z=2 \\ ax+y-z=1 \end{cases}$

iv. $\begin{cases} ax+y=1 \\ x+ay=1 \\ x+y=a \end{cases}$

v. $\begin{cases} x+my+z=m+2 \\ mx+y+z=m \\ x+y+mz=-2(m+1) \end{cases}$

vi. $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x-2y+z=3 \\ 5x-5y+2z=m \end{cases}$

vii. $\begin{cases} x+by+z=1 \\ x+by+z=b \end{cases}$

viii. $\begin{cases} kx+y+z=1 \\ x+ky+z=k \\ x+y+kz=k^2 \end{cases}$

ix. $\begin{cases} (m+2)x+y+z=m-1 \\ mx+(m-1)y+z=m-1 \\ (m+1)x+(m+1)z=m-1 \end{cases}$

x. $\begin{cases} ax+2z=2 \\ 5x+2y=1 \\ x-2y+bz=3 \end{cases}$ xi. $\begin{cases} ax+2y+3z+t=6 \\ x+3y-z+2t=1 \\ 3x-ay+z=2 \\ 5x+4y+3z+3t=9 \end{cases}$ xii. $\begin{cases} x+my-z=m \\ 2x-y+nz=n \end{cases}$

93. Calcular os valores de t para que o rango da matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & t \end{pmatrix}$ sexa 2.

94. Estudar a compatibilidade dun sistema homoxéneo de trés ecuacións e trés incógnitas, dependendo do rango que teña a sua matriz de coeficientes.

95. Estudar a compatibilidade do sistema $\begin{cases} y+2z=0 \\ 3y+z=0 \\ my+z=0 \end{cases}$. Resolvé-lo se é posíbel.

96. Dado o sistema $\begin{cases} 3x-2y+z=5 \\ 2x-3y+z=4 \end{cases}$, engadir–lle unha nova ecuación, de forma que o sistema resultante sexa:
    i. incompatíbel;
    ii. compatíbel indeterminado: resolvé-lo neste caso;
    iii. compatíbel determinado: resolvé-lo.

97. Estudar a compatibilidade do sistema $\begin{cases} mx+2y=m \\ 3x-y=m \\ x-y+z=4 \end{cases}$, e substituir a terceira ecuación por outra de forma que o sistema resultante sexa compatíbel indeterminado para todo valor de m.

98. Resolver, se é posíbel, o sistema linear $\begin{cases} x+y-z=5 \\ 2x+y-2z=2 \end{cases}$ e calcular o valor de m para que ao engadir ao sistema anterior a ecuación $x+2y-z=m$ resulte un sistema compatíbel indeterminado.

99. Dar a solución do sistema $\begin{cases} x+\frac{1}{2}y-z=1 \\ 2x+y+az=0 \end{cases}$ para os distintos valores de a.

100. Calcular os valores de a que fan compatíbel o sistema $\begin{cases} ax+3y=2 \\ 3x+2y=a \\ 2x+ay=3 \end{cases}$ e resolvé-lo neses casos.

101. Discutir o sistema linear $\begin{cases} x+y+z=\alpha-1 \\ \alpha x+2y+z=\alpha \\ x+y+\alpha z=1 \end{cases}$ segundo o valor de α, e resolvé-lo nos casos en que sexa compatíbel indeterminado.

102. Discutir, segundo os valores de k os sistemas:
    i. $\begin{cases} x+ky=3 \\ kx+4y=6 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} x+3ky=1 \\ kx-3ky=2k+3 \end{cases}$

103. Dado o sistema $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ ax+(a+3)y+3z=1 \end{cases}$, estudar se é incompatíbel para algún valor de a. Calcular a solución para todos os valores de a que fagan o sistema compatíbel.

104. Dado o sistema $\begin{cases} mx-y=1 \\ x-my=2m-1 \end{cases}$, calcular m para que:

i. non teña solución;

ii. teña solución múltiple;

iii. teña solución única;

iv. teña algunha solución na que $x=3$.

105. Dado o sistema $\begin{cases} (1+t)x+y+z=1 \\ x+(1+t)y+z=1+t \\ x+y+(1+t)z=1+t^2 \end{cases}$, calcular o valor de t para que:

i. non teña solución;

ii. teña solución múltiple;

iii. teña solución única;

iv. teña algunha solución en que $y=0$.

106. Ao estudar e resolver o sistema $S\equiv\begin{cases} 3x-ky=3 \\ y+3z=6 \\ x+kz=5 \end{cases}$ atopou-se, para certo valor do parámetro k, que o sistema é compatíbel indeterminado e que a solución para a primeira incógnita pode expresar-se da forma $x=1+2t$. Calcular o valor de k para o que foi resolto o sistema e obter a solución para as incógnitas y e z.

107. Nun caixeiro automático introducen-se notas de 10, 20 e $50€$. O número total de notas é 130 e suman $3.000€$. Sabe-se que o número de notas de $10€$ é α-veces o de notas de $50€$.

i. Calcular o número de notas introducidas de cada valor para $\alpha=2$.

ii. Que acontece co caixeiro se o valor de α é 3?

iii. Neste último caso, se houbese un total de 100 notas no caixeiro, canto diñeiro deberia haber en total, para que sexa posíbel unha composición do caixeiro nestas condicións?

108. Responder razoadamente (aportar exemplos, se é posíbel) ás seguintes cuestións:

i. Pode ser incompatíbel un sistema de duas ecuacións e trés incógnitas?

ii. Pode ser compatíbel determinado? Pode ser compatíbel indeterminado?

iii. Pode ser compatíbel determinado un sistema de trés ecuacións con duas incógnitas?

109. Discutir a compatibilidade dun sistema linear de cinco ecuacións e catro incógnitas con matriz ampliada de rango 5.

110. É certo que un sistema linear con menos ecuacións que incógnitas sempre ten solución? Razoá-lo.

111. Sexa S un sistema linear compatíbel e sexa S' o sistema homoxéneo que ten a mesma matriz de coeficientes que S. Realizar un estudo comparado da solución de ambos sistemas.

112. Sexa S un sistema linear homoxéneo con igual número de ecuacións que de incógnitas. Estudar razoadamente o valor do seu determinante sabendo que o sistema é compatíbel indeterminado.

113. Resolver utilizando a Regra de Cramer os sistemas lineares:

i. $\begin{cases} x+3y=4 \\ 2x-y=1 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} 10x+4y=3 \\ 20x-5y=29 \end{cases}$

iii. $\begin{cases} x-y=1 \\ \frac{2}{5}x+\frac{3}{4}y=5 \end{cases}$

iv. $\begin{cases} x+y+z=11 \\ 2x-y+z=5 \\ 3x+2y+z=24 \end{cases}$

v. $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x+z=4 \\ y+z=5 \end{cases}$

vi. $\begin{cases} x+y-2z=9 \\ 2x-y+4z=4 \\ 2x-y+6z=1 \end{cases}$

114. Resolver por Cramer: $\begin{cases} x+y+z=m+1 \\ mx+y+(m-1)z=m \\ x+my+z=1 \end{cases}$. Dar a solución para $m=2$ e para $m=1$ e interpretar o que acontece neste último caso.

115. Resolver o sistema homoxéneo $\begin{cases} 6x+18y-10z=0 \\ 7x-2y-4z=0 \\ 4x+10y-6z=0 \end{cases}$.

116. Calcular t para que os sistemas seguintes teñan algunha solución distinta da trivial e resolvé-los en tal caso:

i. $\begin{cases} 2x-ty+4z=0 \\ x+y+7z=0 \\ tx-y+13z=0 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y-z=0 \\ x+y+tz=0 \end{cases}$

117. Calcular o valor de k para que os seguintes sistemas se podan resolver por Cramer:

i. $\begin{cases} x+y-11z=4 \\ 2x+ky+7z=1 \\ x-y-z=3 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} x+y=5 \\ y-3z=k \\ x+z=1 \end{cases}$

118. Resolver por Cramer o sistema $\begin{cases} 2bx+ay=c \\ -3bx+2ay=4c \end{cases}$.

119. Resolver os sistemas lineares:

i. $\begin{cases} 3x-2y+z=1 \\ 2x+y+z=-2 \\ x-3y=3 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} 2x-5y+z=0 \\ x+y-2z=5 \\ -3x+11y-4z=1 \end{cases}$

iii. $\begin{cases} x+y-z+t=-8 \\ x-y+z+t=2 \\ x+y+z-t=6 \\ -x+y+z+t=-4 \end{cases}$

iv. $\begin{cases} x+y+z+t=2 \\ 2x-y-z-2t=5 \\ 3x+2y+3z-t=20 \\ -x+y-z+2t=-10 \end{cases}$

v. $\begin{cases} x-5y+3z=-14 \\ 3x-y=11 \\ x+z=3 \end{cases}$

vi. $\begin{cases} 0{,}6y+\sqrt{2}z=-\frac{10}{3} \\ 2x+3y+z=1{,}5 \\ -x+10\sqrt{2}y+2z=0 \end{cases}$

vii. $\begin{cases} x-2y+z+5t-r=3 \\ -x+\frac{1}{3}y-2t+3r=-2 \end{cases}$

10. VARIEDADES

120. Discutir e resolver os seguintes sistemas lineares e interpretar xeometricamente a sua solución:

i. $\begin{cases} -x+y=1 \\ 2x-2y=2 \\ x-3y=3 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} -x+y=-1 \\ x-3y=3 \\ x+y=-1 \end{cases}$ iii. $\begin{cases} -x+y=-1 \\ x-3y=3 \\ 2x+3y=6 \end{cases}$

121. Razoar se é posíbel que un sistema de catro ecuacións e trés incógnitas sexa compatíbel.

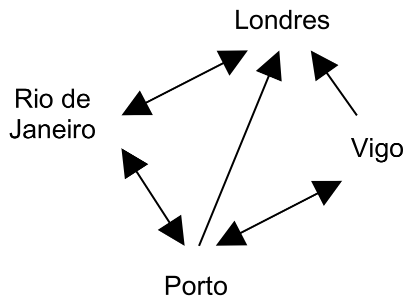
122. Razoar se é posíbel que un sistema de n ecuacións e $n-1$ incógnitas sexa compatíbel.

123. Calcular o rango das seguintes matrices, utilizando o método de Gauss:

i. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 5 & -2 & -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ ii. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$ iii. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 7 & 7 \end{pmatrix}$

124. Catro cidades están conectadas por via aérea segundo o grafo adxunto, no que as frechas indican unha conexión que parte da orixen e chega ao extremo da frecha. A matriz que representa este grafo é

$$A=\begin{array}{c|cccc} \to & P & V & L & R \\ \hline P & 0 & 1 & 1 & 1 \\ V & 1 & 0 & 1 & 0 \\ L & 0 & 0 & 0 & 1 \\ R & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array},$$



onde o valor 1 indica que existe unha conexión da cidade correspondente á fila coa cidade da coluna e 0 indica o contrário. Responder ás seguintes cuestións:

i. De que cidade parten mais vóos e cal recibe mais?

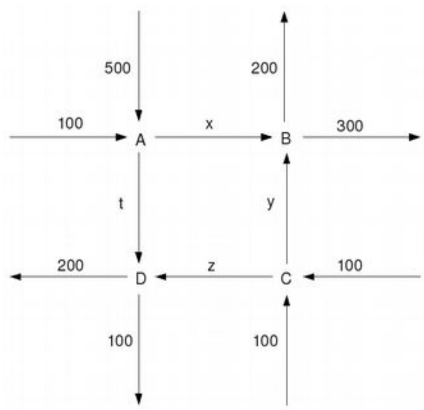
ii. É posíbel realizar un vóo directo de Rio a Vigo? E indirecto? Cantas etapas son necesárias?

iii. Calcular o cuadrado da matriz A e interpretá-la.

iv. Cantos avións hai que enlazar para viaxar de Londres ao Porto?

v. Estudar matricialmente se é posíbel viaxar de Londres a Vigo e cantos avións haberá que enlazar.

125. O seguinte esquema representa un entramado urbano no que se indica, para cada tramo, o sentido da circulación e a cantidade de veículos por hora que poden circular.



i. Propór un sistema de ecuacións para os cruces A, B, C e D e obter os valores de x, y, z e t.

ii. Comprobar que polo tramo AD poden pasar cada hora entre 100 e 300 veículos.

iii. Se se cerrase o tramo AD por obras, formaria-se algún tapón circulatório? Onde?

126. Os sistemas lineares $\begin{cases} x+y=2 \\ x+1{,}0001\,y=2 \end{cases}$ e $\begin{cases} x+y=2 \\ x+1{,}0001\,y=2{,}0001 \end{cases}$ difiren só nunha dezmilésima nun dos seus termos independentes, polo que se poderia esperar que as suas solucións fosen mui semellantes.

 i. Resolver cada un dos dous sistemas e comparar as solucións.

 ii. Interpretar xeometricamente cada sistema e a sorprendente disparidade das solucións.

127. Os bois de Newton: 75 bois paceron en 12 dias a herba dun prado de 60 áreas. En 15 dias, 81 bois paceron a herba dun prado de 72 áreas. Supón-se que a cantidade de herba que pace diariamente cada boi, a cantidade inicial de herba por cada área e a cantidade de herba que crece diariamente por cada área son constantes. Calcular a cantos bois pode alimentar durante 18 dias un prado de 96 áreas.

128. Sabendo que toda parábola ten unha ecuación da forma $y=ax^2+bx+c$:

 i. É posíbel trazar unha parábola polos pontos $A(-1,2)$, $B(1,0)$ e $C(3,6)$? No caso afirmativo, é única ou existen várias posibilidades?

 ii. O mesmo para os pontos $A(-1,2)$ e $B(1,0)$.

 iii. O mesmo para os pontos $A(-1,2)$, $B(1,0)$, $C(3,6)$ e $D(-3,10)$.

129. Dados trés pontos do plano $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$, con x_1, x_2 e x_3 distintos, baixo que condicións pode trazar-se unha parábola que conteña os pontos A, B e C?

11. SOLUCIÓNS

1. $A \neq B \quad \forall \; t, a \in \mathbb{R}$.
2. $t=-2$ e $s=-7$, a matriz B non é simétrica en calquer caso.
3. Pode-se ter en conta que unha matriz é simétrica se coincide coa sua trasposta.
4.
5. $2A+2(B-C)=\begin{pmatrix} 4 & -4 & 8 & 12 \\ 2 & -4 & 14 & -6 \\ 12 & 4 & -8 & 6 \end{pmatrix}$; $-4A-\left(B+\frac{1}{2}C\right)=\begin{pmatrix} -8 & \frac{7}{2} & -\frac{23}{2} & -24 \\ -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & -13 & \frac{3}{2} \\ -15 & -2 & \frac{17}{2} & -\frac{9}{2} \end{pmatrix}$.
6. $A=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -11 & 1 \\ 4 & 22 \end{pmatrix}$ e $B=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.
7. $A^2-B^2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 31 & 13 \\ 11 & 19 \end{pmatrix}$.

8. $X=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 12 & 15 \\ 13 & -40 \end{pmatrix}$.

9. $X=\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$.

10.

11. $u+3v+0w=a$.

12. O vector a non é combinación linear de u, v e w.

13. O vector a pode obter-se da forma $a=\alpha u+\beta v+\gamma w$, sempre que $\alpha=1-2\gamma$ e $\beta=2-\gamma$.

14. O vector O pode obter-se da forma $O=\alpha u+\beta v+\gamma w$, sempre que $\alpha=-2\gamma$ e $\beta=-\gamma$.

15. O vector a pode obter-se da forma $a=\alpha u+\beta v+\gamma w$, de maneira única con $\alpha=1$, $\beta=2$ e $\gamma=0$.

16. i.Só unha; ii.é imposíbel; iii.é imposíbel.

17.

18. $t=25$.

19. É un conxunto linearmente dependente. É preciso eliminar dous vectores (entre eles o vector nulo) para lograr un subconxunto de T que sexa linearmente independente.

20. $rang\ T=3$.

21.

22. $A \in M_{2,4}(\mathbb{R})$.

23. $A\cdot B=\begin{pmatrix} -3 & 7 & 2 \\ 6 & 8 & 4 \\ -1 & 11 & 4 \end{pmatrix}$; $B\cdot A=\begin{pmatrix} 7 & 11 & 9 \\ 0 & -6 & 0 \\ 6 & 6 & 8 \end{pmatrix}$; $A\cdot A=\begin{pmatrix} 6 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 10 \\ 8 & 10 & 14 \end{pmatrix}$;
$B^3=\begin{pmatrix} 25 & 39 & 18 \\ -100 & -32 & -28 \\ -38 & 15 & -1 \end{pmatrix}$.

24. $A\cdot I_3=I_3\cdot A=A$; $A\cdot W=\begin{pmatrix} 2x+z \\ 3x \\ 5x+y+z \end{pmatrix}$; $V\cdot W=(3x-2y+4z)$; $W\cdot V=\begin{pmatrix} 3x & -2x & 4x \\ 3y & -2y & 4y \\ 3z & -2z & 4z \end{pmatrix}$.

25. $M^{13}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e, en xeral, $M^n=\begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{13} & \frac{n}{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

26. $B^2=I_n$. En xeral $B^k=I_n$ se k é par e $B^k=B$ se k é impar.

27. En xeral $B^n=\frac{1}{2^n}\cdot A\ \ \forall\ n \in \mathbb{N}$.

28. Ten que ser $a=0$ e $b=1$ ou $a=1$ e $b=0$.

29.

30. Son matrices da forma $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ / $a_{21}=0,\ a_{22}=a_{11}+5a_{12}$.

31.

32. $A\cdot B\neq B\cdot A \quad \forall\ \gamma\in\mathbb{R}$.

33.

34. $(A\cdot B)^t=B^t\cdot A^t$.

35. A demostración consiste en probar que a trasposta de $A\cdot A^t$ coincide coa própria $A\cdot A^t$.

36. $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2 \Leftrightarrow A\cdot B=B\cdot A$; é dicer, a igualdade é certa só no caso de que as matrices A e B comuten.

37. Para que a igualdade sexa certa é condición necesária e suficiente que as matrices A e B comuten.

38. i.O produto $F\cdot P$ representa o custo de produción de cada tipo de fariña segundo a cooperativa subministradora: $F\cdot P=\begin{pmatrix} 130 & 140 \\ 185 & 190 \\ 210 & 190 \end{pmatrix}$;

ii. a cooperativa T minimiza os custos de produción das fariñas tipo I e tipo II e a cooperativa K minimiza os custos da fariña tipo III;

iii. para esta produción, a cooperativa K dá un mellor prezo total.

39. i. $(0,2,3)$; ii. $(0,0,0,0)$; iii. $(7-2z-2t, 5-3z+t, z, t)\quad z,t\in\mathbb{R}$; iv.incompatíbel; v. $\left(\frac{6-z}{5}, \frac{6z-1}{5}, z\right)\quad z\in\mathbb{R}$; vi. $\left(\frac{437}{73}, \frac{62}{73}, -\frac{23}{73}\right)$; vii.incompatíbel; viii. $(0,0,0)$.

40. i. $(0,0,0,0)$; ii. $(2,1,0,-1)$; iii. $(-1,1,0)$.

41. $A^{-1}=\frac{1}{54}\begin{pmatrix} 25 & -9 & 4 \\ 7 & -9 & -14 \\ -1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$, $B^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $C^{-1}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix} -4 & 2 & -3 \\ 2 & 8 & -3 \\ 2 & -10 & -3 \end{pmatrix}$.

42. $X=\begin{pmatrix} -1 & 7 & 3 \\ 1 & -16 & -7 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

43. $X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

44. $X=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

45. $X=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 8 & -6 & -2 \\ -2 & -6 & 8 \end{pmatrix}$

46. $X=\frac{1}{21}\begin{pmatrix}14 & 5\\ 0 & 9\end{pmatrix}$

47. $X=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-4 & 6\\ 1 & -26\end{pmatrix}$

48. Lembrar que regular equivale a ter inversa e tamén a ter determinante non nulo.

49. Obtén-se a identidade $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$.

50. Obteñen-se as identidades $(A^2)^{-1}=(A^{-1})^2$ e $(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n$.

51. $det\ A=-2\neq 0\ \ \forall\ a\in\mathbb{R}$; $A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}a^2-2 & -a\\ -a & 1\end{pmatrix}$.

52. i. $(5,3,2)$; ii. $(3,1,1)$

53. $\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$

54. $\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$

55. $\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-4 & 4 & 2\\ 4 & -1 & -2\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}$

56. $\alpha=-4$ e $\beta=3$; a inversa de A é $A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

57. i. $-\frac{388}{7}$; ii. $\frac{388}{7}$; iii. $-\frac{388}{7}$; iv. 1 ; v. 49 ; vi. 49 ; vii. -56 ; viii. -14 ; ix. -56 ; x. 56 ; xi. -56 ; xii. x^2 ; xiii. -1 ; xiv. 0 ; xv. 0

58. i. 22 ; ii. -22 ; iii. 22 ; iv. -88 ; v. -88.000 ; vi. 0 ; vii. 6 ;viii. -6 ; ix. 1 ; x. -27 ; xi. α^3 ; xii. α^3 ; xiii. 0 ; xiv. $(a+1)\cdot(a+b+1)$

59. i. -123 ; ii. 24 ; iii. 24 ; iv. 1 ; v. t^4 ; vi. t^4 ; vii. 0 ; viii. 0 ; ix. $1-x^4$; x. 0

60. $det\ A=-1\ \ \forall\ x\in\mathbb{R}$.

61. $det\ A=-1\ \Leftrightarrow\ x=1$; $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ou $x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

62. $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -t\\ 0 & 2 & 0\\ t & 0 & 2\end{pmatrix},\ t\in\mathbb{R}$

63. i. 13 ; ii. -19 ; iii. 8 ; iv. $(x+1)^3$

64. Son todos nulos.

65. i. $x=0$ ou $x=\frac{1}{2}$; ii. $x=a$, $x=-b$, $x=c$ ou $x=b-a-c$.

66. i. 200 ; ii. -75 ; iii. 600

67. $4\cdot(2+a+b+c)$

68. Abonda con sumar-lle á terceira coluna a segunda.

69. $det\ (3A)=45$

70. $det\ (kA)=k^4\cdot det\ A$

71. $B\cdot C^{-1}$; $det\ (B\cdot C^{-1})=\frac{1}{6}$.

72. i. $(x+1)^{n-1}$; ii. $1-(-x)^n$

73. $n!$

74. $A^{-1}=\frac{1}{(t-1)\cdot(t-3)}\begin{pmatrix} -t^2-3 & -1 & t \\ 12 & 4-t & -3 \\ -4t & -1 & t \end{pmatrix}$ $\forall\ t\in\mathbb{R}-\{1,3\}$; en particular, para $t=2$ resulta a matriz $A^{-1}=\begin{pmatrix} 7 & 1 & -2 \\ -12 & -2 & 3 \\ 8 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

75. $A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B^{-1}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix} -4 & 2 & -3 \\ 2 & 8 & -3 \\ 2 & -10 & -3 \end{pmatrix}$.

76. $M^{-1}=\frac{1}{49(a-5)}\begin{pmatrix} 20 & -35 & 7a-20 \\ 7a-35 & -35 & 35 \\ -28 & 49 & -21 \end{pmatrix}$ $\forall\ a\neq 5$

77. $X=\begin{pmatrix} -1 & 7 & 3 \\ 1 & -16 & -7 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

78. $X=-\frac{2}{7}\begin{pmatrix} -7 & 7 & -7 \\ 20 & -13 & 4 \\ 15 & -15 & 10 \end{pmatrix}$

79. $X=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

80. $rang\ (A\cdot A^t)=rang\ (A^t\cdot A)=2\ \ \forall\ a\in\mathbb{R}$;. a matriz é $X=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

81. $det\ (M+I_3)=1$ e $det\ (3M+3I_3)=27$.

82. A demostración fundamenta-se na existéncia da matriz inversa de A .

83. Se P e Q son duas matrices regulares de orde n , entón a matriz PQ é regular e $(P\cdot Q)^{-1}=Q^{-1}\cdot P^{-1}$.

84. A demostración é consecuéncia da propriedade dos determinantes: $det\ (A\cdot B)=det\ A\cdot det\ B$.

85. i. $rang\ A=2$; ii. $rang\ B=1$; iii. $rang\ C=2$; iv. $rang\ D=3$; v. $rang\ E=3$; vii. $rang\ F=2$; vii. $rang\ G=2$; viii. $rang\ H=3$

86.

87. i. $rang\ A=2\ \ \forall\ t\in\mathbb{R}$; ii. $rang\ B=\begin{cases}2 \text{ se } t\neq-\frac{1}{3}\\ 1 \text{ se } t=-\frac{1}{3}\end{cases}$; iii. $rang\ C=2\ \ \forall\ t\in\mathbb{R}$;

iv. $rang\ D=\begin{cases}2 \text{ se } t=\pm\sqrt{2}\\ 3 \text{ se } t\neq\pm\sqrt{2}\end{cases}$; v. $rang\ E=\begin{cases}2 \text{ se } t=-1 \text{ ou } t=\frac{1}{2}\\ 3 \text{ se } t\neq-1 \text{ e } t\neq\frac{1}{2}\end{cases}$;

vi. $rang\ F=\begin{cases}1 \text{ se } t=0\\ 2 \text{ se } t=-1\\ 3 \text{ se } t\neq 0 \text{ e } t\neq-1\end{cases}$; vii. $rang\ G=3\ \ \forall\ t\in\mathbb{R}$;

viii. $rang\ H=\begin{cases}3 \text{ se } t=1\\ 4 \text{ se } t\neq 1\end{cases}$

88. $rang\ T=2$

89. $rang\ B=3\ \ \forall\ a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$

90. i. $\left(3,\frac{10}{3},\frac{5}{3}\right)$; ii.incompatíbel; iii. $(t-y\,,y\,,3t-4y-1,t)\ ,\ \ y\,,t\in\mathbb{R}$; iv.solución trivial única; v. $\left(\frac{3}{4},-\frac{1}{4},-\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)$; vi. $\left(\frac{80}{13},\frac{48}{13},\frac{21}{13},\frac{11}{13}\right)$; vii. $\left(\frac{3.318}{571},\frac{716}{571},\frac{31.730}{571}\right)$

91. É un sistema de rango 2 , compatíbel indeterminado (solución múltiple).

92. i. $\begin{cases}SCI\ \Leftrightarrow\ k=4:\ (4-2y-3z,y,z)\ ,\ \ y,z\in\mathbb{R}\\ SI\ \Leftrightarrow\ k\neq 4\end{cases}$

ii. $SCD\ \ \forall\ m\in\mathbb{R}:\ \left(-\frac{1}{5},-\frac{m+11}{5},-\frac{2m+16}{5}\right)$

iii. $\begin{cases}SCD\ \Leftrightarrow\ a\neq 1 \text{ e } a\neq\frac{8}{3}:\ \left(\frac{3a-4}{(a-1)\cdot(3a-8)},\frac{6(a^2-4a+5)}{(a-1)\cdot(3a-8)},\frac{6-3a}{(a-1)\cdot(3a-8)}\right)\\ SI\ \Leftrightarrow\ a=1 \text{ ou } a=\frac{8}{3}\end{cases}$

iv. $\begin{cases}SCI\ \Leftrightarrow\ a=1:\ (1-y\,,y)\ ,\ \ y\in\mathbb{R}\\ SCD\ \Leftrightarrow\ a=-2:\ (-1,-1)\\ SI\ \Leftrightarrow\ a\neq 1 \text{ e } a\neq-2\end{cases}$

v. $\begin{cases}SI\ \Leftrightarrow\ m=1\\ SCI\ \Leftrightarrow\ m=-2:\ \left(\frac{3z+4}{3},\frac{3z+2}{3},z\right),\ \ z\in\mathbb{R}\\ SCD\ \Leftrightarrow\ m\neq 1 \text{ e } m\neq-2:\ \left(\frac{m(m-6)}{(m-1)\cdot(m+2)},\frac{m^2+3m+3}{(m-1)\cdot(m+2)},\frac{-2(m+1)}{m-1}\right)\end{cases}$

vi. $\begin{cases}SCI\ \Leftrightarrow\ m=8:\ (x\,,3x-4\,,5x-5)\ ,\ \ x\in\mathbb{R}\\ SI\ \Leftrightarrow\ m\neq 8\end{cases}$

vii. $\begin{cases} SI \Leftrightarrow k=-2 \\ SCI \Leftrightarrow k=1:\ (x,y,1-x-y),\ x,y\in\mathbb{R} \\ SCD \Leftrightarrow k\neq 1 \text{ e } k\neq -2:\ \left(\dfrac{(k+1)^2}{k+2},\dfrac{1}{k+2},\dfrac{(k+1)^2}{k+2}\right) \end{cases}$

viii. $\begin{cases} SCI \Leftrightarrow b=1:\ (x,y,1-x-y),\ x,y\in\mathbb{R} \\ SI \Leftrightarrow b\neq 1 \end{cases}$

ix. $\begin{cases} SI \Leftrightarrow m=-1 \\ SCI \Leftrightarrow m=1 \text{ ou } m=0:\ \begin{cases}(-z,2z,z),\ z\in\mathbb{R} \text{ para } m=1 \\ (-z-1,z+1,z),\ z\in\mathbb{R} \text{ para } m=0\end{cases} \\ SCD \Leftrightarrow m\neq 1 \text{ e } m\neq -1 \text{ e } m\neq 0:\ \left(\dfrac{m-2}{m+1},\dfrac{2}{m+1},\dfrac{1}{m+1}\right) \end{cases}$

x. $\begin{cases} SI \Leftrightarrow a=\dfrac{7}{3} \\ SCI \Leftrightarrow a=1:\ \left(x,\dfrac{20x-3}{8},\dfrac{11-4x}{8},\dfrac{21-36x}{8}\right),\ x\in\mathbb{R} \\ SCD \Leftrightarrow a\neq 1 \text{ e } a\neq\dfrac{7}{3}:\ \left(\dfrac{1}{7-3a},\dfrac{1}{7-3a},\dfrac{11-5a}{7-3a},\dfrac{7-4a}{7-3a}\right) \end{cases}$

xi. $\begin{cases} SI \Leftrightarrow ab=12 \text{ e } a\neq 3\ (\Rightarrow b\neq 4) \\ SCI \Leftrightarrow a=3 \text{ e } b=4:\ \left(x,\dfrac{1-5x}{5},\dfrac{2-3x}{2}\right),\ x\in\mathbb{R} \\ SCD \Leftrightarrow ab\neq 12:\ \left(\dfrac{2b-8}{ab-12},\dfrac{ab-10b+28}{2(ab-12)},\dfrac{4a-3}{ab-12}\right) \end{cases}$

xii. $\begin{cases} SCI \Leftrightarrow m\neq -\dfrac{1}{2} \text{ ou } n\neq -2:\ \left(\dfrac{(1-mn)z+m(n+1)}{2m+1},\dfrac{(n+2)z+2m-n}{2m+1},z\right),\ z\in\mathbb{R} \\ SI \Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{2} \text{ e } n=-2 \end{cases}$

93. $rang\ A=2 \Leftrightarrow t\neq 3$

94. Un sistema homoxéneo é sempre compatíbel. Se M é a matriz de coeficientes do sistema, este será determinado $\Leftrightarrow rang\ M=3$; e será indeterminado $\Leftrightarrow rang\ M<3$.

95. É un sistema compatíbel por ser homoxéneo e determinado por ser $rang\ M=2\ \forall\ m\in\mathbb{R}$: logo a sua solución é a trivial $(0,0)$.

96.

97. O sistema é incompatíbel se $m=-6$ e compatíbel determinado se $m\neq -6$ e é imposíbel substituir a terceira ecuación por outra de xeito que resulte un sistema compatíbel indeterminado para todo valor de m.

98. A solución é $(z-3,8,z)\ z\in\mathbb{R}$ e o sistema de trés ecuacións será compatíbel indeterminado se $m=13$.

99. $\left(x, \dfrac{4-2(x-1)\cdot(a+2)}{a+2}, -\dfrac{2}{a+2}\right), \; a, x \in \mathbb{R} \;\; e \;\; a \neq -2$

100. O sistema é compatíbel $\Leftrightarrow a=-5$; neste caso a solución é $x=y=-1$.

101. $\begin{cases} SI \;\Leftrightarrow\; \alpha=1 \\ SCI \;\Leftrightarrow\; \alpha=2\text{: } (x, 1-x, 0), \;\; x \in \mathbb{R} \\ SCD \;\Leftrightarrow\; \alpha \neq 1 \;\; e \;\; \alpha \neq 2 \end{cases}$

102. i. $\begin{cases} SI \;\Leftrightarrow\; k=-2 \\ SCI \;\Leftrightarrow\; k=2\text{: } (3-2y, y), \;\; y \in \mathbb{R} \\ SCD \;\Leftrightarrow\; k \neq 2 \;\; e \;\; k \neq -2\text{: } \left(\dfrac{6}{k+2}, \dfrac{3}{k+2}\right) \end{cases}$

ii. $\begin{cases} SCD \;\Leftrightarrow\; k \neq -1 \;\; e \;\; k \neq 0\text{: } \left(\dfrac{2k+4}{k+1}, -\dfrac{k+3}{3k(k+1)}\right) \\ SI \;\Leftrightarrow\; k=-1 \;\; ou \;\; k=0 \end{cases}$

103. O sistema é incompatíbel $\Leftrightarrow a=3$; a solución é $\left(\dfrac{8}{3-a}-y, y, \dfrac{3a-1}{a-3}-y\right), \;\; y \in \mathbb{R}, \;\; \forall\, a \neq 3$.

104. i.O sistema é incompatíbel $\Leftrightarrow m=-1$;

ii. o sistema é compatíbel indeterminado $\Leftrightarrow m=1$;

iii. o sistema é compatíbel determinado $\Leftrightarrow m \neq 1 \;\; e \;\; m \neq -1$;

iv. pode ser $m=1$ (SCI), caso no que o sistema ten solución $(x, x-1) \;\; x \in \mathbb{R}$, e para $x=3$ resulta $y=2$; ou ben $m=-\dfrac{4}{3}$ (SCD) e neste caso a solución é única: $x=3$ e $y=-5$.

105. i.O sistema é incompatíbel $\Leftrightarrow t=-3$;

ii. o sistema é compatíbel indeterminado $\Leftrightarrow t=0$;

iii. o sistema é compatíbel determinado $\Leftrightarrow t \neq 0 \;\; e \;\; t \neq -3$;

iv. pode ser $t=0$ (SCI), caso no que a solución é $(1-y-z, y, z), \;\; y, z \in \mathbb{R}$, e para $y=0$ resulta $(1-z, 0, z), \;\; z \in \mathbb{R}$; ou ben $t \neq 0$ e $t \neq -3$ (SCD) e a solución neste caso é única para cada valor de t : $x=-1$, $y=0$ e $z=t+2$.

106. O valor para o que se estudou o sistema é $k=2$ e a solución é $x=1+2t$, $y=3t$ e $z=2-t$.

107. Para $\alpha=2$, introducen-se 80 notas de $10€$, 10 de $20€$ e 40 de . Para $\alpha=3$ o problema só teria solución no caso de que a suma total fose de $2.000€$.

108. i.Si, ten que ser o rango da matriz de coeficientes 1 e o da ampliada 2 ;

ii. non porque o rango da matriz de coeficientes nunca será igual ao número de incógnitas; se é compatíbel, forzosamente há de ser indeterminado: abonda con que as matrices de coeficientes e ampliada teñan ambas o mesmo rango;

iii. si, as matrices de coeficientes e ampliada deben ter rango 2 .

109. Será en todo caso un sistema incompatíbel porque se o rango da matriz ampliada é 5 , a matriz de coeficientes será de rango 4 e polo tanto diferentes.

110. Non, abonda con pensar nun sistema no que a matriz de coeficientes sexa de rango inferior ao da ampliada.

111. No caso de que S sexa compatíbel, entón os sistemas S e S' serán determinados ou indeterminados simultaneamente.

112. O determinante da matriz de coeficientes há de ser nulo, para que se cumpra a condición de que o seu rango sexa inferior ao número de incógnitas.

113. i. $(1,1)$; ii. $\left(\frac{131}{13},-\frac{23}{13}\right)$; iii. $(5,4)$; iv. $(4,5,2)$; v. $(1,2,3)$; vi. $\left(\frac{16}{3},\frac{2}{3},-\frac{3}{2}\right)$

114. A regra de Cramer, aplicada de maneira formal, dá a seguinte solución: $\left(\frac{m^3-m^2-2m+1}{1-m},\frac{m}{1-m},m(m+1)\right)$; mas esta solución non é válida para o caso $m=1$. Se $m=1$ o sistema é incompatíbel. Para $m=2$, a solución resulta ser $(-1,-2,6)$.

115. $(2y,y,3y)$, $y\in\mathbb{R}$

116. i.O sistema é indeterminado $\Leftrightarrow$ $t=3$ *ou* $t=-\frac{12}{7}$; nestes caso a solución é $(-5z,-2z,z)$, $z\in\mathbb{R}$ para $t=3$ e $(-28z,35z,z)$, $z\in\mathbb{R}$ para $t=-\frac{12}{7}$;

ii. o sistema é indeterminado $\Leftrightarrow$ $t=-1$ e neste caso a solución é: $(0,z,z)$, $z\in\mathbb{R}$.

117. i.O sistema é incompatíbel $\Leftrightarrow$ $k=-\frac{19}{5}$, logo pode resolver-se por Cramer para todo $k\neq-\frac{19}{5}$;

ii. o sistema é sempre compatíbel determinado e polo tanto pode resolver-se por Cramer para todo valor de k .

118. A solución é $\left(-\frac{2c}{7b},\frac{11c}{7a}\right)$ $\forall$ $a\neq 0$ e $b\neq 0$.

119. i. $(3+3y,y,-7y-8)$, $y\in\mathbb{R}$; ii.incompatíbel; iii. $(1,-2,3,-4)$; iv. $(1,2,3,-4)$;

v. $\left(\frac{78}{17},\frac{47}{17},-\frac{27}{17}\right)$; vi. $\left(\frac{1.000\sqrt{2}+346}{90\sqrt{2}+1.050},\frac{45\sqrt{2}+500}{90\sqrt{2}+1.050},-\frac{2.000\sqrt{2}+327}{90\sqrt{2}+1.050}\right)$;

vii. $(x,3x+6t-9r-6,5x+7t-17r+3,t,r)$, $x,t,r\in\mathbb{R}$

120. i.É un sistema incompatíbel; cada ecuación é unha recta no plano XY e as duas primeiras ecuacións son paralelas, polo que a interseción das trés rectas é un conxunto vacio;

ii. é un sistema compatíbel determinado: son trés rectas que se cortan no ponto $P(0,-1)$;

iii. é un sistema incompatíbel e corresponde a trés rectas que se cortan por pares pero non hai nengun ponto de corte común a todas elas.

121. Si é posíbel.

122. Si é posíbel.

123. As trés matrices son de rango 2 .

124. i.Porto é a cidade da que parten mais e Londres é á que chegan mais vóos;

ii. non, precisan-se duas etapas como mínimo;

iii. a matriz $A^2=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ representa as conexións que se poden realizar en duas etapas;

iv. dous avións;

v. pode-se chegar nun mínimo de trés etapas.

125. i. A matriz do sistema é $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 600\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 500\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 200\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 300\end{pmatrix}$ e a solución $(600-t, t-100, 300-t, t)\ \ t\in\mathbb{R}$;

ii. como consecuéncia da solución do sistema, o valor de t ten que estar comprendido entre 100 e 300 veículos/hora;

iii. forma-se un tapón en B.

126. As suas solucións son $(2,0)$ e $(1,1)$, respectivamente. Para interpretar este fenómeno convén representar os dous sistemas (cada ecuación é unha recta e cada solución é o ponto do plano no que se cortan as duas rectas que conforman o sistema).

127. A solución é 138 bois. Indicación: a solución obtén-se trás impor-lle a certo determinante a condición de ser nulo; por que?

128. i.Existe unha única parábola que é $y=x^2-x$;

ii. existen infinidade de posibilidades, todas elas de ecuación $y=ax^2-x+c\ \ /\ \ a+c=1$;

iii. non é posíbel trazar tal parábola.

129. Sempre.