1. A INTEGRAL INDEFINIDA

1.1. DEFINICIÓN DE INTEGRAL INDEFINIDA

Sexan $f: A \to \mathbb{R}$ e $F: A \to \mathbb{R}$ duas funcións definidas nun conxunto $A \subset \mathbb{R}$; di-se que F é unha primitiva de f: $\Leftrightarrow \ \forall\ x \in A \ \ F'(x)=f(x)$.

Se a función F é unha primitiva de f, entón calquer outra función resultado de sumar-lle a F unha constante é tamén unha primitiva de f. Isto permite definir o conceito de integral indefinida dunha función, que se representa da forma $\int f(x)\, dx$, como segue.

Se F é unha primitiva da función f, entón define-se a integral indefinida de f como o conxunto de todas as primitivas de f, é dicer $\int f(x)\, dx := \{F(x)+C \ / \ C \in \mathbb{R}\}$.

Esta expresión toma, por simplicidade, a forma $\int f(x)\, dx = F(x)+C$, onde C é calquer número real, e di-se que a función f é integrábel no domínio correspondente.

Nesta última expresión, a función $f(x)$ recebe o nome de integrando, $F(x)$ é unha primitiva de f e C é a constante de integración. A expresión dx é o elemento diferencial e o papel que xoga no proceso será exposto no seu momento.

Ex 1 Comprobar se a función $F(x)=x^3-4$ é unha primitiva de $f(x)=3x^2$ e obter a integral indefinida da función f.

A derivada da función $F(x)=x^3-4$ é $F'(x)=3x^2$, que coincide coa función f; polo tanto F é unha primitiva de f.

En realidade, calquer función que se obteña a partir de F sumando unha constante ten tamén por derivada a función f; polo tanto todas as funcións do tipo $F(x)=x^3+C$, onde $C \in \mathbb{R}$, son primitivas de f.

O conxunto de todas estas primitivas de f chama-se integral indefinida de f, e expresa-se da forma: $\int 3x^2\, dx = x^3+C,\ C \in \mathbb{R}$.

1.2. PROPRIEDADES

Dunha forma imediata pode demostrar-se que a integral indefinida ten un comportamento linear, é dicer, conserva a suma de funcións e o produto de funcións por escalares:

i. Se f e g son duas funcións integrábeis nun mesmo domínio, entón a suma de f e g é unha función integrábel e $\int f+g = \int f + \int g$. Esta propriedade pode extender-se desde logo á diferenza: $\int f-g = \int f - \int g$.

ii. Se f é unha función integrábel e $k \in \mathbb{R}$, entón a función $k \cdot f$ é integrábel e $\int k \cdot f = k \cdot \int f$.

Ex 2 Obter a integral indefinida das funcións $f(x)=\cos x - 2x$ e $g(x)=\frac{5}{x}$.

Sabemos que a derivada do seno é o coseno, asi que $\int (\cos x - 2x)\, dx = \int \cos x\, dx - \int 2x\, dx = \mathrm{sen}\, x - x^2 + C$.

A función $\ln|x|$ ten derivada $\frac{1}{x}$, polo tanto $\int \frac{5}{x}\, dx = 5 \cdot \int \frac{1}{x}\, dx = 5 \cdot \ln|x| + C$.

Nota: A función $\ln|x|$ pode ser expresada como $\begin{cases} \ln x & se \ \ x>0 \\ \ln(-x) & se \ \ x<0 \end{cases}$ e a sua derivada será $\begin{cases} \frac{1}{x} & se \ \ x>0 \\ \frac{1}{x} & se \ \ x<0 \end{cases}$, que coincide coa función $\frac{1}{x}$. Como o domínio da función $\frac{1}{x}$ é $\mathbb{R}-\{0\}$, a sua integral deberá ter o mesmo domínio, e por iso faremos $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C$. Se facemos $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln x + C$, obtemos unha integral con domínio $(0, +\infty)$ diferente do domínio da función integrando.

2. MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

2.1. CÁLCULO DE INTEGRAIS IMEDIATAS

Pola definición da integral indefinida, se f é a derivada de F, entón a función F é unha primitiva de f e polo tanto $\int f(x)\,dx = F(x)+C$. Asi, as fórmulas do cálculo de derivadas proporcionan as correspondentes fórmulas para o cálculo de integrais indefinidas, tal como aparece no anexo de integrais imediatas.

Ex 3 Obter a integral indefinida de $f(x)=sen\,x-5x+x^3+2sec^2 x$.

Utilizando as fórmulas de derivación e as propriedades da integral indefinida resulta:

$$\int (sen\,x-5x+x^3+2sec^2 x)\,dx = \int sen\,x\,dx - 5\int x\,dx + \int x^3\,dx + 2\int sec^2 x\,dx = -cos\,x - \frac{5x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + 2tg\,x + C$$

Logo calquer primitiva de f será da forma $F(x)=-cos\,x-\frac{5x^2}{2}+\frac{x^4}{4}+2tg\,x+C$; a comprobación consiste en verificar que $F'=f$:

$F'(x)=-(-sen\,x)-\frac{10x}{2}+\frac{4x^3}{4}+2\cdot sec^2 x = sen\,x-5x+x^3+2sec^2 x$; logo $F'=f$, asi que a integral é correcta.

2.2. MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR PARTES

A fórmula de Leibniz permite obter a derivada do produto de duas funcións. Se u e v son duas funcións, a diferencial do produto $u\cdot v$ é $d(u\cdot v)=du\cdot v+u\cdot dv$, e integrando esta expresión obtén-se:

$$d(u\cdot v)=du\cdot v+u\cdot dv \;\Rightarrow\; \int d(u\cdot v)=\int du\cdot v+\int u\cdot dv \;\Rightarrow\; u\cdot v=\int du\cdot v+\int u\cdot dv \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow \int u\cdot dv = u\cdot v - \int du\cdot v$; esta última expresión coñece-se como fórmula da integración por partes.

Nesta fórmula, du e dv denotan as funcións diferenciais de u e v, respectivamente: $du=u'\cdot dx$ e $dv=v'\cdot dx$.

O método de integración por partes utiliza-se normalmente para calcular a integral de funcións que veñen expresadas como un produto de funcións elementares de tipo potencial, exponencial, logarítmico, trigonométrico e trigonométrico inverso. O método consiste en identificar cada un destes factores cos elementos u e dv da fórmula. Unha vez realizada esta identificación procede-se a aplicar a fórmula, de maneira que o resultado que se obtén no segundo membro contén unha integral que há de ser mais fácil de calcular que a integral orixinal.

Para que tal identificación produza realmente unha diminución da dificuldade da integración utiliza-se normalmente o critério que segue. O elemento u da fórmula de integración por partes identificará-se co factor da función integrando segundo a seguinte orde de preferéncia: factor de tipo logarítmico, factor de tipo trigonométrico inverso e factor de tipo potencial ou irracional. No caso de non existir nengún factor de algún dos trés tipos anteriores, a escolla é, en princípio, indiferente. En todo caso, sempre que ao aplicar a fórmula se produza unha integral mais complicada que a inicial, é posíbel realizar a escolla contrária e observar o resultado.

En ocasións será necesário aplicar a fórmula várias veces consecutivas para lograr rebaixar o nível da integral a un tipo mais acesíbel.

Ex 4 Obter as integrais indefinidas i. $\int x^2 \cdot ln\, x\; dx$ e ii. $\int x^2 \cdot sen\, x\; dx$.

i. Identificando $\begin{cases} u = ln\, x \\ dv = x^2\, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}\, dx \\ v = \frac{x^3}{3} \end{cases}$, e aplicando a fórmula obtemos:

$$\int x^2 \cdot ln\, x\; dx = \frac{x^3}{3} \cdot ln\, x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}\, dx = \frac{x^3}{3} \cdot ln\, x - \int \frac{x^2}{3}\, dx = \frac{x^3}{3} \cdot ln\, x - \frac{x^3}{9} + C = \frac{x^3}{3} \cdot \left(ln\, x - \frac{1}{3} \right) + C$$

ii. Identificando $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = sen\, x\; dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2\, x\; dx \\ v = \int sen\, x\; dx = -cos\, x \end{cases}$, e aplicando a fórmula obtemos:

$$\int x^2 \cdot sen\, x\; dx = -x^2 \cdot cos\, x + \int 2\, x \cdot cos\, x\; dx = -x^2 \cdot cos\, x + 2 \int x \cdot cos\, x\; dx \quad [1]$$

Se repetimos o proceso na integral $\int x \cdot cos\, x\; dx$, identificando $\begin{cases} u = x \\ dv = cos\, x\; dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \int cos\, x\; dx = sen\, x \end{cases}$ resulta:

$$\int x \cdot cos\, x\; dx = x \cdot sen\, x - \int sen\, x\; dx = x \cdot sen\, x + cos\, x$$

E volvendo á expresión [1] obtemos:

$$\int x^2 \cdot sen\, x\; dx = -x^2 \cdot cos\, x + 2 \int x \cdot cos\, x\; dx = -x^2 \cdot cos\, x + 2\,(x \cdot sen\, x + cos\, x) + C = -x^2 \cdot cos\, x + 2\, x \cdot sen\, x + 2\, cos\, x + C$$

2.3. INTEGRACIÓN POR CÁMBIO DE VARIÁBEL

Este método consiste en mudar a variábel independente da función por outra, de forma que a función resultante na nova variábel resulte mais cómoda que a inicial. É de uso frecuente na integración de expresións nas que aparecen composicións de funcións, ainda que o maior partido obtén-se en integracións de tipo non imediato.

Asi, para utilizar este método hai que escoller de forma apropriada unha expresión dentro do integrando que pasará a ser a nova variábel independente, asignando-lle un nome a tal expresión. Unha vez identificada esta nova variábel coa expresión que representa, realizan-se os cámbios oportunos no integrando (incluíndo o elemento diferencial dx) para que pase a vir expresado en función da nova variábel. O obxectivo que se persegue é o de lograr unha integral na nova variábel que sexa mais fácil de obter. Calculada por fin a integral da función a respeito da nova variábel, a función obtida há de ser expresada en termos da variábel orixinal; este último proceso chama-se "desfacer o cámbio".

O fundamento do método é que se a función F é unha primitiva da función $(f \circ u) \cdot u'$, entón a función $F \circ u^{-1}$ é unha primitiva de f .

Ex 5 Obter as integrais indefinidas i. $\int x\, e^{1-x^2}\, dx$ e ii. $\int \frac{dx}{1+cos^2 x}$.

i. Facendo o cámbio $t = 1 - x^2$ e diferenciando, obtemos $dt = -2x\, dx \Leftrightarrow x\, dx = -\frac{1}{2}\, dt$, e asi:

$$\int x\, e^{1-x^2}\, dx = \int -\frac{1}{2}\, e^t\, dt = -\frac{1}{2}\, e^t + C = -\frac{1}{2}\, e^{1-x^2} + C$$

ii. Neste caso o cámbio é menos evidente: $t = tg\, x$. Polas fórmulas trigonométricas sabe-se que $sec^2 x = 1 + tg^2 x \Leftrightarrow cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x}$, e como $t = tg\, x$, obtemos $cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x} = \frac{1}{1+t^2}$.

Ademais diferenciando obtemos $dt = sec^2 x\, dx = \left(1 + tg^2 x\right) dx = (1+t^2)\, dx \Leftrightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

Substituíndo na expresión inicial resulta: $\int \frac{dx}{1+cos^2 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot atg\, \frac{t}{\sqrt{2}} + C$

Devolvendo finalmente a expresión á variábel orixinal resulta: $\int \frac{dx}{1+cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot atg\, \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot atg \left(\frac{tg\, x}{\sqrt{2}} \right) + C$.

2.4. INTEGRACIÓN DE FUNCIÓNS RACIONAIS

Para a integración de funcións racionais que non son imediatas utiliza-se o seguinte método. En primeiro lugar, se a función a integrar ten numerador de grau maior ou igual que o denominador, por médio da división euclidiana, obtemos unha nova expresión equivalente á inicial, en forma de suma dun polinómio mais unha función racional na que o numerador é agora de grau inferior ao denominador. Realizado este proceso prévio, se fose necesário, o obxectivo é expresar a fración resultante como suma de várias fracións, de xeito que cada unha delas teña como denominador unha poténcia dun polinómio irreducíbel de primeiro ou segundo grau. Consegue-se asi transformar a integral inicial en suma de várias integrais de tipo logarítmico, potencial e arco-tanxente.

Ex 6 Obter as integrais indefinidas i. $\int \frac{4}{x^2+2x-3}\,dx$, ii. $\int \frac{x^3}{x^2-2x+1}\,dx$ e iii. $\int \frac{x}{x^3-x^2+4x-4}\,dx$.

i. Como o grau do numerador é menor que o do denominador, procedemos directamente a factorizar o denominador, co que obtemos, $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$ e, por ser dous factores de grau 1 e multiplicidade 1 , faremos:

$$\frac{4}{x^2+2x-3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}=\frac{A\cdot(x+3)+B\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x+3)} \Leftrightarrow 4=A\cdot(x+3)+B\cdot(x-1) \quad \forall\, x\in\mathbb{R}$$

Para $x=-3$: $4=-4B \Leftrightarrow B=-1$ e para $x=1$: $4=4A \Leftrightarrow A=1$

Logo $\frac{4}{x^2+2x-3}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3} \Rightarrow \int \frac{4}{x^2+2x-3}\,dx=\int \frac{1}{x-1}\,dx-\int \frac{1}{x+3}\,dx=\ln|x-1|-\ln|x+3|+C=\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+C$

ii. Como o grau do numerador é maior que o do denominador, procedemos á división euclidiana:
$x^3=(x^2-2x+1)\cdot(x+2)+3x-2$, e asi: $\int \frac{x^3}{x^2-2x+1}\,dx=\int (x+2)\,dx+\int \frac{3x-2}{x^2-2x+1}\,dx=\frac{x^2}{2}+2x+\int \frac{3x-2}{x^2-2x+1}\,dx$ [1]

Para calcular $\int \frac{3x-2}{x^2-2x+1}\,dx$ faremos a descomposición factorial do denominador, que resulta $x^2-2x+1=(x-1)^2$, e ao ser un factor de grau 1 e multiplicidade 2 , a fración descomporá-se en:

$$\frac{3x-2}{x^2-2x+1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}=\frac{A\cdot(x-1)+B}{(x-1)^2} \Leftrightarrow 3x-2=A\cdot(x-1)+B \quad \forall\, x\in\mathbb{R}$$

Para $x=1$ obtemos: $1=B$
Para $x=0$ obtemos: $-2=-A+B \Rightarrow A=2+B=3$

Logo esta integral será $\int \frac{3x-2}{x^2-2x+1}\,dx=\int \frac{3}{x-1}\,dx+\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx=3\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C$.

Volvendo á expresión [1] obtemos: $\int \frac{x^3}{x^2-2x+1}\,dx=\frac{x^2}{2}+2x+\int \frac{3x-2}{x^2-2x+1}\,dx=\frac{x^2}{2}+2x+3\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C$.

iii. O grau do numerador é menor que o do denominador, logo omitimos a división euclidiana dos polinómios. Factorizando o denominador resulta: $x^3-x^2+4x-4=(x-1)\cdot(x^2+4)$.

Ao resultar dous factores irreducíbeis de grau 1 e 2 , ambos con multiplicidade 1 , descomporemos a fración en:

$$\frac{x}{x^3-x^2+4x-4}=\frac{A}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+4}=\frac{A\cdot(x^2+4)+(Mx+N)\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x^2+4)} \Leftrightarrow x=A\cdot(x^2+4)+(Mx+N)\cdot(x-1) \quad \forall\, x\in\mathbb{R}$$

Para $x=1$ obtemos: $1=5A \Leftrightarrow A=\frac{1}{5}$

Para $x=0$ obtemos: $0=4A-N \Rightarrow N=4A=\frac{4}{5}$

Para $x=-1$ obtemos: $-1=5A+2M-2N \Rightarrow M=\frac{-1-5A+2N}{2}=\frac{-1-\frac{5}{5}+\frac{8}{5}}{2}=-\frac{1}{5}$

Logo esta integral será $\int \frac{x}{x^3-x^2+4x-4}dx=\int \frac{\frac{1}{5}}{x-1}dx+\int \frac{-\frac{1}{5}x+\frac{4}{5}}{x^2+4}dx=\frac{1}{5}\int \frac{1}{x-1}dx-\frac{1}{5}\int \frac{x-4}{x^2+4}dx$ [1]

A primeira integral desta suma é do tipo logarítmico: $\int \frac{1}{x-1}dx=\int \frac{1}{x-1}dx=ln|x-1|$

A segunda é do tipo neperiano-arcotanxente: $\int \frac{x-4}{x^2+4}dx$. Para resolvé-la imos transformar o numerador de xeito que se poda expresar a fración en suma de duas: nunha delas o numerador será a derivada do denominador (tipo neperiano) e na segunda o numerador será unha constante (tipo arcotanxente):

$$\int \frac{x-4}{x^2+4}dx=\frac{1}{2}\int \frac{2\cdot(x-4)}{x^2+4}dx=\frac{1}{2}\int \frac{2x-8}{x^2+4}dx=\frac{1}{2}\left(\int \frac{2x}{x^2+4}dx-\int \frac{8}{x^2+4}dx\right) \quad [2]$$

Operando dentro da paréntese, a primeira integral é imediata (tipo neperiano): $\int \frac{2x}{x^2+4}dx=ln(x^2+4)$ [3]

E a segunda é tamén imediata do tipo arcotanxente: $\int \frac{8}{x^2+4}dx=8\int \frac{1}{x^2+4}dx=8\cdot\frac{1}{2}\cdot atg\frac{x}{2}=4\,atg\frac{x}{2}$ [4]

Incorporando as integrais [3] e [4] na expresión [2], obtemos:

$$\int \frac{x-4}{x^2+4}dx=\frac{1}{2}\left(\int \frac{2x}{x^2+4}dx-\int \frac{8}{x^2+4}dx\right)=\frac{1}{2}\left(ln(x^2+4)-4\,atg\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}ln(x^2+4)-2\,atg\frac{x}{2}$$

E volvendo á expresión [1] obtemos finalmente a integral pedida:

$$\int \frac{x}{x^3-x^2+4x-4}dx=\frac{1}{5}\int \frac{1}{x-1}dx-\frac{1}{5}\int \frac{x-4}{x^2+4}dx=\frac{1}{5}ln|x-1|-\frac{1}{10}ln(x^2+4)+\frac{2}{5}atg\frac{x}{2}+C$$

3. A INTEGRAL DEFINIDA

3.1. DEFINICIÓN DE INTEGRAL DEFINIDA

Sexa f unha función definida positiva nun intervalo $[a,b]$, é dicer, $f(x)\geqslant 0 \quad \forall\, x\in[a,b]$. Nestas circunstáncias é posíbel referir-nos ao recinto delimitado pola gráfica de f, o eixo OX e as abscisas $x=a$ e $x=b$. A área deste recinto denomina-se integral definida da función f no intervalo $[a,b]$, e representa-se por $\int_a^b f(x)\,dx$. Nesta expresión os valores a e b chaman-se límites de integración.

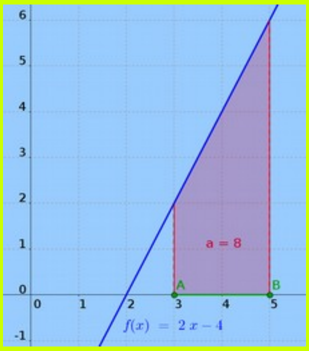
De forma análoga, se f é unha función definida negativa, define-se a integral definida de f no intervalo $[a,b]$ como a área (con signo negativo) delimitada pola gráfica de f, o eixo OX e os extremos a e b do intervalo. Por último, se f é unha función que toma valores de signo oposto no intervalo $[a,b]$, entende-se por integral definida de f no intervalo $[a,b]$ a suma das integrais definidas de f (cada unha co seu signo correspondente) nos subintervalos nos que a función f é definida positiva ou definida negativa. En todos os casos a expresión coa que se representa esta área é $\int_a^b f(x)\,dx$.

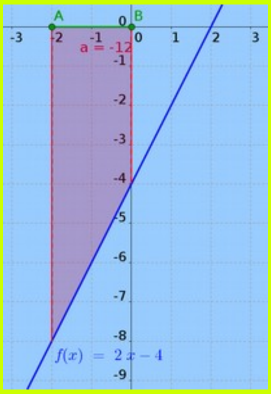
Ex 7 Obter as integrais definidas $\int_3^5 (2x-4)\,dx$, $\int_{-2}^0 (2x-4)\,dx$ e $\int_{-2}^3 (2x-4)\,dx$.

A función $f(x)=2x-4$ é unha recta de pendente $m=2$ e ordenada na orixe $b=-4$. As integrais pedidas son as áreas sinaladas mais abaixo. Ao seren polígonos, esas áreas poden calcular-se utilizando as fórmulas da xeometria plana. Nos dous primeiros casos son trapécios, polo que a área será a o produto da base pola semisuma dos segmentos laterais:

$$\int_3^5 (2x-4)\,dx=\frac{1}{2}\cdot(2+6)\cdot 2=8\ u^2$$

$$\int_{-2}^0 (2x-4)\,dx=\frac{1}{2}\cdot(-8-4)\cdot 2=-12\ u^2$$

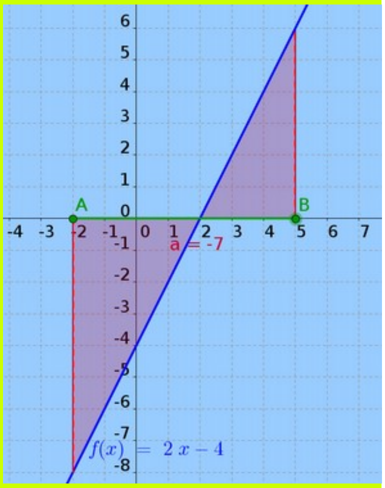




No terceiro caso hai dous triángulos e debemos considerar a área de cada un deles co signo correspondente, positivo se o recinto está no semiplano $y\geqslant 0$ e negativo se está no semiplano $y\leqslant 0$.

O primeiro triángulo ten área $A_1=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot(-8)=-16$ e o segundo $A_2=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 6=9$, logo:

$$\int_{-2}^5 (2x-4)\,dx=A_1+A_2=-16+9=-7\ u^2$$



A obtención da integral definida é un proceso complexo, que comeza coa definición de partición dun intervalo e culmina na definición da Integral de Riemann. Tal proceso deseña-se inicialmente para unha función contínua e positiva no intervalo $[a,b]$, e finalmente extende-se de forma natural a funcións non positivas e incluso non contínuas.

Chama-se partición dun intervalo $[a,b]$ a todo conxunto finito $P=\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$. Asi, unha partición representa unha división dun intervalo nunha cantidade finita de subintervalos.

Dada unha función contínua e positiva en $[a,b]$, polo Teorema de Weierstrass, a función alcanza un máximo e un mínimo en cada subintervalo determinado pola partición P. Se identificamos estes extremos da forma M_k para os máximos en cada subintervalo e m_k para os mínimos, definen-se as sumas inferior e superior de Riemann da función f no intervalo $[a,b]$ da seguinte forma:

i. suma inferior de Riemann: $L(f,P) := \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot (x_k - x_{k-1})$;

ii. suma superior de Riemann: $U(f,P) := \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot (x_k - x_{k-1})$.

Pode demostrar-se que estas duas sumas de Riemann representan cotas inferior e superior, respectivamente, da área que estamos a calcular, é dicer, da integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$: $L(f,P) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant U(f,P)$.

Di-se que unha función f , contínua e positiva no intervalo $[a,b]$ é Riemann-integrábel $:\Leftrightarrow\ sup\{L(f,P)\} = inf\{U(f,P)\}$. Neste caso, define-se a integral de Riemann de f no intervalo $[a,b]$ como $sup\{L(f,P)\}$, ou ben, $inf\{U(f,P)\}$, tendo en consideración que estas duas cantidades coinciden para unha función Riemann-integrábel.

Por fin, o problema orixinal da obtención da área $\int_a^b f(x)\,dx$ para funcións contínuas e positivas no intervalo $[a,b]$ reduce-se á obtención da integral de Riemann, que en diante chamaremos simplesmente integral definida de f en $[a,b]$. Como xá se dixo anteriormente, este proceso extende-se sen dificuldade ao caso de funcións non positivas e incluso a funcións non contínuas.

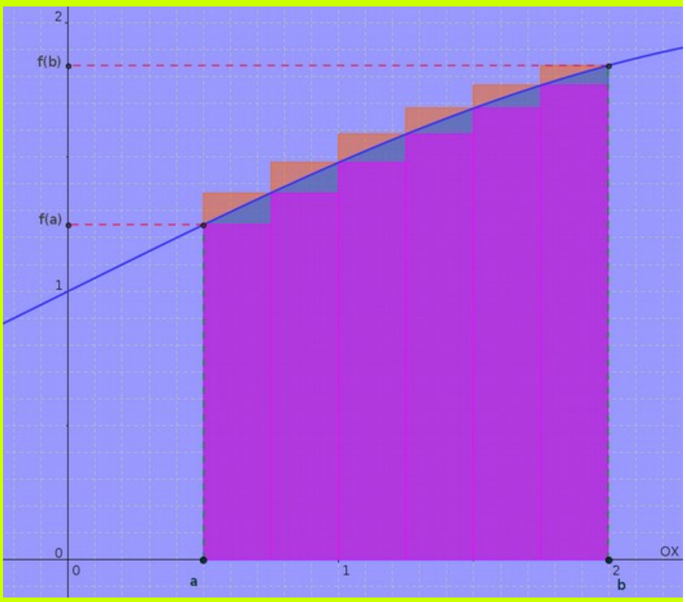
Ex 8 As sumas inferior e superior de Riemann converxen á integral definida cando a partición se fai extremadamente fina.

O intervalo $[a,b]$ ten unha partición P formada por seis subintervalos. A área en cor rosa representa a suma inferior $L(f,P)$.

Esta área recubre parcialmente a área $\int_a^b f(x)\,dx$, representada en azul, e esta última recubre á sua vez á área en cor salmón, que se corresponde coa suma superior $U(f,P)$.

Resulta evidente que $L(f,P) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant U(f,P)$, e que cando se afina a partición P , estas trés áreas tenden a coincidir no valor da integral $\int_a^b f(x)\,dx$.

No caso dunha partición extremadamente fina, os rectángulos teñen base dx e altura $f(x)$; logo a área de cada un deles será $f(x)\cdot dx$. Asi a integral $\int_a^b f(x)\,dx$ representa a suma das áreas dos infinitos rectángulos que recubren a rexión.



3.2. PROPRIEDADES IMEDIATAS DA INTEGRAL DEFINIDA

As seguintes propriedades derivan-se da definición e son válidas nos intervalos en que as funcións son integrábeis:

i. $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ (Nota: no caso de que $a<c<b$ é evidente, aínda que tamén é válida a propriedade no caso de que $c \notin (a,b)$.)

ii. $\int_a^a f = 0$

iii. a permuta dos límites de integración alterna signo da integral definida: $\int_b^a f = -\int_a^b f$

iv. se f e g son funcións integrábeis no intervalo $[a,b]$, entón $\int_a^b f \pm g = \int_a^b f \pm \int_a^b g$

v. se $k \in \mathbb{R}$, entón $\int_a^b k \cdot f = k \cdot \int_a^b f$

Nota: referimo-nos a estas duas últimas propriedades como propriedades lineares da integral definida, que tamén se cumpren no caso das derivadas e da integral indefinida.

3.3. TEOREMA DO VALOR MÉDIO DO CÁLCULO INTEGRAL

Teorema do Valor Médio do Cálculo Integral

Sexa f unha función contínua en $[a,b]$, entón $\exists\, c \in [a,b] \;/\; \int_a^b f(x)\,dx = (b-a) \cdot f(c)$.

Demostración

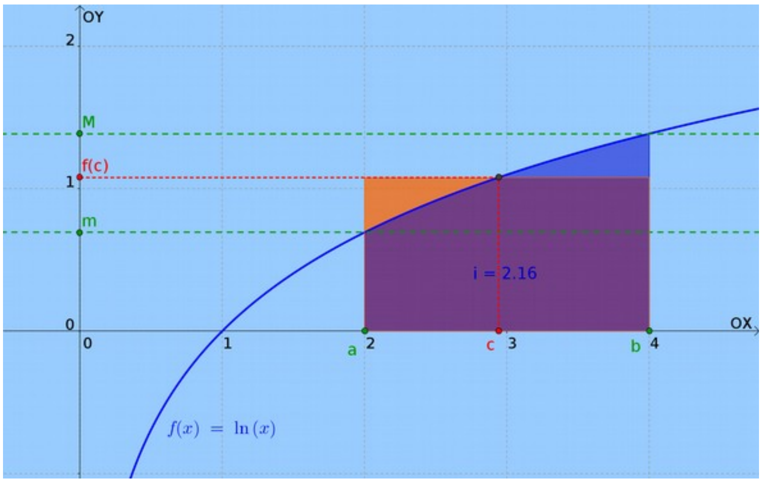
Se f é unha función contínua en $[a,b]$, o Teorema de Weierstrass asegura que f alcanza neste intervalo un valor máximo e un valor mínimo. Chamaremos M e m, respectivamente, a estes extremos absolutos de f no intervalo $[a,b]$. É imediato que se cumpre a seguinte desigualdade: $(b-a) \cdot m \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant (b-a) \cdot M$.

Dividindo os trés termos desta desigualdade entre a expresión $(b-a)$ resulta $m \leqslant \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M$.

Ademais, polo Teorema de Darboux, por ser unha función contínua, f alcanza todos os valores entre o máximo M e o mínimo m, polo tanto: $\exists\, c \in [a,b] \;/\; f(c) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx$, o que implica que $\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \cdot (b-a)$ q.e.d.

Interpretación xeométrica

A integral definida no intervalo fechado $[a,b]$ é a área delimitada pola curva nese intervalo. É posíbel determinar un rectángulo que teña como base o mesmo intervalo $[a,b]$ e área igual ao valor da integral definida. É evidente que tal rectángulo deberá ter unha altura comprendida entre os valores mínimo e máximo que alcanza a función nese intervalo.



Ex 9 Calcular o punto ao que se refire o TVMCI para a función $f(x)=x^2+3x$ no intervalo $[1,4]$.

A integral é $\int_1^4 (x^2+3x)\,dx \overset{[1]}{=} \left[\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_1^4 = \left(\frac{4^3}{3}+\frac{3\cdot 4^2}{2}\right)-\left(\frac{1^3}{3}+\frac{3\cdot 1^2}{2}\right)=\frac{64}{3}+24-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}=\frac{87}{2}$.

[1] O proceso para obter esta integral require da Regra de Barrow, que se expón mais adiante (ver o exemplo 11).

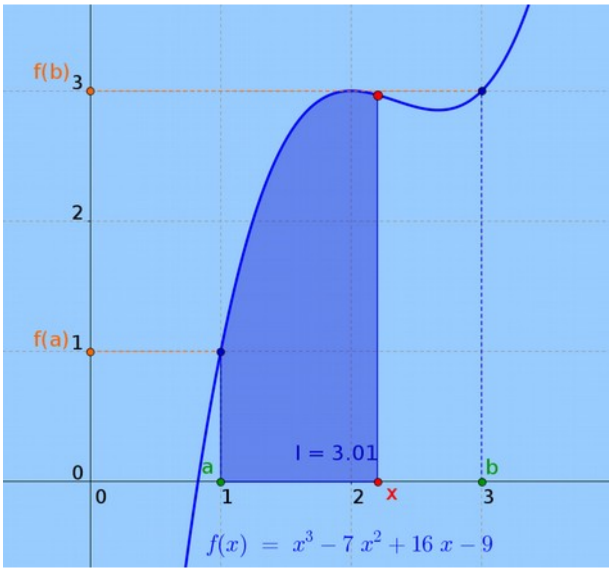
O teorema afirma que $\exists\, c\in[1,4]\ /\ \int_1^4 f(x)\,dx=f(c)\cdot(4-1)=3\cdot f(c)$, logo será: $\frac{87}{2}=3\cdot f(c) \Leftrightarrow f(c)=\frac{87}{6}=\frac{29}{2}$

O valor de c obteremo-lo resolvendo a ecuación:
$$x^2+3x=\frac{29}{2} \Leftrightarrow 2x^2+6x-29=0 \Leftrightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot 2\cdot(-29)}}{4}=\frac{-6\pm\sqrt{36+232}}{4}=\frac{-6\pm\sqrt{268}}{4}=\frac{-3\pm\sqrt{67}}{2}$$

Dos dous valores posíbeis admitimos a solución $c=\frac{-3+\sqrt{67}}{2}\approx 2{,}59\in[1,4]$, xá que a outra posibilidade fica fóra do intervalo.

3.4. TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO INTEGRAL

Teorema Fundamental do Cálculo Integral



Sexa f unha función contínua no intervalo $[a,b]$, sexa $x\in[a,b]$; entón a función $F(x):=\int_a^x f(t)\,dt$ (chamada función integral de f no intervalo $[a,b]$) é unha función derivábel en $[a,b]$ e ademais a sua derivada é a función f: $F'(x)=f(x)\ \forall\, x\in[a,b]$.

Antes de pasar á demostración do teorema convén destacar que a función integral definida no enunciado representa a área determinada pola gráfica de f no intervalo $[a,x]$. É polo tanto unha función que toma valor 0 para $x=a$, e para $x=b$ toma o valor da integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$. Á vista disto, o teorema afirma que esta función é unha primitiva de f, ou equivalentemente, que a derivada da función integral F é a función f.

Este teorema dá solución ao problema de obter a integral definida (o cálculo de áreas) poñendo-o en relación coa técnica do cálculo de primitivas (integral indefinida).

Demostración

Define-se a función integral como $F(x):=\int_a^x f(t)\,dt$, e utilizando a definición de derivada obtén-se: $F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}$.

Polo Teorema do Valor Médio do Cálculo Integral para a función f no intervalo $[x,x+h]$ sabemos que $\exists\, c\in[x,x+h]\ /\ \int_x^{x+h} f(t)\,dt=f(c)\cdot(x+h-x)=f(c)\cdot h$.

Logo $F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(c)\cdot h}{h}=\lim_{h\to 0} f(c)=f(x)$ q.e.d.

Ex 10 Dada a función $F(x)=\int_1^x (t^2-4)\,dt$, calcular $F(1)$, $F'(1)$ e $F'(x)$.

A función $F(x)=\int_1^x (t^2-4)\,dt$ é a función integral de $f(x)=x^2-4$, logo polo Teorema Fundamental, $F'(x)=f(x)=x^2-4$.

Asi temos $F(1)=\int_1^1 (t^2-4)\,dt=0$, pola própria definición da integral definida, e $F'(x)=x^2-4$ polo teorema. En particular $F'(1)=1^2-4=-3$

3.5. REGRA DE BARROW

Como consecuéncia da relación estabelecida polo Teorema Fundamental entre a integral definida e a integral indefinida, a Regra de Barrow proporciona a fórmula para o cálculo da integral definida (área) a partir da integral indefinida (cálculo da primitiva):

Regra de Barrow

Sexa f unha función contínua no intervalo $[a,b]$, e sexa G unha primitiva calquer de f no intervalo $[a,b]$; entón $\int_a^b f(x)\,dx=G(b)-G(a)$.

Demostración

Polo Teorema Fundamental sabe-se que a función integral $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ é unha primitiva de f no intervalo $[a,b]$. Xá que a función G é tamén unha primitiva de f , as funcións F e G distinguen-se nunha constante: $F(x)=G(x)+C$, con $C\in\mathbb{R}$. Para $x=a$ temos que $F(a)=G(a)+C=0 \Leftrightarrow C=-G(a)$. E para $x=b$ temos que $F(b)=\int_a^b f(t)\,dt$, que é o valor da integral definida no intervalo $[a,b]$. E asi resulta que $F(b)=G(b)+C=G(b)-G(a)$ e polo tanto finalmente $\int_a^b f(x)\,dx=G(b)-G(a)$ q.e.d.

Ex 11 Calcular $\int_0^\pi (2\,\mathrm{sen}\,x-x)\,dx$.

A integral pedida calcula-se a partir da Regra de Barrow obtendo en primeiro lugar unha primitiva calquer da función $f(x)=2\,\mathrm{sen}\,x-x$: $\int (2\,\mathrm{sen}\,x-x)\,dx=-2\cos x-\frac{x^2}{2}+C$

Como podemos traballar con calquer primitiva, escollemos por comodidade a que ten $C=0$, que é $G(x)=-2\cos x-\frac{x^2}{2}$.

Esta primitiva é a que nos dá a área pedida (integral definida) a través da fórmula de Barrow:

$$\int_0^\pi (2\,\mathrm{sen}\,x-x)\,dx=G(\pi)-G(0)=\left(-2\cos\pi-\frac{\pi^2}{2}\right)-\left(-2\cos 0-\frac{0^2}{2}\right)=\left(2-\frac{\pi^2}{2}\right)-(-2)=4-\frac{\pi^2}{2}\ u^2$$

Na prática, este cálculo fai-se de xeito rápido como segue:

$$\int_0^\pi (2\,\mathrm{sen}\,x-x)\,dx \overset{[1]}{=} \left[-2\cos x-\frac{x^2}{2}\right]_0^\pi \overset{[2]}{=} \left(-2\cos\pi-\frac{\pi^2}{2}\right)-\left(-2\cos 0-\frac{0^2}{2}\right)=\left(2-\frac{\pi^2}{2}\right)-(-2)=4-\frac{\pi^2}{2}\ u^2$$

, onde o paso [1] representa a obtención da primitiva e o paso [2] corresponde ao cálculo de Barrow.

4. CÁLCULO DE ÁREAS E VOLUMES

4.1. CÁLCULO DE ÁREAS DE RECINTOS PLANOS

Unha das principais aplicacións, que está ademais na orixe do cálculo integral, consiste na medición de áreas de recintos delimitados por curvas, que non é outra cousa que o cálculo da integral definida, ainda que haberá que ter en conta vários casos.

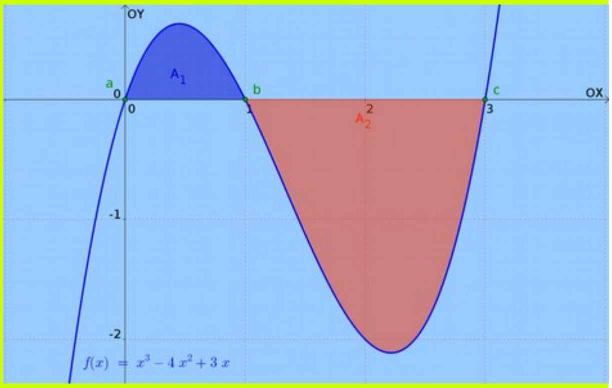
Para unha función f positiva no intervalo $[a,b]$, a área da rexión delimitada pola función neste intervalo é exactamente a definición de integral definida, e polo tanto esta área será $S=\int_a^b f(x)\,dx$.

Mas no caso de que a función sexa negativa nese intervalo, a integral daria como resultado unha cantidade asimesmo negativa, polo que neste caso a área será o valor absoluto desta integral $S=\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$, que tamén se pode expresar, utilizando as propriedades básicas da integral definida, como $S=-\int_a^b f(x)\,dx$ ou incluso $S=\int_b^a f(x)\,dx$.

Finalmente, no caso de que a función tome valores de distinto signo, distinguirán-se os intervalos nos que a función é positiva e aqueles nos que é negativa, para calcular por separado as áreas correspondentes a uns e a outros, en valor absoluto, e sumar finalmente. Para isto dividiremos o intervalo inicial tendo en conta os pontos de corte co eixo OX e as posíbeis discontinuidades que se produzan no intervalo.

Ex 11 Calcular a área do recinto delimitado pola gráfica da función $f(x)=x^3-4x^2+3x$ e o eixo OX .

Procede-se en primeiro lugar a estudar os pontos de corte co eixo OX para estudar o signo da función:



$x^3-4x^2+3x=0 \Leftrightarrow x\cdot(x-1)\cdot(x-3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=3 \end{cases}$, e como a función é contínua teremos que determinar o signo nos intervalos $(-\infty,0)$, $(0,1)$, $(1,3)$ e $(3,+\infty)$.

$f(-1)=-8<0$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}>0$, $f(2)=-2<0$ e $f(4)=12>0$, asi que $f(x)<0$ en $(-\infty,0)\cup(1,3)$ e $f(x)>0$ en $(0,1)\cup(3,+\infty)$.

Logo o recinto a medir é o determinado pola función nos intervalos $[0,1]$ e $[1,3]$ e calcula-se:

$$A=A_1+A_2=\int_0^1(x^3-4x^2+3x)dx+\left|\int_1^3(x^3-4x^2+3x)dx\right|=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{4x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_0^1+\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{4x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_1^3\right|=$$

$$=\left(\frac{1}{4}-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}\right)+\left|\left(\frac{81}{4}-\frac{108}{3}+\frac{27}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}\right)\right|=\frac{5}{12}+\left|-\frac{27}{12}-\frac{5}{12}\right|=\frac{5}{12}+\left|-\frac{32}{12}\right|=\frac{5}{12}+\frac{32}{12}=\frac{37}{12}\,u^2$$

Ex 12 Calcular a área do recinto plano delimitado polas gráficas das funcións $f(x)=4-x$ e $g(x)=4x^2-x^3$.

Igualando as duas expresións obteñen-se os pontos de corte de ambas gráficas:

$$4x^2-x^3=4-x \Leftrightarrow x^3-4x^2-x+4=0 \Leftrightarrow$$

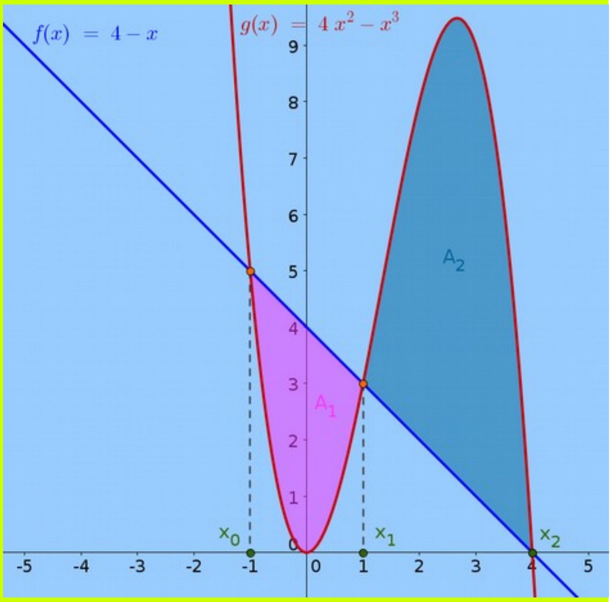
$$\Leftrightarrow (x+1)\cdot(x-1)\cdot(x-4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \\ x=4 \end{cases}$$

Asi que os intervalos de integración son $[-1,1]$ e $[1,4]$.

No intervalo $[-1,1]$ temos $0\in(-1,1)$, $f(0)=4$ e $g(0)=0$, logo pola continuidade das funcións resulta $f(0)>g(0) \Rightarrow f(x)>g(x) \;\; \forall x\in(-1,1)$

E no intervalo $[1,4]$, $2\in(1,4)$, $f(2)=2$ e $g(2)=8$, asi que: $f(2)<g(2) \Rightarrow f(x)<g(x) \;\; \forall x\in(1,4)$

Asi, no intervalo $[-1,1]$ calcularemos $A_1=\int_{-1}^{1}(f(x)-g(x))\,dx$ e no intervalo $[1,4]$ $A_2=\int_{1}^{4}(g(x)-f(x))\,dx$, polo que á área será entón:



$$A=A_1+A_2=\int_{-1}^{1}[f(x)-g(x)]\,dx+\int_{1}^{4}[g(x)-f(x)]\,dx=\int_{-1}^{1}(x^3-4x^2-x+4)\,dx+\int_{1}^{4}(-x^3+4x^2+x-4)\,dx=$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{4x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+4x\right]_{-1}^{1}+\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{4x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-4x\right]_{1}^{4}=\frac{1}{12}\left(\left[3x^4-16x^3-6x^2+48x\right]_{-1}^{1}+\left[-3x^4+16x^3+6x^2-48x\right]_{1}^{4}\right)=$$

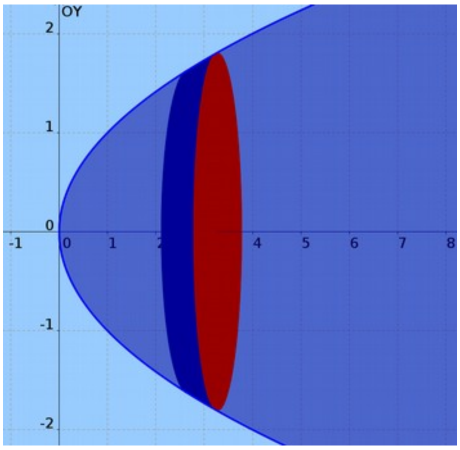
$$=\frac{1}{12}[(3-16-6+48)-(3+16-6-48)+(-768+1.024+96-192)-(-3+16+6-48)]=$$

$$=\frac{1}{12}[29-(-35)+160-(-29)]=\frac{1}{12}(29+35+160+29)=\frac{253}{12}\,u^2$$

4.2. CÁLCULO DE SUPERFÍCIES E VOLUMES DE CORPOS DE REVOLUCIÓN

Outra das aplicacións do cálculo integral é a de medir as superfícies laterais e os volumes de corpos obtidos por xiro dunha curva arredor dun eixo.

De xeito resumido, unha función f definida nun intervalo $[a,b]$ é unha curva finita que ao xirar arredor do eixo OX descrebe un corpo, chamado corpo de revolución. A forma de obter a superfície lateral e o volume deste corpo consiste en “cortá-lo” ao longo do eixo OX en infinitos discos de espesor infinitesimal, igual que facemos con un chourizo ao pasá-lo pola cortadora de fiambre. Cada un destes discos infinitesimais ten as seguintes dimensións: o raio é $f(x)$ e a sección é dx . Asi, o volume de cada disco é $dV=\pi\cdot[f(x)]^2\,dx$ e a sua superfície lateral é $dS=2\pi\cdot f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$.



O corpo reconstrue-se "pegando" todos os discos, polo que o volume e a área lateral obteñen-se integrando as expresións anteriores no intervalo $[a,b]$:

- volume: $V=\int_a^b \pi\cdot[f(x)]^2\,dx$
- área lateral: $S=\int_a^b 2\pi\cdot f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$

5. ANEXO: FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN IMEDIATA

Nesta relación aparecen as primitivas das principais funcións elementares clasificadas por tipos (1ª coluna) e as fórmulas correspondentes á composición de calquer función u coas funcións elementares (2ª coluna).

i. Tipo potencial [$a \neq -1$]: $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$ $\quad$ $\int u^a \cdot u' \, dx = \frac{u^{a+1}}{a+1} + C$

ii. Tipo logarítmico: $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ $\quad$ $\int \frac{u'}{u} dx = \ln|u| + C$

iii. Tipo exponencial [$a > 0$]: $\int e^x dx = e^x + C$ $\quad$ $\int e^u \cdot u' \, dx = e^u + C$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $\quad$ $\int a^u \cdot u' \, dx = \frac{a^u}{\ln a} + C$

iv. Tipo seno: $\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C$ $\quad$ $\int \cos u \cdot u' \, dx = \operatorname{sen} u + C$

v. Tipo coseno: $\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C$ $\quad$ $\int \operatorname{sen} u \cdot u' \, dx = -\cos u + C$

vi. Tipo tanxente: $\int \sec^2 x \, dx = tg\, x + C$ $\quad$ $\int \sec^2 u \cdot u' \, dx = tg\, u + C$

$\int (1 + tg^2 x) dx = tg\, x + C$ $\quad$ $\int (1 + tg^2 u) \cdot u' \, dx = tg\, u + C$

$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tg\, x + C$ $\quad$ $\int \frac{u'}{\cos^2 u} dx = tg\, u + C$

vii. Tipo cotanxente: $\int \csc^2 x \, dx = -ctg\, x + C$ $\quad$ $\int \csc^2 u \cdot u' \, dx = -ctg\, u + C$

$\int (1 + ctg^2 x) dx = -ctg\, x + C$ $\quad$ $\int (1 + ctg^2 u) \cdot u' \, dx = -ctg\, u + C$

$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = -ctg\, x + C$ $\quad$ $\int \frac{u'}{\operatorname{sen}^2 u} dx = -ctg\, u + C$

viii. Tipo arco-seno: $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = asen\, x + C$ $\quad$ $\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = asen\, u + C$

ix. Tipo arco coseno: $\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = acos\, x + C$ $\quad$ $\int \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = acos\, u + C$

x. Tipo arco tanxente: $\int \frac{1}{1+x^2} dx = atg\, x + C$ $\quad$ $\int \frac{u'}{1+u^2} dx = atg\, u + C$

$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \cdot atg \frac{x}{a} + C$ $\quad$ $\int \frac{u'}{u^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \cdot atg \frac{u}{a} + C$

xi. Tipo neperiano–arcotanxente: $\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c} dx = neperiano + arco\ tanxente + C$ sempre que $M \neq 0$ e que ax^2+bx+c sexa un polinómio de 2º grau irreducíbel.

1. A INTEGRAL INDEFINIDA

1. Calcular as seguintes integrais de tipo imediato:

i. $\int \frac{2}{x} dx$

ii. $\int \frac{e^x}{2} dx$

iii. $\int \frac{1}{x^3} dx$

iv. $\int \frac{3}{x+1} dx$

v. $\int \frac{1}{2+2x^2} dx$

vi. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

vii. $\int \sqrt[3]{x}\, dx$

viii. $\int \frac{5x^2+3x-6}{x^2} dx$

ix. $\int \frac{1}{\sqrt[6]{x^5}} dx$

x. $\int \frac{e^{4x}+3e^{3x}}{e^{3x}} dx$

xi. $\int (e^x - e^{-x}) dx$

xii. $\int \left(\frac{3}{x-2} + 5x - \frac{1}{2x+2}\right) dx$

2. Calcular polo método de substitución:

i. $\int cos(5x) dx$

ii. $\int \frac{1}{2x-3} dx$

iii. $\int 3e^{4x} dx$

iv. $\int \sqrt{3x-5}\, dx$

v. $\int \frac{3x^2+2}{x^3+2x} dx$

vi. $\int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$

vii. $\int \frac{x+1}{3x^2+6x+2} dx$

viii. $\int sen\, x \cdot cos\, x\; dx$

ix. $\int sen(3x+4)\; dx$

x. $\int sen\, x \cdot cos^2 x\; dx$

xi. $\int x \cdot e^{x^2}\; dx$

xii. $\int \frac{1}{cos^2(5x)} dx$

xiii. $\int x \cdot sen(x^2+4)\; dx$

xiv. $\int e^x \cdot sen(e^x)\; dx$

xv. $\int \frac{sen\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

xvi. $\int \frac{asen\, x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

xvii. $\int (x-1)\cdot\sqrt[3]{x^2-2x}\; dx$

xviii. $\int \frac{ln\, x}{x} dx$

xix. $\int \frac{1+2x}{\sqrt{x+x^2}} dx$

xx. $\int \frac{cos\, x}{\sqrt{1-sen^2 x}} dx$

xxi. $\int \frac{e^{atg\, x}}{1+x^2} dx$

3. Calcular polo método de integración por partes:

i. $\int x \cdot e^x\; dx$

ii. $\int ln\, x\; dx$

iii. $\int x \cdot ln\, x\; dx$

iv. $\int x \cdot sen\, x\; dx$

v. $\int e^x \cdot cos\, x\; dx$

vi. $\int \frac{x}{cos^2 x} dx$

vii. $\int x^2 \cdot ln\, x\; dx$

viii. $\int x^2 \cdot e^x\; dx$

ix. $\int e^x \cdot sen\, x\; dx$

x. $\int sen^2 x\; dx$

xi. $\int \frac{x \cdot asen\, x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

4. Calcular as seguintes integrais de tipo racional:

i. $\int \frac{1+x}{1-x} dx$

ii. $\int \frac{dx}{x^2-16}$

iii. $\int \frac{x^2+1}{x^2-1} dx$

iv. $\int \frac{dx}{x^2+x-6}$

v. $\int \frac{x^3-4x-4}{x^2-x-2} dx$

vi. $\int \frac{x\,dx}{x^2+2x+17}$

vii. $\int \frac{x^4}{2x^3-6x^2+4x} dx$

viii. $\int \frac{3x^3+5x}{x^2+1} dx$

ix. $\int \frac{2x+8}{x^3-2x^2+5x} dx$

x. $\int \frac{x^2+1}{x\cdot(x+1)\cdot(x+3)} dx$

5. Calcular as seguintes integrais polo método mais conveniente:

i. $\int \frac{e^x+1}{e^x+x} dx$

ii. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

iii. $\int \frac{dx}{x\cdot \ln x}$

iv. $\int (x^2+2)\cdot \cos x\, dx$

v. $\int (\ln x)^2\, dx$

vi. $\int \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}} dx$

vii. $\int \frac{x^2}{x^3+2} dx$

viii. $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+1} dx$

ix. $\int \frac{2x+5}{x^2+2x-3} dx$

x. $\int tg\, x\, dx$

xi. $\int \frac{e^x\, dx}{1+e^{2x}}$

xii. $\int 2x\cdot e^{x^2}\, dx$

xiii. $\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx$

xiv. $\int x\cdot\sqrt{1+3x^2}\, dx$

xv. $\int (3\cos x\, \operatorname{sen}^4 x + 4 \operatorname{sen} x \cos^3 x)\, dx$

6. Obter unha primitiva F da función $f(x)=x^2-3x+4$ tal que $F(1)=0$.

7. Obter unha primitiva F da función $f(x)=\frac{x}{x^2-16}$ tal que $F(2)=-3$.

2. A INTEGRAL DEFINIDA

8. Calcular o valor das seguintes integrais definidas:

i. $\int_{-3}^{3} x\, dx$

ii. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx$

iii. $\int_0^{\pi} \cos x\cdot e^{\operatorname{sen} x}\, dx$

iv. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3 x\cdot \cos^4 x\, dx$

v. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cdot \operatorname{sen} x\, dx$

vi. $\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}\, dx$

vii. $\int_0^1 \frac{1}{x^2-x-2}\, dx$

viii. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx$

ix. $\int_2^3 \frac{1}{x\cdot \ln^4 x}\, dx$

x. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3 x\, dx$

xi. $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx$

xii. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} 3x\, dx$

xiii. $\int_{-\pi}^{0} \operatorname{sen} x\, dx$

9. Calcular a integral $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\, dx$.

10. Calcular o valor da integral $\int_{-\pi}^{\pi} sen^3 x\, dx$ sen utilizar a Regra de Barrow.

11. Pode aplicar-se o Teorema do Valor Médio do Cálculo Integral á función $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ no intervalo $[0,1]$? No caso afirmativo, comprobá-lo.

12. Comprobar que a función $f(x)=sen\, x$ está nas hipóteses do Teorema do Valor Médio do Cálculo Integral no intervalo $[0,\pi]$ e obter o valor de x previsto na tese deste teorema.

13. Comprobar que a función $f(x)=2x^2+2x$ está nas hipóteses do Teorema do Valor Médio do Cálculo Integral no intervalo $[0,1]$ e obter o valor de x previsto na tese deste teorema.

14. Dada a función $F(x)=\int_1^x \frac{sen\ t}{t}\, dt$, calcular $F'(\pi)$ e $F''(\pi)$.

15. Calcular a derivada da función $G(x)=\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\, dt$.

16. Calcular a derivada da función $H(x)=\int_x^6 (t+sen^2\, t)\, dt$.

17. Calcular a derivada da función $F(x)=\int_1^{x^2} \frac{1}{1+t^2}\, dt$.

18. Calcular a derivada das funcións $F(x)=\int_x^{x^3} \frac{1}{1+t^2}\, dt$, $G(x)=\int_x^{2x} e^{-t^2}\, dt$ e $H(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{t}\, dt$.

19. Calcular de duas formas diferentes a integral $\int_{-5}^{5} |x|\, dx$.

20. Representar a gráfica de $f(x)=|x^2-4|$ no intervalo $[-3,3]$ e calcular a sua integral nese intervalo.

21. Calcular o valor do elemento c do Teorema do Valor Médio do Cálculo Integral, para a función $y=3x^2$ no intervalo $[-4,-1]$.

22. Sexa f(x) unha función contínua en $[0,1]$ e derivábel en $(0,1)$, tal que $f(1)=0$ e $\int_0^1 2x\cdot f'(x)\, dx=1$. Calcular $\int_0^1 f(x)\, dx$.

23. Sexa $f:[-2,2]\to\mathbb{R}$, contínua no seu domínio, tal que $\int_{-2}^{-1} f(t)\, dt=\int_1^2 f(t)\, dt$. Pode-se asegurar que existen b e c pertencentes ao intervalo $[-2,2]$, de maneira que $b\leqslant -1$, $c\geqslant 1$ e $f(b)=f(c)$?

24. Calcular, sen utilizar a integral indefinida, o valor de $\int_{-\pi}^{\pi} (x^3+sen\, x)\, dx$.

25. Determinar a e b para que a función $f(x)=\begin{cases} sen\, \pi x & se\ \ x\leqslant -1 \\ ax+b & se\ \ x\in(-1,0] \\ x^2+2 & se\ \ x>0 \end{cases}$ sexa contínua en todo o seu domínio e calcular a sua integral definida entre os valores -2 e 2.

26. Determinar a e b para que a función $f(x)=\begin{cases} 2^x+a & se \quad x\leqslant -1 \\ ax+b & se \quad x\in(-1,0] \\ 3x^2+2 & se \quad x>0 \end{cases}$ sexa contínua en todo o seu domínio e calcular a sua integral definida no intervalo $[-2,2]$.

27. Calcular o valor da integral definida $\int_{-100}^{100}(x^{25}+sen^{35}x)\,dx$.

28. Calcular un polinómio $p(x)$ de terceiro grau que teña un máximo relativo en $x=1$, un ponto de inflexión en $P(0,1)$ e tal que $\int_0^1 p(x)\,dx=\frac{5}{4}$.

3. CÁLCULO DE ÁREAS E VOLUMES

29. Calcular a área delimitada pola gráfica de $y=x^2-9$ e o eixo de abscisas OX.

30. Calcular a área delimitada pola gráfica de $y=1-x^2$ e o eixo de abscisas OX.

31. Calcular a área da rexión delimitada por $y=e^x-e$ cos eixos de coordenadas.

32. Calcular a área da rexión delimitada pola gráfica da función $f(x)=\ln x$, o eixo OX e a recta de ecuación $x=e$.

33. Determinar a área da rexión limitada pola gráfica da función $f(x)=x^2+x+5$, o eixo OX e as rectas $x=-\frac{1}{2}$ e $y=x+6$.

34. A área do recinto limitado pola gráfica de $y(x)=t^2-x^2$ co eixo de abscisas é 36 unidades de superfície. Calcular o valor de t.

35. Calcular o valor de k para que a área delimitada polas gráficas de $y(x)=k-x^2$ e a recta $y=0$ sexa de 4 unidades de superfície.

36. Calcular o valor de $m>0$ tal que a área comprendida entre $y=x^2$ e $y=mx$ sexa de unha unidade.

37. Sabendo que a área da rexión comprendida entre a curva $y=\sqrt{x}$ e a recta $y=bx$ é 1, calcular o valor de b.

38. Calcular a área do recinto plano delimitado pola gráfica da función $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$, o eixo OX e a recta $x=\frac{1}{2}$.

39. Calcular a área dos recintos cerrados delimitados polas gráficas de:

    i. $\begin{cases} y=x^2-2x+1 \\ y=1 \end{cases}$

    ii. $\begin{cases} y=x^2-5 \\ y=2x+3 \end{cases}$

    iii. $\begin{cases} y=x^2+5x \\ y=-x^2+3x+4 \end{cases}$

    iv. $\begin{cases} y=x^2 \\ y=x^3 \end{cases}$

    v. $\begin{cases} y=x^2 \\ y=\sqrt{x} \end{cases}$

40. Representar gráficamente a función $f(x)=\frac{1}{(x+1)\cdot(x+2)}$. Calcular a integral definida entre os valores 0 e 1 e observar se esta integral definida coincide coa área.

41. Representar gráficamente a función $f(x)=\frac{1}{x^2-5x+6}$. Calcular a integral definida entre os valores -1 e 1 e observar se esta integral definida coincide coa área.

42. Calcular a área do recinto determinado polas interseciónss das parábolas $y^2=2x$ e $x^2=2y$.

43. Calcular a área do recinto limitado pola bisectriz do primeiro cuadrante e a gráfica de $y=27x^4$.

44. Calcular a área do recinto limitado polo eixo de abscisas e a gráfica de $f(x)=x\cdot\sqrt{1-x}$.

45. Calcular a área do recinto limitado polo eixo de abscisas e a gráfica de $f(x)=3x^2-\frac{x^3}{2}$.

46. Calcular a área do triángulo determinado polos eixos coordenados e a recta tanxente á hipérbole de ecuación $xy=1$ en calquer ponto da gráfica.

47. Calcular o número $\alpha>0$ tal que o valor da área da rexión limitada pola recta $y=\alpha$ e a parábola $y=(x-2)^2$ sexa $36\ u^2$.

48. Calcular o valor de $n\in\mathbb{N}$ sabendo que a área comprendida entre as curvas $y=x^n$ e $y=\sqrt[n]{x}$ é $\frac{3}{5}$.

49. Calcular o volume do corpo de revolución determinado pola curva de ecuación $y=e^{-x}$, o eixo OY e a recta $x=3$ ao xirar arredor do eixo OX.

50. Calcular o volume do corpo de revolución delimitado pola elipse $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ ao dar unha volta completa arredor do eixo OY.

51. Calcular o volume do elipsoide de revolución xenerado por revolución da elipse $2x^2+y^2=1$ ao xirar sobre o eixo OX.

52. Calcular a superfície lateral dos corpos sólidos xenerados nos trés problemas anteriores.

53. Obter a fórmula que expresa o volume dun casquete esférico en función da altura do casquete e do raio da esfera.

54. Obter a fórmula que expresa o volume dun casquete esférico en función da altura do casquete e do raio da sua base.

55. Define-se a integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ como o límite de $\int_a^{\lambda} f(x)\,dx$ cando $\lambda\rightarrow+\infty$. Á vista desta definición, calcular $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx$ e $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$.

56. Observando a definición anterior, dar a definición de $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ e a definición de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$. Calcular o valor das integrais definidas $\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx$ e $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx$.

4. SOLUCIÓNS

1.i. $2\ln|x|+C$

ii. $\frac{e^x}{2}+C$

iii. $-\frac{1}{2}x^2+C$

iv. $3\ln|x+1|+C$

v. $\frac{1}{2}\,atg\,x+C$

vi. $2\sqrt{x}+C$

vii. $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+C$

viii. $5x+3\ln|x|+\frac{6}{x}+C$

ix. $6\sqrt[6]{x}+C$

x. e^x+3x+C

xi. $e^x+e^{-x}+C$

xii. $3\ln|x-2|+\frac{5x^2}{2}-\frac{1}{2}\ln|x+1|+C$

2.i. $\frac{1}{5}\,sen(5x)+C$

ii. $\frac{1}{2}\ln|2x-3|+C$

iii. $\frac{3}{4}e^{4x}+C$

iv. $\frac{2}{9}\sqrt{(3x-5)^3}+C$

v. $\ln|x^3+2x|+C$

vi. $-\frac{1}{2}x^2+C$

vii. $\frac{1}{6}\ln|3x^2+6x+2|+C$

viii. $\frac{1}{2}\,sen^2x+C$

ix. $-\frac{1}{3}\cos(3x+4)+C$

x. $-\frac{1}{3}\cos^3x+C$

xi. $\frac{1}{2}e^{x^2}+C$

xii. $\frac{1}{5}\,tg(5x)+C$

xiii. $-\frac{1}{2}\cos(x^2+4)+C$

xiv. $-\cos(e^x)+C$

xv. $-2\cos\sqrt{x}+C$

xvi. $\frac{1}{2}\,asen^2x+C$

xvii. $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2-2x)^4}+C$

xviii. $\frac{1}{2}\ln^2x+C$

xix. $2\sqrt{x+x^2}+C$

xx. $x+C$

xxi. $e^{atg\,x}+C$

3.i. $e^x\cdot(x-1)+C$

ii. $x\cdot(\ln x-1)+C$

iii. $\frac{x^2}{4}\cdot(2\ln x-1)+C$

iv. $sen\,x-x\cdot\cos x+C$

v. $\frac{e^x}{2}(sen\,x+\cos x)+C$

vi. $x\cdot tg\,x+\ln|\cos x|+C$

vii. $\frac{x^3}{9}\cdot(3\ln x-1)+C$

viii. $e^x\cdot(x^2-2x+2)+C$

ix. $\frac{e^x}{2}(sen\,x-\cos x)+C$

x. $\frac{1}{2}(x-sen\,x\cdot\cos x)+C$

xi. $x-asen\,x\cdot\sqrt{1-x^2}+C$

4.i. $-x-2\ln|x-1|+C$

ii. $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-4}{x+4}\right|+C$

iii. $x+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$

iv. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right|+C$

v. $x+\frac{x^2}{3}+\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{4}{3}\ln|x-2|+C$

vi. $\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+17|-\frac{1}{4}\,atg\left(\frac{x+1}{4}\right)+C$

vii. $\frac{x^2}{4}+\frac{3x}{2}-\frac{1}{2}\ln|x-1|+4\ln|x-2|+C$

viii. $\frac{3x^2}{2}+\ln(x^2+1)+C$

ix. $\frac{8}{5}\ln|x|-\frac{4}{5}\ln|x^2-2x+5|+\frac{9}{5}\,atg\left(\frac{x-1}{2}\right)+C$

x. $\frac{1}{3}\ln|x|-\ln|x+1|+\frac{5}{3}\ln|x+3|+C$

5.i. $\ln|e^x+x|+C$

ii. $-\frac{1}{x}\cdot(\ln|x|+1)+C$

iii. $\ln|\ln|x||+C$

iv. $x^2\,\mathrm{sen}\,x+2x\cos x+C$

v. $x\cdot\ln^2|x|-2x\cdot\ln|x|+2x+C$

vi. $\sqrt{\mathrm{sen}\,x}+C$

vii. $\frac{1}{3}\ln|x^3+2|+C$

viii. $\ln|x^2+3x+1|+C$

ix. $\frac{1}{4}\ln|x+3|+\frac{7}{4}\ln|x-1|+C$

x. $-\ln|\cos x|+C$

xi. $\mathrm{atg}(e^x)+C$

xii. $e^{x^2}+C$

xiii. $\mathrm{asen}\frac{x}{3}+C$

xiv. $\frac{1}{9}\sqrt{(1+3x^2)^3}+C$

xv. $\frac{3}{5}\mathrm{sen}^5 x-\cos^4 x+C$

6. $F(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+4x-\frac{17}{6}$

7. $F(x)=\frac{1}{2}\ln|x^2-16|+3+\frac{1}{2}\ln 12$

8.i. 0

ii. 2

iii. 0

iv. $\frac{2}{35}$

v. $\pi-2$

vi. $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$

vii. $-\frac{2}{3}\ln 2$

viii. 0

ix. $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{\ln^3 2}-\frac{1}{\ln^3 3}\right)$

x. $\frac{2}{3}$

xi. $\frac{\pi}{4}$

xii. 0

xiii. -2

9. $\int_0^{\ln 5}\frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx=\frac{1}{3}$

10. $\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sen}^3 x\,dx=0$

11. A función cumpre as hipóteses, polo tanto si que é de aplicación o Teorema.

12. $c=\mathrm{asen}\frac{2}{\pi}\approx 0{,}69 \in [0,\pi]$

13. $c=\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{13}{3}}-1\right)\approx 0{,}541 \in [0,1]$

14. $F'(\pi)=0$ e $F''(\pi)=-\frac{1}{\pi}$

15. $G'(x)=\frac{1}{1+x^2}$

16. $H'(x)=-\mathrm{sen}^2 x-x$

17. $F'(x)=\frac{2x}{1+x^4}$

18. $F'(x)=\frac{3x^2}{1+x^6}-\frac{1}{1+x^2}$; $G'(x)=2e^{-4x^2}-e^{-x^2}$; $H'(x)=\frac{\ln x}{x}$.

19. $\int_{-5}^{5} |x|\, dx = 25$

20. $\int_{-3}^{3} |x^2-4|\, dx = \frac{46}{3}$

21. $c = -\sqrt{7} \approx -2{,}646 \in [-4,-1]$

22. $\int_{0}^{1} f(x)\, dx = -\frac{1}{2}$

23. A existéncia de b e c nestas condicións é consecuéncia directa do Teorema do Valor Médio do Cálculo Integral.

24. $\int_{-\pi}^{\pi} (x^3 + \operatorname{sen} x)\, dx = 0$

25. $a = b = 2$ e $\int_{-2}^{2} f(x)\, dx = \frac{2}{\pi} + \frac{23}{3} \approx 8{,}303$

26. $a = \frac{3}{4}$ e $b = 2$; $\int_{-2}^{2} f(x)\, dx \approx 14{,}736$

27. $\int_{-100}^{100} (x^{25} + \operatorname{sen}^{35} x)\, dx = 0$

28. $p(x) = -\frac{1}{5} x^3 + \frac{3}{5} x + 1$

29. A área é $36\ u^2$.

30. A área é $\frac{4}{3}\ u^2$.

31. A área é $1\ u^2$.

32. A área é $1\ u^2$.

33. A área é $\frac{179}{12}\ u^2$.

34. $t = 3$

35. $k = \sqrt[3]{9}$

36. $m = \sqrt[3]{6}$

37. $b = 6^{-\frac{1}{3}}$

38. A área é $\left| \ln \frac{\sqrt{3}}{2} \right| \approx 0{,}144$.

39. As áreas son respectivamente: $\frac{4}{3}\ u^2$, $36\ u^2$, $9\ u^2$, $\frac{1}{12}\ u^2$, $\frac{1}{3}\ u^2$.

40. A área e a integral definida coinciden: $\int_{0}^{1} f(x)\, dx = \ln \frac{4}{3} \approx 0{,}288\ u^2$.

41. A área e a integral definida coinciden: $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \ln \frac{3}{2} \approx 0{,}405\ u^2$.

42. A área é $\frac{4}{3}\ u^2$.

43. A área é $\frac{1}{30}\ u^2$.

44. A área é $\frac{4}{15}\ u^2$.

45. A área é $54\ u^2$.

46. A área é $2\ u^2$ independentemente do ponto escollido.

47. $\alpha=9$

48. $n=4$

49. O volume é $\frac{\pi}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{e^6}\right)\approx 1{,}567\ u^3$.

50. O volume é $\frac{16\pi}{3}\approx 16{,}755\ u^3$.

51. O volume é $\frac{4\pi\sqrt{2}}{3}\approx 5{,}924\ u^3$.

52. As áreas son respectivamente: $2\pi\cdot\left(1-\frac{1}{e^3}\right)\approx 5{,}97\ u^2$, $2\pi^2\approx 19{,}738\ u^2$ e $\frac{\sqrt{2}\pi^2}{2}\approx 6{,}978\ u^2$.

53. A fórmula é $V(r,h)=\frac{\pi h^2}{3}\cdot(3r-h)$, onde r representa o raio da esfera e h a altura do casquete.

54. A fórmula é $V(R,h)=\frac{\pi h}{6}\cdot(h+3R^2)$, onde R representa o raio da base e h a altura do casquete.

55. $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}$ e $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx=1$.

56. $\int_{-\infty}^{0}e^x\,dx=1$ e $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx=\pi$.