1. A INTEGRAL INDEFINIDA

1.1. DEFINICIÓN DE INTEGRAL INDEFINIDA

Sexan $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ e $F: A \rightarrow \mathbb{R}$ duas funcións definidas nun conxunto $A \subset \mathbb{R}$; di-se que F é unha primitiva de f: $\Leftrightarrow$ $\forall\ x \in A\ \ F'(x)=f(x)$. En outras palabras, F é unha primitiva de f $\Leftrightarrow$ f é a derivada de F.

Se a función F é unha primitiva de f, entón calquer outra función resultado de sumar-lle a F unha constante é tamén unha primitiva de f. Isto permite definir o conceito de integral indefinida dunha función, que se representa da forma $\int f(x)\,dx$, como segue: se F é unha primitiva da función f, entón define-se a integral indefinida de f como o conxunto de todas as primitivas de f, é dicer $\int f(x)\,dx := \{F(x)+C\ /\ C \in \mathbb{R}\}$.

Esta expresión toma, por simplicidade, a forma $\int f(x)\,dx = F(x)+C$, onde C é calquer número real, e di-se que a función f é integrábel no domínio correspondente.

Nesta última expresión, a función $f(x)$ recebe o nome de integrando, $F(x)$ é unha primitiva de f e C é a constante de integración. A expresión dx é o elemento diferencial e o papel que xoga no proceso non corresponde aos obxectivos do curso.

Ex 1 Comprobar se a función $F(x)=x^3-4$ é unha primitiva de $f(x)=3x^2$ e obter a integral indefinida da función f.

A derivada da función $F(x)=x^3-4$ é $F'(x)=3x^2$, que coincide coa función f; polo tanto F é unha primitiva de f.

En realidade, calquer función que se obteña a partir de F sumando unha constante ten tamén por derivada a función f; polo tanto todas as funcións do tipo $F(x)=x^3+C$, onde $C \in \mathbb{R}$, son primitivas de f.

O conxunto de todas estas primitivas de f chama-se integral indefinida de f, e expresa-se da forma:
$\int 3x^2\,dx = x^3+C,\ \ C \in \mathbb{R}$.

1.2. PROPRIEDADES

Dunha forma imediata pode demostrar-se que a integral indefinida ten un comportamento linear, é dicer, conserva a suma de funcións e o produto de funcións por escalares:

i. Se f e g son duas funcións integrábeis nun mesmo domínio, entón a suma de f e g é unha función integrábel e $\int f+g = \int f + \int g$. Esta propriedade pode extender-se desde logo á diferenza: $\int f-g = \int f - \int g$.

ii. Se f é unha función integrábel e $k \in \mathbb{R}$, entón a función $k \cdot f$ é integrábel e $\int k \cdot f = k \cdot \int f$.

Ex 2 Obter a integral indefinida das funcións $f(x)=\cos x - 2x$ e $g(x)=\frac{5}{x}$. Obter no primeiro caso unha primitiva F da función $f(x)=\cos x - 2x$ coa condición de que $F(0)=3$.

Sabemos que a derivada do seno é o coseno, asi que $\int(\cos x - 2x)\,dx = \int \cos x\,dx - \int 2x\,dx = \operatorname{sen} x - x^2 + C$.
Neste caso, a primitiva pedida será da forma $F(x)=\operatorname{sen} x - x^2 + C$; substituíndo obtemos: $F(0)=\operatorname{sen} 0 - 0^2 + C = C$, e como ten que ser $F(0)=3$, resulta $C=3$, asi que a primitiva será $F(x)=\operatorname{sen} x - x^2 + 3$

A función $\ln|x|$ ten derivada $\frac{1}{x}$, polo tanto $\int \frac{5}{x}\,dx = 5 \cdot \int \frac{1}{x}\,dx = 5 \cdot \ln|x| + C$.

Nota: A función $ln|x|$ pode ser expresada como $\begin{cases} ln\,x & se \quad x>0 \\ ln(-x) & se \quad x<0 \end{cases}$ e a sua derivada será $\begin{cases} \dfrac{1}{x} & se \quad x>0 \\ \dfrac{1}{x} & se \quad x<0 \end{cases}$, que coincide coa función $\dfrac{1}{x}$. Como o domínio da función $\dfrac{1}{x}$ é $\mathbb{R}-\{0\}$, a sua integral deberá ter o mesmo domínio, e por iso faremos $\int \dfrac{1}{x}\,dx = ln|x|+C$. Se facemos $\int \dfrac{1}{x}\,dx = ln\,x+C$, obtemos unha integral con domínio $(0,+\infty)$ diferente do domínio da función integrando.

2. Métodos de Integración: Integrais imediatas

Pola definición da integral indefinida, se f é a derivada de F, entón a función F é unha primitiva de f e polo tanto $\int f(x)\,dx = F(x)+C$. Asi, as fórmulas do cálculo de derivadas proporcionan as correspondentes fórmulas para o cálculo de integrais indefinidas. No cadro adxunto as funcións elementares están clasificadas por tipos segundo sexa a integral obtida. Na primeira coluna figuran as integrais imediatas e na segunda aparecen as fórmulas para a composición dunha función u coas mesmas funcións elementares.

Fórmulas de Integración Imediata

i. Tipo potencial [$a \neq -1$]: $\int x^a\,dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1}+C$ $\quad \int u^a \cdot u'\,dx = \dfrac{u^{a+1}}{a+1}+C$

ii. Tipo logarítmico: $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln|x|+C$ $\quad \int \dfrac{u'}{u}\,dx = \ln|u|+C$

iii. Tipo exponencial [$a>0$]: $\int e^x\,dx = e^x+C$ $\quad \int e^u \cdot u'\,dx = e^u+C$

$\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a}+C$ $\quad \int a^u \cdot u'\,dx = \dfrac{a^u}{\ln a}+C$

iv. Tipo seno: $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x+C$ $\quad \int \cos u \cdot u'\,dx = \operatorname{sen} u+C$

v. Tipo coseno: $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x+C$ $\quad \int \operatorname{sen} u \cdot u'\,dx = -\cos u+C$

vi. Tipo tanxente: $\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x+C$ $\quad \int \sec^2 u \cdot u'\,dx = \operatorname{tg} u+C$

$\int (1+\operatorname{tg}^2 x)\,dx = \operatorname{tg} x+C$ $\quad \int (1+\operatorname{tg}^2 u)\cdot u'\,dx = \operatorname{tg} u+C$

$\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x+C$ $\quad \int \dfrac{u'}{\cos^2 u}\,dx = \operatorname{tg} u+C$

vii. Tipo cotanxente: $\int \csc^2 x\,dx = -\operatorname{ctg} x+C$ $\quad \int \csc^2 u \cdot u'\,dx = -\operatorname{ctg} u+C$

$\int (1+\operatorname{ctg}^2 x)\,dx = -\operatorname{ctg} x+C$ $\quad \int (1+\operatorname{ctg}^2 u)\cdot u'\,dx = -\operatorname{ctg} u+C$

$\int \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x+C$ $\quad \int \dfrac{u'}{\operatorname{sen}^2 u}\,dx = -\operatorname{ctg} u+C$

viii. Tipo arco-seno: $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{asen} x+C$ $\quad \int \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\,dx = \operatorname{asen} u+C$

ix. Tipo arco coseno: $\int \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{acos} x+C$ $\quad \int \dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}\,dx = \operatorname{acos} u+C$

x. Tipo arco tanxente: $\int \dfrac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{atg} x+C$ $\quad \int \dfrac{u'}{1+u^2}\,dx = \operatorname{atg} u+C$

$\int \dfrac{1}{x^2+a^2}\,dx = \dfrac{1}{a}\cdot \operatorname{atg}\dfrac{x}{a}+C$ $\quad \int \dfrac{u'}{u^2+a^2}\,dx = \dfrac{1}{a}\cdot \operatorname{atg}\dfrac{u}{a}+C$

xi. Tipo neperiano–arcotanxente: $\int \dfrac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\,dx = neperiano + arco\ tanxente + C$ sempre que $M \neq 0$ e que ax^2+bx+c sexa un polinómio de 2º grau irreducíbel.

Ex 3 Obter a integral indefinida de $f(x)=sen\,x-5x+x^3+2sec^2 x$.

Utilizando as fórmulas de derivación e as propriedades da integral indefinida resulta:

$$\int (sen\,x-5x+x^3+2sec^2 x)\,dx=\int sen\,x\,dx-5\int x\,dx+\int x^3\,dx+2\int sec^2 x\,dx=-cos\,x-\frac{5x^2}{2}+\frac{x^4}{4}+2tg\,x+C$$

Logo calquer primitiva de f será da forma $F(x)=-cos\,x-\frac{5x^2}{2}+\frac{x^4}{4}+2tg\,x+C$; a comprobación consiste en verificar que $F'=f$:

$F'(x)=-(-sen\,x)-\frac{10x}{2}+\frac{4x^3}{4}+2\cdot sec^2 x=sen\,x-5x+x^3+2sec^2 x$; logo $F'=f$, asi que a integral é correcta.

3. A INTEGRAL DEFINIDA

3.1. DEFINICIÓN DE INTEGRAL DEFINIDA

Sexa f unha función definida positiva nun intervalo $[a,b]$, isto é, $f(x)\geqslant 0 \ \forall\ x\in[a,b]$. Nestas circunstáncias é posíbel referir-nos ao recinto delimitado pola gráfica de f, o eixo OX e as abscisas $x=a$ e $x=b$. A área deste recinto denomina-se integral definida da función f no intervalo $[a,b]$, e representa-se por $\int_a^b f(x)\,dx$. Nesta expresión os valores a e b chaman-se límites de integración.

De forma análoga, se f é unha función definida negativa, define-se a integral definida de f no intervalo $[a,b]$ como a área (con signo negativo) delimitada pola gráfica de f, o eixo OX e os extremos a e b do intervalo.

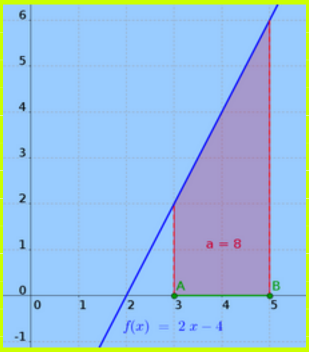
Por último, se f é unha función que toma valores de signo oposto no intervalo $[a,b]$, entende-se por integral definida de f no intervalo $[a,b]$ a suma das integrais definidas de f (cada unha co seu signo correspondente) nos subintervalos nos que a función f é definida positiva ou definida negativa.

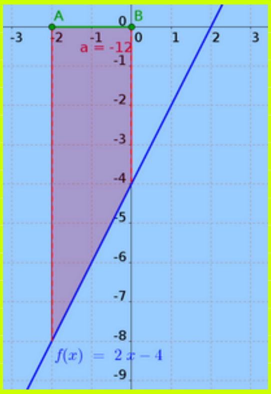
En todos os casos usa-se a mesma expresión $\int_a^b f(x)\,dx$.

Ex 4 Obter as integrais definidas $\int_3^5 (2x-4)\,dx$, $\int_{-2}^0 (2x-4)\,dx$ e $\int_{-2}^3 (2x-4)\,dx$.

A función $f(x)=2x-4$ é unha recta de pendente $m=2$ e ordenada na orixe $b=-4$. As integrais pedidas son as áreas sinaladas mais abaixo. Ao seren polígonos, esas áreas poden calcular-se utilizando as fórmulas da xeometria plana. Nos dous primeiros casos son trapécios, polo que a área será a o produto da base pola semisuma dos segmentos laterais:

$$\int_3^5 (2x-4)\,dx=\frac{1}{2}\cdot(2+6)\cdot 2=8\ u^2 \qquad \int_{-2}^0 (2x-4)\,dx=\frac{1}{2}\cdot(-8-4)\cdot 2=-12\ u^2$$

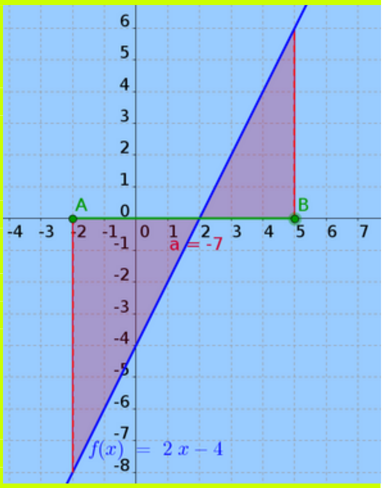




No terceiro caso hai dous triángulos e debemos considerar a área de cada un deles co signo correspondente, positivo se o recinto está no semiplano $y\geqslant 0$ e negativo se está no semiplano $y\leqslant 0$.

O primeiro triángulo ten área $A_1=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot(-8)=-16$ e o segundo $A_2=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 6=9$, logo:

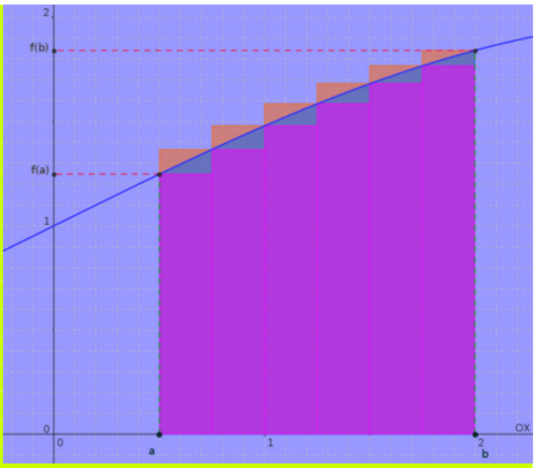
$$\int_{-2}^5 (2x-4)\,dx=A_1+A_2=-16+9=-7\ u^2$$



Nota: a integral definida é unha área, polo que se dispoñemos de métodos simples non temos motivo para utilizar outros mais sofisticados que se explican a continuación. Evidentemente, o cálculo integral é de especial utilidade cando as figuras non son poligonais e precisamos de métodos mais avanzados.

Nota: A obtención da integral definida é un proceso complexo, que comeza coa partición dun intervalo e culmina na definición da Integral de Riemann. O Teorema do Valor Médio do Cálculo Integral e o Teorema Fundamental do Cálculo Integral teñen como consecuéncia a Regra de Barrow, que é o método prático para obter a medida buscada, ou sexa, a área da rexión, cunhas pequenas consideracións sobre o signo da función.

Ex 5 A medida da área baixo a curva obtén-se por aproximación das áreas por defeito e das áreas por exceso. Canto maior sexa o numero de rectángulos en que se divida o intervalo $[a,b]$, maior será a aproximación. Se levamos o proceso ao límite, obtemos a área exacta.



3.2. PROPRIEDADES IMEDIATAS DA INTEGRAL DEFINIDA

As seguintes propriedades derivan-se da definición e son válidas nos intervalos en que as funcións son integrábeis:

i. $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

Nota: no caso de que $a<c<b$ é evidente, mas tamén é válida no caso de que $c \notin (a,b)$.

i. $\int_a^a f = 0$

ii. A permuta dos límites de integración alterna signo da integral definida: $\int_b^a f = -\int_a^b f$

iii. Se f e g son funcións integrábeis no intervalo $[a,b]$, entón $\int_a^b f \pm g = \int_a^b f \pm \int_a^b g$

iv. Se $k \in \mathbb{R}$, entón $\int_a^b k \cdot f = k \cdot \int_a^b f$

Nota: referimo-nos a estas duas últimas propriedades como propriedades lineares da integral definida, que tamén se cumpren no caso das derivadas e da integral indefinida.

3.3. REGRA DE BARROW

A Regra de Barrow proporciona a fórmula para o cálculo da integral definida (área) a partir da integral indefinida (cálculo da primitiva):

<u>Regra de Barrow</u>

Sexa f unha función contínua no intervalo $[a,b]$, e sexa F unha primitiva calquer de f no intervalo $[a,b]$; entón $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Ex 6 Calcular $\int_0^{\pi}(2\,sen\,x-x)\,dx$.

A integral pedida calcula-se a partir da Regra de Barrow obtendo en primeiro lugar unha primitiva calquer da función $f(x)=2\,sen\,x-x$: $\int(2\,sen\,x-x)\,dx=-2\cos x-\frac{x^2}{2}+C$

Como podemos traballar con calquer primitiva, escollemos por comodidade a que ten $C=0$, que é $G(x)=-2\cos x-\frac{x^2}{2}$.

Esta primitiva é a que nos dá a área pedida (integral definida) a través da fórmula de Barrow:

$$\int_0^{\pi}(2\,sen\,x-x)\,dx=G(\pi)-G(0)=\left(-2\cos\pi-\frac{\pi^2}{2}\right)-\left(-2\cos 0-\frac{0^2}{2}\right)=\left(2-\frac{\pi^2}{2}\right)-(-2)=4-\frac{\pi^2}{2}\ u^2$$

Na práctica, este cálculo fai-se de xeito rápido como segue:

$\int_0^{\pi}(2\,sen\,x-x)\,dx \overset{[1]}{=} \left[-2\cos x-\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} \overset{[2]}{=} \left(-2\cos\pi-\frac{\pi^2}{2}\right)-\left(-2\cos 0-\frac{0^2}{2}\right)=\left(2-\frac{\pi^2}{2}\right)-(-2)=4-\frac{\pi^2}{2}\ u^2$, onde o paso [1] representa a obtención da primitiva e o paso [2] corresponde ao cálculo de Barrow.

4. CÁLCULO DE ÁREAS DE RECINTOS PLANOS

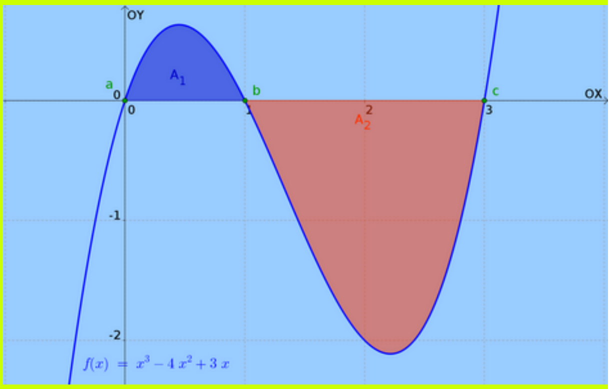
Unha das principais aplicacións do cálculo integral, que está ademais na sua orixe, consiste na medición de áreas de recintos delimitados por curvas, que non é outra cousa que o cálculo da integral definida, ainda que haberá que ter en conta vários casos.

Para unha función f positiva no intervalo $[a,b]$, a área da rexión delimitada pola función neste intervalo é exactamente a definición de integral definida, e polo tanto esta área será $S=\int_a^b f(x)\,dx$.

Mas no caso de que a función sexa negativa nese intervalo, a integral daria como resultado unha cantidade asimesmo negativa, polo que neste caso a área será o valor absoluto desta integral $S=\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$, que tamén se pode expresar, utilizando as propriedades básicas da integral definida, como $S=-\int_a^b f(x)\,dx$ ou incluso $S=\int_b^a f(x)\,dx$.

Finalmente, no caso de que a función tome valores de distinto signo, distinguirán-se os intervalos nos que a función é positiva e aqueles nos que é negativa, para calcular por separado as áreas correspondentes a uns e a outros, e sumar finalmente os seus valores absolutos. Para isto dividiremos o intervalo inicial tendo en conta os pontos de corte co eixo OX e as posíbeis discontinuidades que se produzan no intervalo.

Ex 7 Calcular a área do recinto delimitado pola gráfica da función $f(x)=x^3-4x^2+3x$ e o eixo OX .



Procede-se en primeiro lugar a estudar os pontos de corte co eixo OX para estudar o signo da función:

$x^3-4x^2+3x=0 \Leftrightarrow x\cdot(x-1)\cdot(x-3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=3 \end{cases}$, e como a función é contínua teremos que determinar o signo nos intervalos $(-\infty,0)$, $(0,1)$, $(1,3)$ e $(3,+\infty)$.

$f(-1)=-8<0$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}>0$, $f(2)=-2<0$ e $f(4)=12>0$, asi que $f(x)<0$ en $(-\infty,0)\cup(1,3)$ e $f(x)>0$ en $(0,1)\cup(3,+\infty)$.

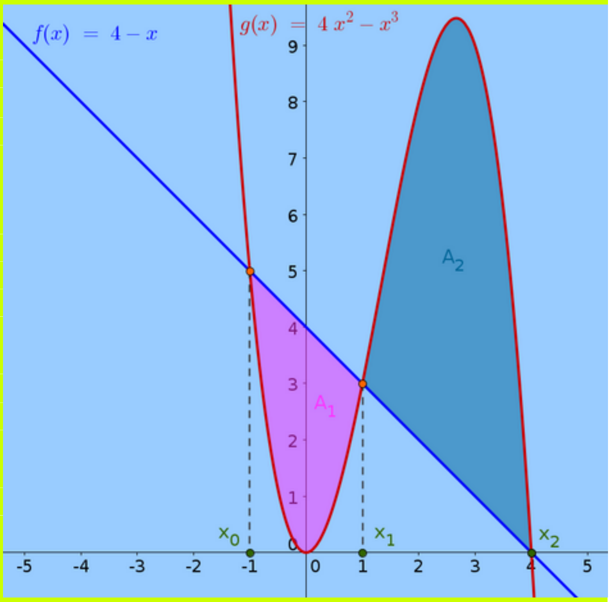
Logo o recinto a medir é o determinado pola función nos intervalos $[0,1]$ e $[1,3]$ e calcula-se:

$$A=A_1+A_2=\int_0^1 (x^3-4x^2+3x)\,dx+\left|\int_1^3 (x^3-4x^2+3x)\,dx\right|=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{4x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_0^1+\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{4x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_1^3\right|=$$

$$=\left(\frac{1}{4}-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}\right)+\left|\left(\frac{81}{4}-\frac{108}{3}+\frac{27}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}\right)\right|=\frac{5}{12}+\left|-\frac{27}{12}-\frac{5}{12}\right|=\frac{5}{12}+\left|-\frac{32}{12}\right|=\frac{5}{12}+\frac{32}{12}=\frac{37}{12}\,u^2$$

Para o cálculo de áreas de rexións delimitadas por duas curvas será necesário obter os pontos de corte entre ambas e integrar a diferenza entre ambas funcións en cada un dos intervalos obtidos, sumando finalmente os valores absolutos de cada unha das integrais.

Ex 8 Calcular a área do recinto plano delimitado polas gráficas das funcións $f(x)=4-x$ e $g(x)=4x^2-x^3$.



Igualando as duas expresións obteñen-se os pontos de corte de ambas gráficas:

$4x^2-x^3=4-x \Leftrightarrow x^3-4x^2-x+4=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+1)\cdot(x-1)\cdot(x-4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \\ x=4 \end{cases}$

Asi que os intervalos de integración son $[-1,1]$ e $[1,4]$.

No intervalo $[-1,1]$ temos $0\in(-1,1)$, $f(0)=4$ e $g(0)=0$, logo pola continuidade das funcións resulta $f(0)>g(0) \Rightarrow f(x)>g(x) \ \forall x\in(-1,1)$

E no intervalo $[1,4]$, $2\in(1,4)$, $f(2)=2$ e $g(2)=8$, asi que: $f(2)<g(2) \Rightarrow f(x)<g(x) \ \forall x\in(1,4)$

Asi, no intervalo $[-1,1]$ calcularemos $A_1=\int_{-1}^{1}(f(x)-g(x))\,dx$ e no intervalo $[1,4]$ $A_2=\int_{1}^{4}(g(x)-f(x))\,dx$, polo que á área será entón:

$$A=A_1+A_2=\int_{-1}^{1}[f(x)-g(x)]\,dx+\int_{1}^{4}[g(x)-f(x)]\,dx=\int_{-1}^{1}(x^3-4x^2-x+4)\,dx+\int_{1}^{4}(-x^3+4x^2+x-4)\,dx=$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{4x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+4x\right]_{-1}^{1}+\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{4x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-4x\right]_{1}^{4}=\frac{1}{12}\left(\left[3x^4-16x^3-6x^2+48x\right]_{-1}^{1}+\left[-3x^4+16x^3+6x^2-48x\right]_{1}^{4}\right)=$$

$$=\frac{1}{12}[(3-16-6+48)-(3+16-6-48)+(-768+1.024+96-192)-(-3+16+6-48)]=$$

$$=\frac{1}{12}[29-(-35)+160-(-29)]=\frac{1}{12}(29+35+160+29)=\frac{253}{12}\ u^2$$