1. FUNCIÓN REAL DE VARIÁBEL REAL

1.1. DEFINICIÓN DE FUNCIÓN

Def 1 Entende-se por función unha aplicación entre conxuntos numéricos, na que unha variábel (a imaxe da función) toma valores que dependen de outra variábel (orixe da función). Tradicionalmente a imaxe da función identifica-se coa letra y e denomina-se variábel dependente, en tanto que a orixe da función identifica-se coa letra x e denomina-se variábel independente. De forma mais precisa, unha función real de variábel real define-se como segue: sexa A un subconxunto de $\mathbb{R}$, di-se que $f: A \to \mathbb{R}$ é unha función real de variábel real $:\Leftrightarrow\ \forall\ x \in A\ \exists^{\cdot}\ y \in \mathbb{R}\ /\ f(x)=y$.

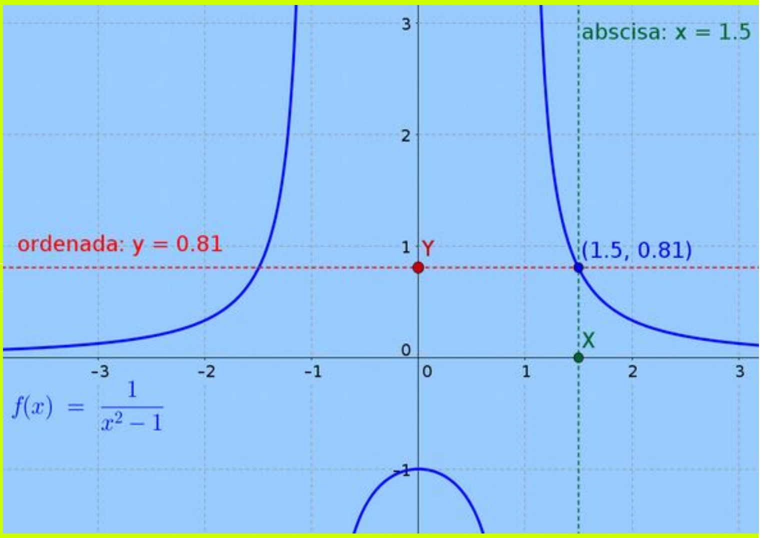
O conxunto A no que toma valores a variábel independente x, chama-se domínio da función e representa-se por $Dom\ f$. Para cada elemento x do domínio, existe un único número real y relacionado con el, e di-se que y é a imaxe de x pola función f. O conxunto de todos os elementos que son imaxe de algún elemento do domínio chama-se conxunto imaxe e representa-se da forma $Im\ f$ ou tamén $f(A)=\{f(x),\ x\in A\}$.

Dado un elemento y do conxunto imaxe, existirá polo menos un elemento x do domínio que está relacionado con el, e diremos que x é a anti-imaxe de y. Existe a posibilidade de que un mesmo elemento y sexa imaxe de vários elementos do domínio, polo que designaremos por $f^{-1}(y)$ ao conxunto de todos os elementos do domínio que teñen como imaxe o elemento y: $f^{-1}(y)=\{x \in Dom\ f\ /\ f(x)=y\}$.

Ex 1 Estudar o domínio e a imaxe da función $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$. Obter as imaxes dos elementos 0, -2, 1 e $\dfrac{1}{3}$, as anti-imaxes de -1, 2 e 0 e o conxunto $Im\ f$.

Como non se indica nada sobre o domínio, entenderemos que $Dom\ f$ é o maior subconxunto de $\mathbb{R}$ no que a fórmula está ben definida, neste caso, todos os valores de x coa única condición de que non se anule o denominador.

$Dom\ f=\{x \in \mathbb{R}\ /\ x^2-1\neq 0\}=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$, ou tamén $Dom\ f=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$



As imaxes son: $f(0)=\dfrac{1}{0^2-1}=-1$;

$f(-2)=\dfrac{1}{(-2)^2-1}=\dfrac{1}{3}$;

$f(1)=\dfrac{1}{1^2-1}\notin\mathbb{R}\ \Rightarrow\ 1\notin Dom\ f$;

$f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2-1}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{9}-1}=-\dfrac{9}{8}$.

En xeral a anti-imaxe de y é: $f^{-1}(y)=\{x\in Dom\ f\ /\ f(x)=y\}$, asi que para obter $f^{-1}(-1)$ faremos $\dfrac{1}{x^2-1}=-1 \Leftrightarrow x=0$, logo $f^{-1}(-1)=0$. De igual forma: $\dfrac{1}{x^2-1}=2 \Leftrightarrow 2x^2-3=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$, asi que $f^{-1}(2)=\left\{-\sqrt{\dfrac{3}{2}},+\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right\}$. E para $x=0$: $\dfrac{1}{x^2-1}=0 \Leftrightarrow 1=0$ e polo tanto $f^{-1}(0)=\emptyset$.

$Im\ f$ é o conxunto de todos os valores de y que son imaxe de algún valor de x, é dicer, os elementos $y\in\mathbb{R}\ /\ \exists\ x\in Dom\ f\ \ f(x)=y$: $\dfrac{1}{x^2-1}=y \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{1+\dfrac{1}{y}}$. Esta expresión ten sentido se $y\neq 0$ e se o radicando é maior ou igual que 0, polo tanto: $1+\dfrac{1}{y}\geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{y}\geqslant -1$. Logo $Im\ f=(-\infty,-1]\cup(0,+\infty)=\mathbb{R}-(-1,0]$.

Chama-se gráfica dunha función f ao conxunto dos pares $\{(x, f(x)),\ x \in Dom\ f\}$, é dicer, o conxunto formado por todos os pares de elementos que están asociados en virtude da relación de dependéncia entre a variábel independente e a variábel dependente. A gráfica dunha función é un conxunto que se pode representar nun sistema de coordenadas cartesianas, no que a variábel independente x (a abscisa) ocupa o eixo horizontal (eixo de abscisas) e a variábel dependente y (a ordenada) ocupa o eixo vertical (eixo de ordenadas). Desta forma a información numérica que proporciona a expresión alxébrica da función transforma-se en información gráfica, que é o que se coñece como representación gráfica dunha función. A gráfica resulta de muita utilidade para observar o comportamento da función ao longo do seu domínio de existéncia.

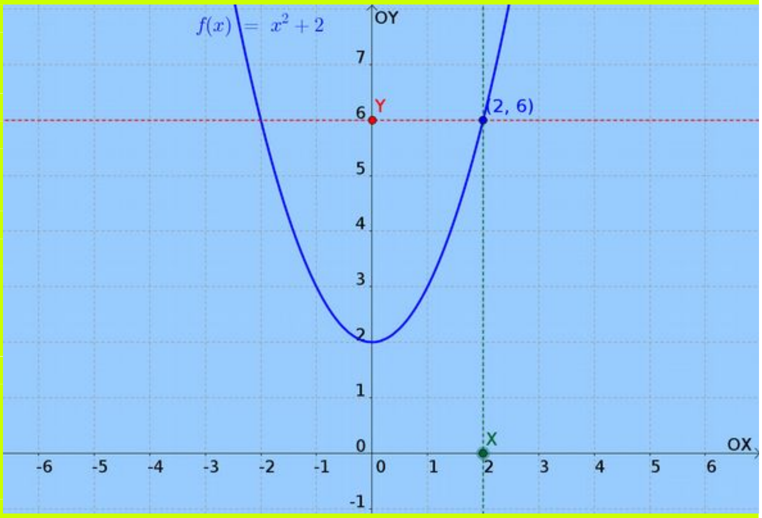
Ex 2 Dada a función $f(x)=x^2+2$, obter as ordenadas correspondentes aos pontos de abscisa $x=2$ e $x=-1$ e representá-los no plano cartesiano. Obter tamén a abscisa correspondente aos pontos de ordenada $y=4$ e $y=0$ e representá-los. Estudar se o ponto $P(3,-2)$ pertence á gráfica e estudar se existe algún ponto da gráfica que teña ordenada 10.

Para $x=2$ temos que:
$f(2)=2^2+2=6$, logo a ordenada é $y=6$ e o ponto $A(2,6)$ está na gráfica.

Para $x=-1$:
$f(-1)=(-1)^2+2=3$, logo a ordenada é $y=3$ e $B(-1,3)$ está na gráfica.

Para $y=4$:
$f(x)=x^2+2=4 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$, logo as abscisas son $x=-\sqrt{2}$ e $x=\sqrt{2}$ e os pontos $C(-\sqrt{2},4)$ e $D(\sqrt{2},4)$ están na gráfica.

Para $y=0$:
$f(x)=x^2+2=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{-2}\notin\mathbb{R}$, logo non hai nengún ponto de ordenada 0, é dicer, $0\notin Im\ f$.



O ponto $P(3,-2)$ estará na gráfica se $f(3)=-2$: $f(3)=3^2+2=11\neq-2 \Rightarrow P$ non está na gráfica da función.

$f(x)=10 \Leftrightarrow x^2+2=10 \Leftrightarrow x^2=8 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{8}$, logo os pontos $E(-\sqrt{8},10)$ e $F(\sqrt{8},10)$ pertencen á gráfica.

1.2. OPERACIÓNS CON FUNCIÓNS

Def 2 Dadas duas funcións $f(x)$ e $g(x)$ definidas no mesmo domínio, a suma de $f(x)$ e $g(x)$ é unha función que se denota por $f+g$, e define-se como $(f+g)(x):=f(x)+g(x)$. De xeito similar pode definir-se a diferenza de funcións: $(f-g)(x):=f(x)-g(x)$.

Nas mesmas circunstáncias, o produto de $f(x)$ e $g(x)$ é unha función que se denota por $f\cdot g$, definida como $(f\cdot g)(x):=f(x)\cdot g(x)$. Define-se o cociente de $f(x)$ e $g(x)$ como a función f/g, tal que $(f/g)(x):=f(x)/g(x)$, sempre que $g(x)\neq 0$.

Estas catro operacións posúen as mesmas propriedades que as operacións numéricas homólogas.

Chama-se composición de duas funcións $f(x)$ e $g(x)$, e representa-se como $g\circ f$ a operación definida como: $(g\circ f)(x):=g[f(x)]$. A función asi obtida chama-se función composta de f e g. É evidente que para que a composición de funcións estea ben definida é preciso que $f(x)\in Dom\ g$.

É importante destacar que esta operación é claramente non comutativa, xá que en xeral $g \circ f \neq f \circ g$.

Chama-se función recíproca de f, e denota-se por f^{-1}, a función tal que composta con f resulta a función identidade, de forma que $(f \circ f^{-1})(x) := x$ e tamén $(f^{-1} \circ f)(x) := x$.

Ex 3 Dadas as funcións $f(x)=x^2-3$ e $g(x)=\frac{1}{x}$, obter as funcións $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, f/g, $f \circ g$, $g \circ f$, f^{-1} e g^{-1}.

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x^2-3+\frac{1}{x}$ $\quad$ $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=x^2-3-\frac{1}{x}$

$(f \cdot g)(x)=f(x) \cdot g(x)=(x^2-3) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)=x-\frac{3}{x}$ $\quad$ $(f/g)(x)=f(x)/g(x)=\frac{x^2-3}{\frac{1}{x}}=x^3-3x$

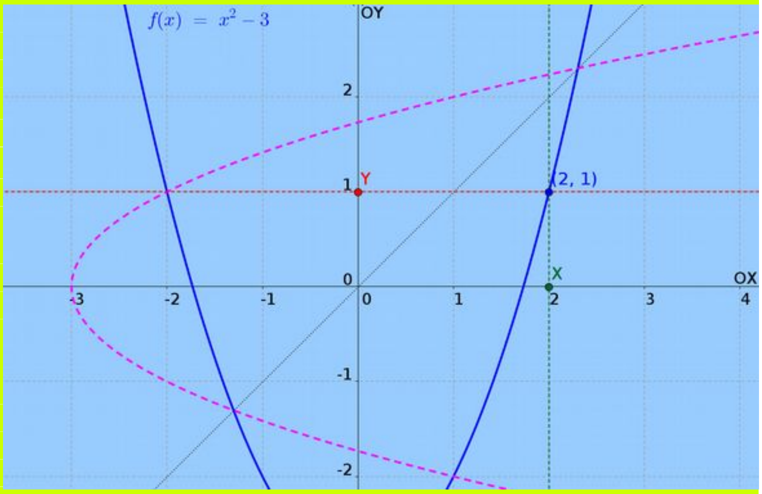
$(f \circ g)(x)=f[g(x)]=f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2-3=\frac{1}{x^2}-3$ $\quad$ $(g \circ f)(x)=g[f(x)]=g(x^2-3)=\frac{1}{x^2-3}$

$f(t)=u \Leftrightarrow t^2-3=u \Leftrightarrow t=\pm\sqrt{u+3} \Rightarrow$

$\Rightarrow f^{-1}(x)=\pm\sqrt{x+3}$

A función f ten polo tanto duas recíprocas, ambas con domínio $[-3,+\infty)$.

$g(t)=u \Leftrightarrow \frac{1}{t}=u \Leftrightarrow t=\frac{1}{u} \Rightarrow g^{-1}(x)=\frac{1}{x}$;
logo a recíproca de g é ela mesma.



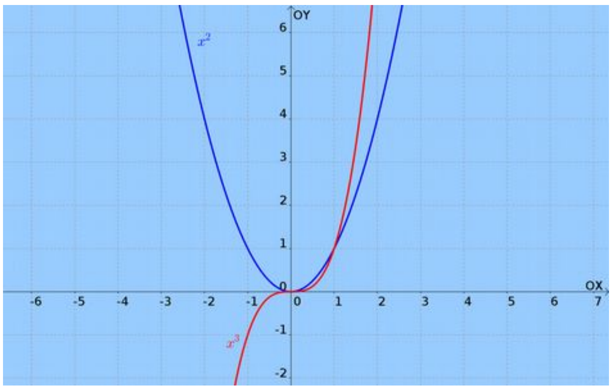
1.3. TIPOS DE FUNCIÓNS

Distinguen-se vários tipos de funcións elementares, e a partir delas, mediante as operacións definidas anteriormente, obteñen-se unha grande cantidade e variedade de novas funcións. Son os que seguen:

i. *Función potencial*

Veñen expresadas en forma de poténcia na que a base é variábel: $f(x)=x^k$.

A partir destas obteñen-se mediante operacións básicas as funcións polinómicas e as funcións racionais.

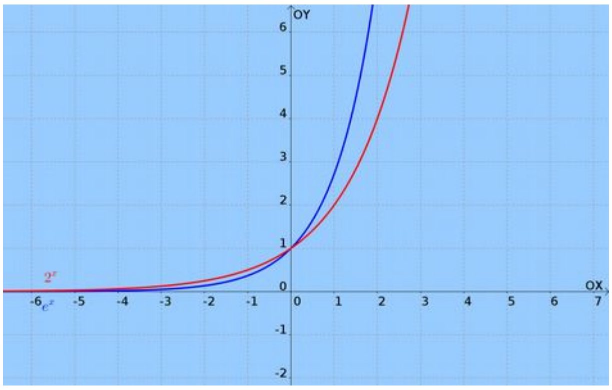


ii. *Función exponencial*

Poténcia de base un número real positivo $a>0$, e na que o exponente é variábel: $f(x)=a^x$.

É de especial interese a función exponencial con base o número e, que se representa $f(x)=e^x$ ou tamén $f(x)=exp(x)$.

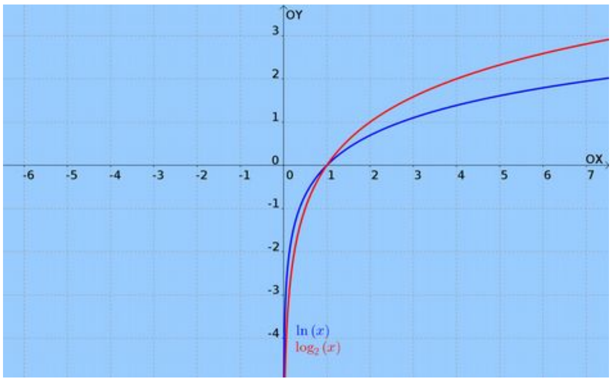
Nota: todas as funcións exponenciais poden obter-se a partir desta última.



iii. *Función logarítmica*

A función logarítmo natural ou neperiano representa-se da forma $f(x)=\ln x$, e é a función recíproca de $f(x)=e^x$.

En ocasións manexan-se funcións logarítmicas con base distinta do número e. Neste caso a expresión é $f(x)=\log_a x$, con $a>0$. Nestas funcións a variábel independente debe ser un número real positivo.

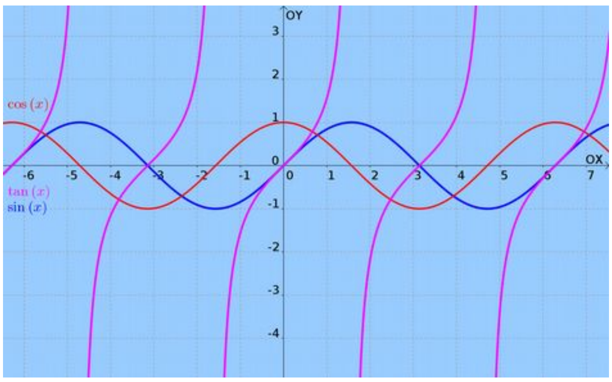


iv. *Funcións trigonométricas*

Son aquelas nas que o argumento da razón trigonométrica é variábel:

$f(x)=sen\ x$, $f(x)=cos\ x$ e $f(x)=tg\ x$.

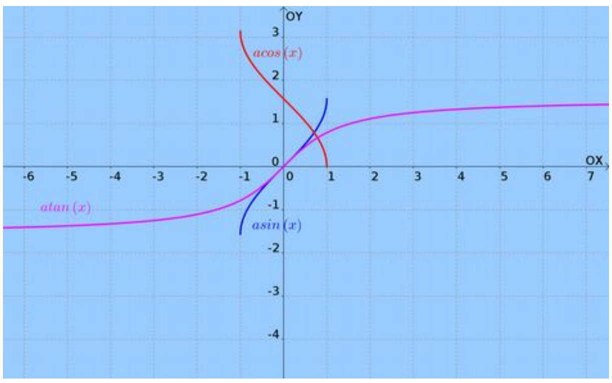
É importante destacar que nas funcións trigonométricas a variábel independente sempre se expresa en radiáns.



v. *Funcións trigonométricas inversas*

Son as funcións recíprocas das anteriores:

- $f(x)=asen\ x$, con domínio o intervalo $[-1,1]$ e imaxe o intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$;
- $f(x)=acos\ x$, con domínio $[-1,1]$ e imaxe $[0,\pi]$;
- $f(x)=atg\ x$, con domínio $\mathbb{R}$ e imaxe $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.



2. SUCESIÓNS DE NÚMEROS REAIS

2.1. DEFINICIÓN DE SUCESIÓN

Def 3 Di-se que unha función real de variábel real é unha sucesión de números reais se o seu domínio é o conxunto dos números naturais: $s:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{R}$, onde $\mathbb{N}$ é o conxunto dos números naturais (entende-se que $0\notin\mathbb{N}$).

Chaman-se termos da sucesión os elementos do conxunto imaxe da sucesión: $s(1)$, $s(2)$, $s(3)$ ... Habitualmente os termos designan-se da forma s_1, s_2, s_3 ... e a sucesión identifica-se normalmente co conxunto dos seus termos, de maneira que nos referiremos a unha sucesión como o conxunto ordenado $s_n=\{s_1, s_2, s_3 \ldots\}\subset\mathbb{R}$.

A expresión s_n designa tanto á sucesión como á expresión analítica pola que se obteñen os seus termos (a fórmula). Esta fórmula, cando exista, recebe o nome de termo xeral da sucesión. En ocasións utiliza-se a expresión (s_n) para evitar a confusión entre a sucesión (conxunto de termos) e o termo xeral (fórmula).

2.2. MONOTONIA E ACOTACIÓN

Def 4 Di-se que unha sucesión (s_n) é monótona crecente $:\Leftrightarrow s_{n+1}\geqslant s_n \;\; \forall\; n\in\mathbb{N}$ e di-se que é monótona decrecente $:\Leftrightarrow s_{n+1}\leqslant s_n \;\; \forall\; n\in\mathbb{N}$.

Di-se que unha sucesión (s_n) é acotada inferiormente $:\Leftrightarrow \exists\; m\in\mathbb{R} \;/\; s_n\geqslant m \;\; \forall\; n\in\mathbb{N}$ e acotada superiormente $:\Leftrightarrow \exists\; M\in\mathbb{R} \;/\; s_n\leqslant M \;\; \forall\; n\in\mathbb{N}$. No caso de que unha sucesión sexa acotada inferior e superiormente, di-se simplesmente que é acotada. Os elementos m e M chaman-se cota inferior e cota superior da sucesión, respectivamente.

2.3. CONVERXÉNCIA DUNHA SUCESIÓN

Def 5 Di-se que un número real L é o límite da sucesión (s_n) $:\Leftrightarrow \;\forall\varepsilon>0 \;\; \exists n_0\in\mathbb{N} \;/\; |s_n-L|<\varepsilon \;\; \forall n>n_0$. No caso de existir o límite, dirá-se que a sucesión (s_n) é converxente.

Di-se que unha sucesión (s_n) ten límite $+\infty$ $:\Leftrightarrow \;\forall K\in\mathbb{R} \;\; \exists n_0\in\mathbb{N} \;/\; s_n>K \;\; \forall n>n_0$. Di-se que a sucesión (s_n) ten límite $-\infty$ $:\Leftrightarrow \;\forall K\in\mathbb{R} \;\; \exists n_0\in\mathbb{N} \;/\; s_n<K \;\; \forall n>n_0$.

En calquer destes dous casos di-se que a sucesión (s_n) é diverxente.

Os métodos para determinar o límite de sucesións son similares aos que se utilizarán para calcular o límite de funcións, que será definido posteriormente. Por este motivo, o cálculo de límites de sucesións non se trata neste momento.

2.4. TEOREMAS DE ACOTACIÓN E CONVERXÉNCIA

Th 1 *Teorema de Acotación*

Toda sucesión converxente é acotada.

Demostración

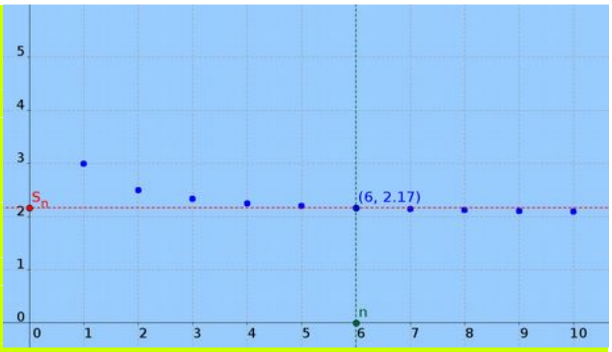
Sexa (s_n) unha sucesión converxente e sexa $L \in \mathbb{R}$ o seu límite. Sendo asi, pola definición de límite $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ /\ |s_n-L|<\varepsilon\ \ \forall\ n>n_0$. En particular, para $\varepsilon=1$ $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ /\ \forall\ n>n_0\ \ |s_n-L|<1$. De aqui deduce-se que $\forall\ n>n_0\ \ L-1<s_n<L+1$ e polo tanto o máximo do conxunto $\{L+1,\ s_1,\ s_2,\ s_3\ \dots\ s_{n-1}\}$ é unha cota superior da sucesión e o mínimo do conxunto $\{L-1,\ s_1,\ s_2,\ s_3\ \dots\ s_{n-1}\}$ é unha cota inferior, asi que a sucesión é acotada.

Th 2 *Teorema de Converxéncia*

Toda sucesión monótona e acotada é converxente.

[Nota: Deixa-se sen demostrar.]

Ex 4 Dada a sucesión $s_n=\frac{1+2n}{n}$, indicar cal é o termo 25^{o} e estudar a sua monotonia, acotación e converxéncia.



O termo 25^{o} é $s_{25}=\frac{1+2\cdot 25}{25}=\frac{51}{25}=2{,}04$.

Para estudar a monotonia tomamos dous termos xenéricos consecutivos s_n e s_{n+1} e comparamo-los:

$$s_{n+1}-s_n=\frac{1+2\cdot(n+1)}{n+1}-\frac{1+2n}{n}=\frac{(2n+3)\cdot n-(1+2n)\cdot(n+1)}{n\cdot(n+1)}=-\frac{1}{n^2+n}\leqslant 0\ \ \forall\ \ n\in\mathbb{N}.$$

$s_{n+1}-s_n\leqslant 0\ \ \forall\ \ n\in\mathbb{N} \Leftrightarrow s_{n+1}\leqslant s_n\ \ \forall\ \ n\in\mathbb{N}$, logo s_n é monótona decrecente, xá que cada termo é menor ou igual que o anterior.

É evidente que $0\leqslant s_n\leqslant 3\ \ \forall\ \ n\in\mathbb{N}$, logo $m=0$ é unha cota inferior e $M=3$ é unha cota superior da sucesión.

Por ser unha sucesión monótona e acotada, é converxente. Os seus termos aproximan-se a 2, logo diremos que o límite da sucesión s_n cando n tende a $+\infty$ é 2, e escrebe-se $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+2n}{n}=2$.

3. Límite dunha Función nun Ponto

3.1. Definición de Límite

Def 6 *Límite dunha Función nun Ponto e Límites Laterais*

Sexa $a \in \mathbb{R}$, sexa $f : A \to \mathbb{R}$ unha función definida nun entorno de a (agás posibelmente o próprio a) e $L \in \mathbb{R}$ un número real; di-se que L é o límite da función f cando x tende a a $:\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ / $\forall x \neq a$ $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$.

Na prática esta idea expresa-se da forma: $L = \lim_{x \to a} f(x)$.

Esta definición resulta tan difícil de comprender como difícil foi o proceso histórico que deu lugar a ela. De maneira intuitiva, a idea de límite representa a tendéncia dos valores da función (os valores que toma a variábel dependente y) cando os valores de x se aproximan ao valor a.

Def 7 Define-se o límite dunha función nun ponto pola esquerda, e expresa-se da forma $\lim_{x \to a^-} f(x)$, como o límite dos valores que toma a función cando x se achega a a con valores menores que o próprio a. De igual forma, o límite pola direita $\lim_{x \to a^+} f(x)$ entende-se como o límite cando x se achega a a con valores maiores que a.

A existéncia de límite dunha función en a equivale a que existan os límites laterais e que ademais coincidan: $\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$.

Def 8 *Límites Infinitos e Límites no Infinito*

Di-se que unha función f ten límite infinito cando x tende a a $:\Leftrightarrow$ $\forall K > 0$ $\exists \delta > 0$ / $\forall x \neq a$ $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > K$.

Tamén se poden definir de maneira semellante os límites no infinito.

Di-se que unha función f ten límite $L \in \mathbb{R}$ cando x tende a $+\infty$ $:\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ / $\forall x > x_0$ $|f(x)-L| < \varepsilon$.

Di-se que f ten límite $L \in \mathbb{R}$ cando x tende a $-\infty$

$:\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ / $\forall x < x_0$ $|f(x)-L| < \varepsilon$.

Por último, di-se que unha función f ten límite infinito cando x tende a $+\infty$ $:\Leftrightarrow$ $\forall K > 0$ $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ / $\forall x > x_0$ $|f(x)| > K$.

E analogamente, di-se que f ten límite infinito cando x tende a $-\infty$

$:\Leftrightarrow$ $\forall K > 0$ $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ / $\forall x < x_0$ $|f(x)| > K$.

[Nota: É importante destacar que a idea de límite non depende en absoluto do valor da función no próprio a, onde a función pode incluso non estar definida.]

3.2. PROPRIEDADES DAS OPERACIÓNS CON LÍMITES

As seguintes propriedades son válidas para o cálculo de límites cando $x \to \Delta$, onde Δ pode representar un número real ou $\pm\infty$.

i. Suma ou diferenza de límites: $\lim_{x \to \Delta} f \pm g = \lim_{x \to \Delta} f \pm \lim_{x \to \Delta} g$

ii. Produto de límites: $\lim_{x \to \Delta} f \cdot g = \lim_{x \to \Delta} f \cdot \lim_{x \to \Delta} g$

iii. Cociente de límites: $\lim_{x \to \Delta} \frac{f}{g} = \frac{\lim_{x \to \Delta} f}{\lim_{x \to \Delta} g}$, sempre que $\lim_{x \to \Delta} g \neq 0$.

iv. Poténcia de límites: $\lim_{x \to \Delta} f^{\,g} = \lim_{x \to \Delta} f^{\lim_{x \to \Delta} g}$, se $f(x) > 0$.

Debido a que a maior parte das funcións que se manexarán son contínuas en case todos os pontos (o conceito de continuidade precisará-se un pouco mais adiante), o método para o cálculo de límites comeza sempre por substituir a variábel x por Δ, é dicer, para calcular $\lim_{x \to \Delta} f(x)$, introduce-se o valor Δ na expresión da función f. No caso de obtermos un número real ou un infinito, ese será o límite buscado.

Para iso utilizaremos as propriedades anteriores e tomaremos en consideración as seguintes fórmulas, nas que L representa calquer número real:

i. Suma de infinitos:

$(+\infty)+(+\infty)=+\infty$, $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$, $L+(+\infty)=+\infty$, $L+(-\infty)=-\infty$.

ii. Produto de infinitos:

$(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$, $(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty$, $(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$,

$L\cdot(+\infty)=+\infty$ se $L>0$ e $L\cdot(+\infty)=-\infty$ se $L<0$.

iii. Outros casos:

$\frac{L}{\pm\infty}=0$, $\frac{L}{0}=\infty$ se $L\neq 0$, $\frac{\infty}{0}=\infty$, $L^{+\infty}=+\infty$ se $L>1$, $L^{+\infty}=0$ se $0<L<1$.

Ex 5 Cálculo de límites I

- $\lim_{x \to 0} (x^2-2)\cdot\cos x = (0^2-2)\cdot\cos 0 = -2\cdot 1 = -2$
- $\lim_{x \to -\infty} \frac{3}{1-x^3} = \frac{3}{1-(-\infty)^3} = \frac{3}{1-(-\infty)} = \frac{3}{1+\infty} = \frac{3}{+\infty} = 0$
- $\lim_{x \to 2^+} \frac{e^x}{8-x^3} = \frac{e^2}{8-2^3} = \frac{e^2}{0} = \infty$; $x \to 2^+ \Rightarrow x>2 \Rightarrow x^3>8 \Rightarrow 8-x^3<0 \Rightarrow \lim_{x \to 2^+} \frac{e^x}{8-x^3} = -\infty$

3.3. INFINITOS E INFINITÉSIMOS

Def 9 Di-se que $f(x)$ é un infinito para $x \to \Delta$ se $\lim_{x \to \Delta} f(x) = \pm\infty$, onde Δ representa un número real ou ben $\pm\infty$.

Dadas duas funcións $f(x)$ e $g(x)$ tais que $\lim_{x \to \Delta} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x \to \Delta} g(x) = \pm\infty$, di-se que:

- $f(x)$ é un infinito de orde superior a $g(x)$ para $x \to \Delta$ se $\lim_{x \to \Delta} \frac{f}{g} = \pm\infty$;
- son infinitos da mesma orde se $\lim_{x \to \Delta} \frac{f}{g} = k \neq 0$;
- son infinitos equivalentes se $\lim_{x \to \Delta} \frac{f}{g} = 1$. Neste último caso escrebe-se $f(x) \approx g(x)$.

Exemplo de infinitos equivalentes son calquer par de polinómios do mesmo grau e mesmo coeficiente principal: se $f(x) = 5x^3 - 3x + 4$ e $g(x) = 5x^3$, resulta que $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f}{g} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{5x^3 - 3x + 4}{5x^3} = 1$.

Di-se neste caso que $f(x)$ e $g(x)$ son infinitos equivalentes en $\pm\infty$.

Def 10 Di-se que $f(x)$ é un infinitésimo para $x \to \Delta$ se $\lim_{x \to \Delta} f(x) = 0$.

Dadas duas funcións $f(x)$ e $g(x)$ tais que $\lim_{x \to \Delta} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to \Delta} g(x) = 0$, di-se que $f(x)$ e $g(x)$ son infinitésimos equivalentes para $x \to \Delta$ se sucede que $\lim_{x \to \Delta} \frac{f}{g} = 1$. Representa-se tamén da forma $f(x) \approx g(x)$.

Os que seguen son exemplos de infinitésimos equivalentes:

i. $x \approx sen\, x$ en $x \to 0$
ii. $x \approx tg\, x$ en $x \to 0$
iii. $x \approx asen\, x$ en $x \to 0$
iv. $x \approx atg\, x$ en $x \to 0$
v. $x \approx ln(1+x)$ en $x \to 0$
vi. $x \approx e^x - 1$ en $x \to 0$
vii. $\frac{x^2}{2} \approx 1 - cos\, x$ en $x \to 0$

O interese dos infinitos e infinitésimos é que poden ser substituídos por outros equivalentes sen que isto altere o valor do límite.

3.4. Indeterminacións

Ao calcular un límite obteñen-se en ocasións certas expresións que denominamos indeterminacións. Unha indeterminación é unha expresión que a priori non proporciona o valor do límite, se é que existe. Esa expresión non é polo tanto o límite que se está a buscar, nen informa tampouco da sua existéncia.

Son os seguintes casos: $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\infty-\infty$, $\infty\cdot 0$, 1^{∞} , 0^{0} e ∞^{0} .

Resolver a indeterminación consiste en transformar estas expresións en outras que nos permitan obter o valor do límite buscado, para o que se utilizan os seguintes critérios:

- a suma de infinitos é equivalente ao infinito de maior orde;
- substitución de infinitos ou infinitésimos equivalentes;
- división de polinómios dunha fración alxébrica pola maior poténcia da variábel;
- simplificación de fracións alxébricas;
- multiplicación pola expresión conxugada;
- uso de logaritmos;
- cámbios de variábel.

É de especial interese a indeterminación do tipo 1^{∞} , que se produce, entre outros casos, ao calcular o límite $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$. Pode-se demostrar que esta expresión ten como límite o número e : $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$.

Mediante diversas transformacións sabe-se tamén que $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$, e en xeral, se $\lim_{x\to\Delta} f(x)=0$, entón $\lim_{x\to\Delta}(1+f)^{\frac{1}{f}}=e$.

A resolución de indeterminacións do tipo 1^{∞} , realiza-se normalmente transformando a expresión en outra equivalente na que apareza algún dos límites anteriores, ou aplicando o cálculo de logaritmos.

Ex 6 Cálculo de límites II

- $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x$

  É un caso de indeterminación do tipo $\infty-\infty$, que resolveremos multiplicando polo conxugado:
  $$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-x)\cdot(\sqrt{x^2+x}+x)}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}$$

- $\lim_{x\to 3}\frac{x-\sqrt{x+6}}{x-3}$

  É un caso de indeterminación do tipo $\frac{0}{0}$, que resolveremos utilizando a multiplicación polo conxugado:
  $$\lim_{x\to 3}\frac{x-\sqrt{x+6}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-\sqrt{x+6})\cdot(x+\sqrt{x+6})}{(x-3)\cdot(x+\sqrt{x+6})}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-(x+6)}{(x-3)\cdot(x+\sqrt{x+6})}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{(x-3)\cdot(x+\sqrt{x+6})}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+2)\cdot(x-3)}{(x-3)\cdot(x+\sqrt{x+6})}=$$
  $$=\lim_{x\to 3}\frac{x+2}{x+\sqrt{x+6}}=\frac{5}{6}$$

- $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5-3}{x^2+3}$

  É un límite do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, que se pode resolver dividindo pola maior poténcia da variábel:

  $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5-3}{x^2+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{3}{x^5}}{\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^5}}=\frac{1}{0}=\infty$; como os límites de ambos polinómios son positivos, o cociente tamén e polo tanto resulta $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5-3}{x^2+3}=+\infty$.

- $\lim_{x\to0}\frac{sen(tg(sen\,x))}{sen(tg\,x)}$

  Como $x\approx sen\,x$ para $x\to0$, podemos substituir $sen\,x$ por x e resulta $\lim_{x\to0}\frac{sen(tg(sen\,x))}{sen(tg\,x)}=\lim_{x\to0}\frac{sen(tg\,x)}{sen(tg\,x)}=1$

- $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt[3]{x^2}}$

  É do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ e pode-se resolver transformando nunha única raíz e dividindo posteriormente pola maior poténcia da variábel: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt[3]{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[6]{\frac{(x+5)^3}{x^4}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[6]{\frac{x^3+15x^2+75x+125}{x^4}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[6]{\frac{1}{x}+\frac{15}{x^2}+\frac{75}{x^3}+\frac{125}{x^4}}=0$

- $\lim_{x\to1}\frac{x^4-1}{x-1}$

  É do tipo $\frac{0}{0}$ e resolve-se simpificando a fración alxébrica: $\lim_{x\to1}\frac{x^4-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^4-1}{x-1}=\lim_{x\to1}x^3+x^2+x+1=4$

- $\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$

  É do tipo $\frac{0}{0}$ e resolve-se multiplicando polo conxugado:

  $\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\sqrt{1-x^2})\cdot(1+\sqrt{1-x^2})}{x\cdot(1+\sqrt{1-x^2})}=\lim_{x\to0}\frac{1-(1-x^2)}{x\cdot(1+\sqrt{1-x^2})}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x\cdot(1+\sqrt{1-x^2})}=\lim_{x\to0}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}=0$

4. CONTINUIDADE

4.1. DEFINICIÓN DE CONTINUIDADE

Def 11 Sexa f unha función e sexa x_0 un elemento do domínio de f; di-se que f é contínua en x_0 $:\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Desta definición deduce-se que para que unha función sexa contínua no ponto x_0 han de dar-se as seguintes condicións:

i. f debe estar definida en x_0;

ii. ten que existir o límite de f en x_0;

iii. o límite há de coincidir co valor da función en x_0.

Di-se que f é contínua pola esquerda en x_0 $:\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

De igual forma di-se que f é contínua pola direita en x_0 $:\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

É imediato comprobar que a continuidade dunha función f nun ponto equivale a que a función sexa contínua pola esquerda e pola direita nese mesmo ponto. Nese caso resultará suficiente afirmar que a función é contínua nese ponto. En caso contrário será necesário estudar o continuidade lateral, que pode indicar comportamentos diferentes da función a cada un dos dous lados do ponto x_0.

Di-se que unha función f é contínua nun intervalo aberto $(a,b) \subset Dom\, f$ se f é contínua en todos e cada un dos elementos do intervalo. Unha función f é contínua nun intervalo pechado $[a,b] \subset Dom\, f$ se f é contínua en todos os elementos do intervalo (a,b) e é contínua pola direita en a e pola esquerda en b.

Ex 7 Estudar o valor de b para que a función $f(x) = \begin{cases} 2x+b & \text{se } x \leqslant 0 \\ x^2+2x+3 & \text{se } x>0 \end{cases}$ sexa contínua en todo o seu domínio.

Ao ser duas expresións polinómicas, e polo tanto contínuas en todo o seu domínio, a función f só pode presentar discontinuidades en $x=0$.

En $x=0$ temos $\lim_{x \to 0^-} f(x) = b$ e $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 3$.

Para que exista o límite en $x=0$ han de coincidir ambos, polo que $b=3$.

Asi resulta que $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 3$, logo f é contínua en $\mathbb{R}$.

4.2. DISCONTINUIDADES

A non continuidade dunha función nun ponto pode dar-se por várias circunstáncias, que provocan diferentes comportamentos gráficos da función nese ponto.

- Se os límites laterais son números reais iguais pero o valor da función no ponto non coincide con eles, di-se que a función ten unha discontinuidade evitábel:

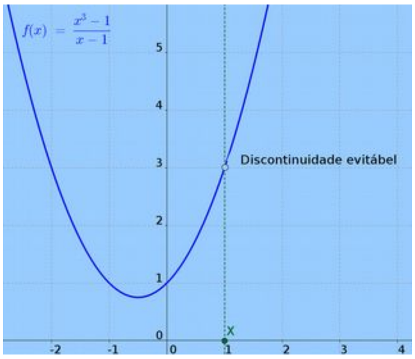
  $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) \neq f(a)$.

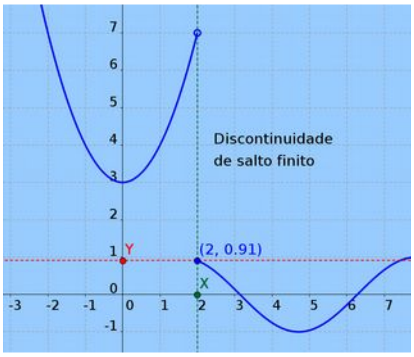
  [Nota: É posíbel que non exista $f(a)$ *, é dicer, que* $a \notin Dom\ f$ *.]*

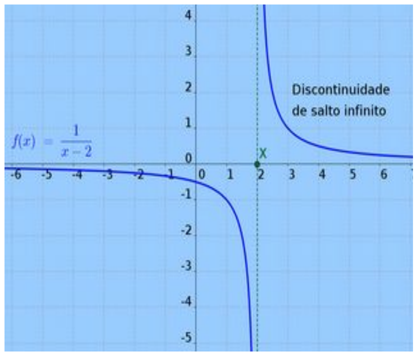
- Se ambos límites laterais son números reais distintos, di-se que a función presenta unha discontinuidade de salto finito: $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.

- Por último, se algún dos límites laterais (ou incluso ambos) son infinitos, di-se entón que a función presenta unha discontinuidade de salto infinito:

  $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty$.







Ex 8 Estudar a continuidade da función $f(x) = \dfrac{kx^2 - 8}{x+2}$ e estender o seu domínio de continuidade no caso de ser posíbel.

Ao ser un cociente de duas funcións polinómicas, e polo tanto contínuas en $\mathbb{R}$, a función f é tamén contínua e derivábel no seu domínio, que é $\mathbb{R} - \{-2\}$.

En $x = -2$ temos: $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \dfrac{4k-8}{0}$

Este límite é ∞ se $4k - 8 \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 2$, caso no que a función f presentará unha discontinuidade de salto infinito, e polo tanto non evitábel.

No caso de que $4k - 8 = 0 \Leftrightarrow k = 2$, $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2x^2 - 8}{x+2}$ é indeterminado do tipo $\dfrac{0}{0}$ e pode-se resolver simplificando a fración alxébrica:

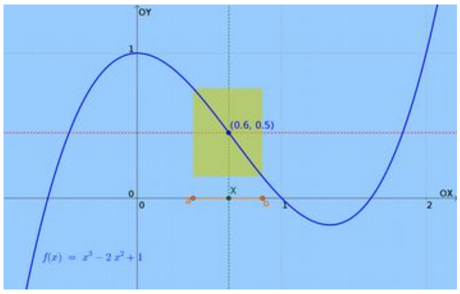
$$\lim_{x \to -2} \frac{2x^2 - 8}{x+2} = \lim_{x \to -2} \frac{2(x^2 - 4)}{x+2} = \lim_{x \to -2} \frac{2(x-2)(x+2)}{x+2} = \lim_{x \to -2} 2(x-2) = -8$$

A estensión da continuidade require que a discontinuidade sexa de tipo evitábel, asi que ten que ser $k = 2$, e a función será $f(x) = \dfrac{2x^2 - 8}{x+2}$. Para estender f a $\mathbb{R}$, abonda con definir $f(-2) := -8$ e daquela f convirte-se nunha función contínua en $\mathbb{R}$.

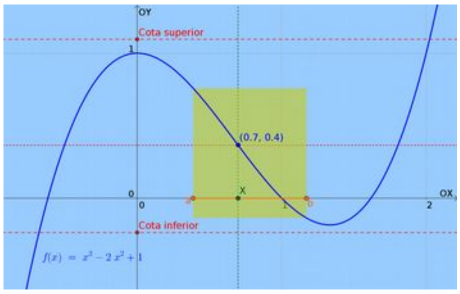
A función estendida é $\hat{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 8}{x+2} & se \quad x \neq -2 \\ -8 & se \quad x = -2 \end{cases}$, que tamén se pode expresar de xeito mais sintético $\hat{f}(x) = 2x - 4$, que é por suposto contínua en $\mathbb{R}$.

4.3. VÁRIOS RESULTADOS RELATIVOS Á CONTINUIDADE

i. Se f é unha función contínua en x_0 e $f(x_0)\neq 0$, entón existe un entorno de x_0 no que f toma valores do mesmo signo que $f(x_0)$.

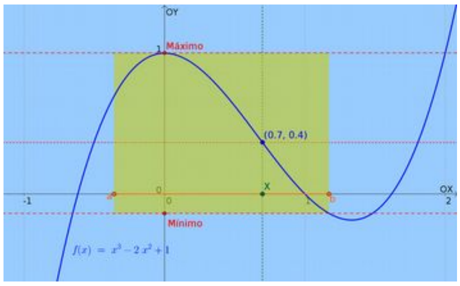


ii. Se f é unha función contínua en x_0, entón existe un entorno de x_0 no que f está acotada, é dicer, f toma valores dentro dun intervalo finito.



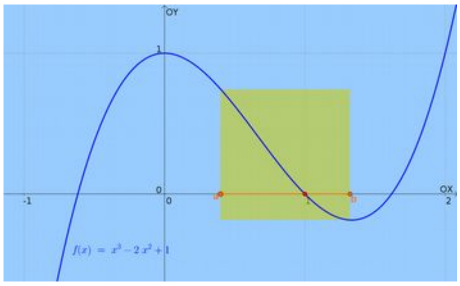
iii. <u>Teorema de Weierstrass</u>

Se f é unha función contínua no intervalo $[a,b]$, entón f alcanza nese intervalo un valor máximo e un valor mínimo.



Th 3 iv. <u>Teorema de Bolzano</u>

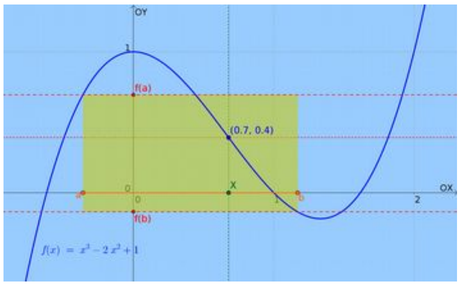
Se f é unha función contínua nun intervalo $[a,b]$ e f toma valores de signo oposto nos extremos deste intervalo, entón existe algún elemento no intervalo aberto (a,b) no que a función se anula: $\exists\, c\in(a,b)\ /\ f(c)=0$.



v. <u>Teorema de Darboux</u>

Se f é unha función contínua en $[a,b]$, entón f alcanza todos os valores comprendidos entre $f(a)$ e $f(b)$.

[Nota: No caso do Teorema de Darboux, en realidade f alcanza todos os valores comprendidos entre o máximo e o mínimo aos que se refire o teorema de Weierstrass.]



Ex 9 Estudar se a ecuación $e^x=2-\operatorname{sen}x$ ten algunha raíz real e procurar un intervalo no que se localice esa raíz.

A ecuación $e^x=2-\operatorname{sen}x$ é equivalente a $e^x+\operatorname{sen}x-2=0$, logo traballaremos coa función $f(x)=e^x+\operatorname{sen}x-2$, que é contínua en $\mathbb{R}$.

En $x=0$ temos $f(0)=e^0+\operatorname{sen}0-2=1-2=-1<0$ e en $x=\frac{\pi}{2}$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)-2=e^{\frac{\pi}{2}}+1-2=e^{\frac{\pi}{2}}-1>0$.

Asi que, aplicando o teorema de Bolzano, $\exists\ c\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\ /\ f(c)=0\ \Rightarrow\ c$ é unha solución da ecuación, que está localizada no intervalo $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

5. DERIVADA DUNHA FUNCIÓN NUN PONTO

5.1. TAXA DE VARIACIÓN MÉDIA

Dada unha función f, entende-se por incremento de f en x_0 a variación experimentada pola función cando x_0 varia. De forma mais concreta: chamaremos Δx ao incremento experimentado pola variábel independente e, de xeito similar, chamaremos Δf á diferenza $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

Def 12 Denomina-se taxa de variación média da función f no intervalo de extremos x_0 e $x_0+\Delta x$ ao cociente $\frac{\Delta f}{\Delta x}:=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

Este cociente representa a pendente do segmento de extremos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ e interpreta-se como a variación média da función no intervalo $(x_0, x_0+\Delta x)$.

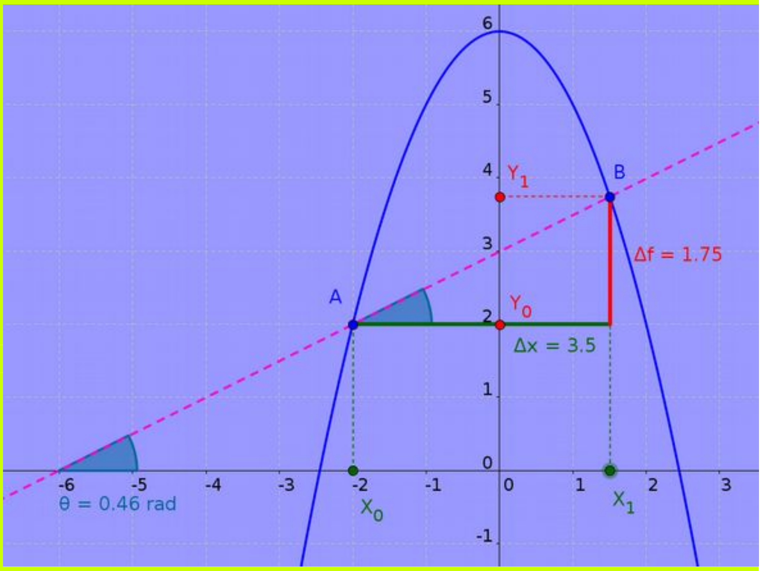
[Nota: Para evitar complicacións inecesárias, suporemos que Δx é positivo.]

Ex 10 Calcular a taxa de variación média da función $f(x)=6-x^2$ no intervalo $\left[-2, \frac{3}{2}\right]$ e o ángulo formado pola recta s, secante á curva nos pontos $x=-2$ e $x=\frac{3}{2}$ co eixo de abscisas e a ecuación de s.

$f(-2)=6-(-2)^2=6-4=2$ e $f\left(\frac{3}{2}\right)=6-\left(\frac{3}{2}\right)^2=6-\frac{9}{4}=\frac{15}{4}$, logo os pontos de abscisas $x=-2$ e $x=\frac{3}{2}$ son $A(-2,2)$ e $B\left(\frac{3}{2},\frac{15}{4}\right)$; a taxa de variación média é

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f\left(\frac{3}{2}\right)-f(-2)}{\frac{3}{2}-(-2)}=\frac{\frac{15}{4}-2}{\frac{7}{2}}=\frac{\frac{7}{4}}{\frac{7}{2}}=\frac{1}{2}=0,5 .$$

A taxa de variación média é a tanxente trigonométrica do ángulo, polo tanto $\theta(s,OX)=atg\,0,5\approx 0,46$, e como a recta s pasa polo ponto $A(-2,2)$ e ten pendente $\frac{1}{2}$, a sua ecuación é $y-2=\frac{1}{2}\cdot(x-(-2)) \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+3$.



5.2. DERIVADA DUNHA FUNCIÓN NUN PONTO

Na anterior definición da taxa de variación média, se chamamos h ao incremento Δx e calculamos o seu límite cando este incremento tende a cero, resulta a expresión $\lim_{h\to 0}\frac{\Delta f}{h}:=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Def 13 Atendendo a este límite, di-se que f é unha función derivábel en x_0 $:\Leftrightarrow\ \exists\ \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Se existe, este límite denomina-se derivada da función f no ponto x_0, e designa-se $f'(x_0)$: $f'(x_0):=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

A derivada dunha función f no ponto x_0 representa a pendente da sua gráfica no ponto de coordenadas $(x_0, f(x_0))$ e interpreta-se como a taxa de variación instantánea da función en x_0.

Ex 11 Calcular a derivada da función $f(x)=x^2-2x+3$ en $x=2$ utilizando a definición de derivada, e calcular tamén as ecuacións das rectas tanxente e normal á curva $f(x)$ no ponto $x=2$.

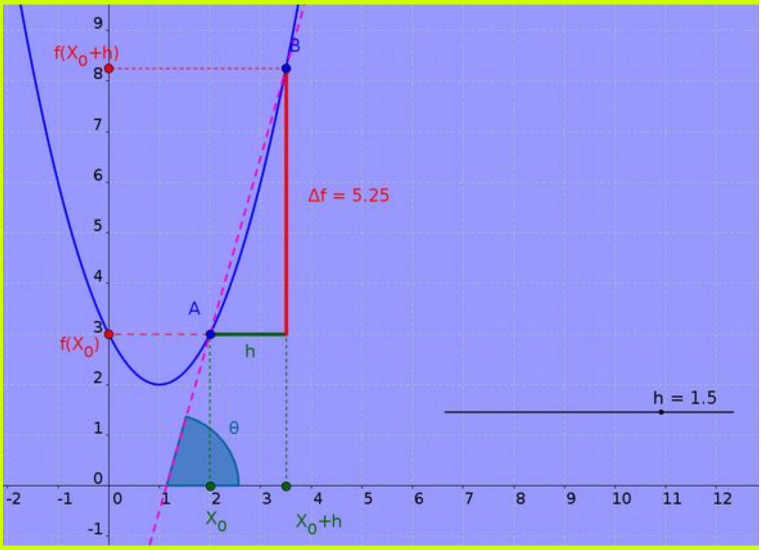
$f'(x_0):=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, e como $f(2)=3$, resulta:

$$f'(2):=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-2(2+h)+3-3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4+4h+h^2-4-2h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}2+h=2$$

Para o cálculo do ángulo faremos: $tg\,\theta=f'(2)=2\ \Rightarrow\ \theta=atg\,2=1{,}11\ rad$

A ecuación da tanxente será $y-f(2)=f'(2)\cdot(x-2)$, logo neste caso resulta $y-3=2\cdot(x-2)\ \Leftrightarrow\ y=2x-1$.
Esta tanxente é unha recta que ten a mesma pendente que a própria curva en $x=2$.

A recta normal é unha recta perpendicular á tanxente, polo tanto a sua pendente será a oposta da inversa da pendente da própria tanxente, logo $m=-\frac{1}{2}$ e a ecuación é $y-3=-\frac{1}{2}\cdot(x-2)\ \Leftrightarrow\ y=-\frac{1}{2}x+4$.



5.3. DERIVADAS LATERAIS

Def 14 Definen-se as derivadas laterais de f en x_0 da seguinte forma:

$f'(x_0^-) := \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ é a derivada lateral de f en x_0 pola esquerda e

$f'(x_0^+) := \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ é a derivada lateral de f en x_0 pola direita.

Estes límites representan a pendente de f no ponto $(x_0, f(x_0))$, considerando de maneira diferenciada os valores de x menores que x_0 (derivada lateral pola esquerda) ou maiores que x_0 (derivada lateral pola direita).

Desde logo, unha función f é derivábel en x_0 $\Leftrightarrow$ $f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$.

A derivabilidade dunha función nun ponto implica a continuidade no mesmo, xá que:

$$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{h \to 0} f(x_0+h)-f(x_0) = 0 \Rightarrow \lim_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, logo f é contínua en x_0 , e polo tanto, $x_0 \in Dom\, f$.

O recíproco non é certo, xá que é posíbel que unha función contínua nun ponto non sexa derivábel. Asi a derivabilidade dunha función é unha condición mais forte que a continuidade.

Di-se que unha función f é derivábel nun intervalo aberto $(a,b) \subset Dom\, f$ se f é derivábel en todos os elementos do intervalo e di-se que é derivábel nun intervalo pechado $[a,b] \subset Dom\, f$ se é derivábel no intervalo (a,b) e ademais é derivábel pola direita en a e pola esquerda en b .

Ex 12 Calcular o valor de m para que a función $f(x) = \begin{cases} mx-1 & se \ x<3 \\ 14-x^2 & se \ x \geqslant 3 \end{cases}$ sexa contínua en todo o seu domínio e estudar nese caso a derivabilidade en $x=3$.

Como $f(x) = mx-1 \ \forall \ x \in (-\infty, 3)$ e $f(x) = 14-x^2 \ \forall \ x \in (3, +\infty)$, ambas contínuas nos seus domínios, temos que f é contínua en $\mathbb{R} - \{3\}$.

Ademais f será contínua en $x=3$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$ $\Leftrightarrow$ $3m-1=5$ $\Leftrightarrow$ $m=2$.

Para $m=2$ temos que:

$$f'(3^-) := \lim_{h \to 0^-} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{2(3+h)-1-5}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{2h}{h} = 2$$

$$f'(3^+) := \lim_{h \to 0^+} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{14-(3+h)^2-5}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{-6h-h^2}{h} = \lim_{h \to 0^+} -6-h = -6$$

Logo, como $f'(3^-) \neq f'(3^+)$, a función non é derivábel en $x=3$.

5.4. FUNCIÓN DERIVADA

Dada unha función f, pode-se pensar na existéncia de outra función que, para cada elemento x do seu domínio, proporcione a derivada de f nese ponto. Este conceito é o que se coñece como función derivada de f e representa-se por $f'(x)$.

De forma similar pode definir-se a función derivada de $f'(x)$, que se coñece como a derivada segunda de f : $f''(x)$. E sucesivamente poden definir-se as derivadas terceira, cuarta ... e, en xeral, a derivada de orde n : $f^{(n}(x)$.

Ex 13 Calcular a función derivada de $f(x)=x^3-x+2$ e as derivadas de f en $x=-2$ e $x=\frac{1}{4}$.

$$f'(x):=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-(x+h)+2-(x^3-x+2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x-h+2-x^3+x-2}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3-h}{h}=\lim_{h\to 0}3x^2+3xh+h^2-1=3x^2-1$$

Logo a función derivada de f é $f'(x)=3x^2-1$.

As derivadas pedidas son $f'(-2)=3\cdot(-2)^2-1=11$ e $f'\left(\frac{1}{4}\right)=3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2-1=\frac{3}{16}-1=-\frac{13}{16}$.

5.5. A FUNCIÓN DIFERENCIAL

Entende-se por función diferencial unha recta que aproxima a variación producida no valor dunha función por unha pequena variación no valor da variábel independente. Se f é unha función derivábel no ponto x_0, a función diferencial de f en x_0 representa-se por df ou tamén dy, e a sua expresión é $dy=f'(x_0)\cdot dx$. Os elementos que aparecen nesta definición teñen o seguinte significado:

i. dx é a variábel independente desta función, e mide a variación experimentada na entrada do valor de x, é dicer, a diferenza entre o valor aproximado de x_0 e o próprio x_0;

ii. $f'(x_0)$ é o valor da derivada da función f no ponto x_0, e asi, a función diferencial é unha recta de igual pendente que a que ten a función f en x_0;

iii. dy é a variábel dependente desta función e dá o valor aproximado da variación sufrida polo valor de f debido á desviación de x a respeito do seu valor inicial x_0.

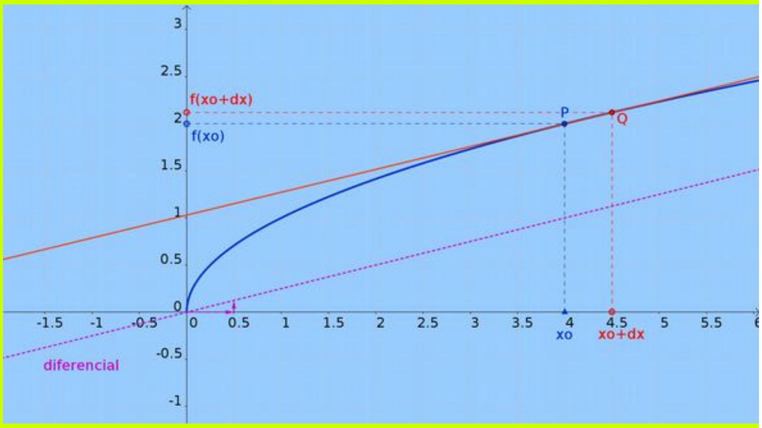
A diferencial permite aproximar funcións mediante cálculos simples, é dicer, pode calcular-se o valor aproximado que ten unha función f en x, próximo a x_0, do seguinte xeito: se dx é a desviación de x a respeito de x_0, que se mide restando $x-x_0$, entón $f(x_0+dx)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot dx$.

Ex 14 Calcular a diferencial da función $f(x)=\sqrt{x}$ en $x=4$ e obter de xeito aproximado o valor de $\sqrt{4{,}05}$ utilizando a diferencial.

A diferencial de f en $x=4$ é a recta $dy=f'(4)\cdot dx$; nesta recta dy representa a sua variábel dependente e dx a sua variábel independente.

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4)=\dfrac{1}{2\sqrt{4}}=\dfrac{1}{4}$, logo a recta é $dy=\dfrac{1}{4}dx$, que é unha recta de pendente $\dfrac{1}{4}$ e que pasa pola orixe de coordenadas.

Para calcular $\sqrt{4{,}05}$ faremos $x_0=4$ e $dx=0{,}05$.



Asi, $\sqrt{4{,}05}=f(4{,}05)=f(4+0{,}05)\approx f(4)+f'(4)\cdot 0{,}05=\sqrt{4}+\dfrac{1}{4}\cdot 0{,}05=2+0{,}0125=2{,}0125$, logo $\sqrt{4{,}05}\approx 2{,}0125$.

Se comparamos este valor aproximado co real, podemos observar que é unha mui boa aproximación: $\sqrt{4.05}=2{,}01246118\ldots\approx 2{,}0125$.

5.6. REGRAS DE DERIVACIÓN

No que segue dan-se algunhas propriedades do cálculo de derivadas, asi como várias regras de tipo prático, válidas para valores de x que pertenzan aos domínios de f e g.

i. As operacións suma, diferenza e produto de funcións derivábeis é unha función tamén derivábel.

   Se $f(x)$ e $g(x)$ son funcións derivábeis, entón:

   - $(f+g)'=f'+g'$ (di-se que a derivada conserva a suma de funcións)
   - $(f-g)'=f'-g'$ (a derivada conserva a diferenza de funcións)

ii. O produto dunha función derivábel por unha constante ou por outra función derivábel, tamén é derivábel.

   Se k é unha constante e $f(x)$ e $g(x)$ son funcións derivábeis, entón:

   - $(k\cdot f)'=k\cdot f'$ (a derivada conserva o produto por escalares)
   - $(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$

iii. O cociente de función derivábeis é unha función derivábel no seu domínio.

   Se $f(x)$ e $g(x)$ son funcións derivábeis, entón: $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2} \quad \forall x \ / \ g(x)\neq 0$

iv. Regra da cadea: a composición de funcións derivábeis é unha función derivábel.

   Se $f(x)$ e $g(x)$ son funcións derivábeis, entón:
   $(g\circ f)'(x)=g'[f(x)]\cdot f'(x) \quad \forall x \ / \ f(x)\in Dom\ g$.

5.7. DERIVADAS DAS FUNCIÓNS ELEMENTARES

Para o cálculo de derivadas das funcións elementares usan-se as seguintes fórmulas;

Notas: 1. *Nestas fórmulas, se f é unha función, expresaremos a sua derivada como $D(f)$.*
2. *Nas fórmulas de derivación composta, u representa unha función $u(x)$ e u' a sua derivada.*

1. Función potencial: $D(x^k)=k\cdot x^{k-1}$ $\quad D(u^k)=k\cdot u^{k-1}\cdot u'$
2. Función exponencial (base e): $D(e^x)=e^x$ $\quad D(e^u)=e^u\cdot u'$
3. Función exponencial (base $a>0$): $D(a^x)=a^x\cdot \ln a$ $\quad D(a^u)=a^u\cdot \ln a\cdot u'$
4. Función logaritmo natural (base e): $D(\ln x)=\dfrac{1}{x}$ $\quad D(\ln u)=\dfrac{u'}{u}$

   [Nota: No logaritmo natural, ou tamén neperiano, x ou u han de ser positivas.]

5. Función logarítmica (base $a>0$): $D(\log_a x)=\dfrac{1}{x\cdot \ln a}$ $\quad D(\log_a u)=\dfrac{u'}{u\cdot \ln a}$

   [Nota: x ou u han de ser positivas.]

6. Funcións trigonométricas:

$$D(\mathrm{sen}\, x)=\cos x \qquad D(\mathrm{sen}\, u)=\cos u\cdot u'$$

$$D(\cos x)=-\mathrm{sen}\, x \qquad D(\cos u)=-\mathrm{sen}\, u\cdot u'$$

$$D(\mathrm{tg}\, x)=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\mathrm{tg}^2 x \qquad D(\mathrm{tg}\, u)=\frac{u'}{\cos^2 u}=(1+\mathrm{tg}^2 u)\cdot u'$$

7. Funcións trigonométricas inversas:

$$D(\mathrm{asen}\, x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad D(\mathrm{asen}\, u)=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$D(\mathrm{acos}\, x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad D(\mathrm{acos}\, u)=-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$D(\mathrm{atg}\, x)=\frac{1}{1+x^2} \qquad D(\mathrm{atg}\, u)=\frac{u'}{1+u^2}$$

Ex 15 Calcular as funcións derivadas das funcións: $f(x)=5x^3-\dfrac{\mathrm{sen}\, x}{2}+8$, $g(x)=\mathrm{tg}\, x\cdot \ln x$, $h(x)=\dfrac{2x^2}{\cos x}$ e $j(x)=-2e^{\mathrm{sen}^2 x}$.

- $f'(x)=5\cdot 3x^2-\dfrac{\cos x}{2}=15x^2-\dfrac{\cos x}{2}$
- $g'(x)=\sec^2 x\cdot \ln x+\mathrm{tg}\, x\cdot \dfrac{1}{x}=\sec^2 x\cdot \ln x+\dfrac{\mathrm{tg}\, x}{x}$
- $h'(x)=\dfrac{4x\cdot\cos x-2x^2\cdot(-\mathrm{sen}\, x)}{\cos^2 x}=\dfrac{4x\cdot\cos x+2x^2\cdot\mathrm{sen}\, x}{\cos^2 x}=\dfrac{2x}{\cos^2 x}\cdot(2\cos x+x\,\mathrm{sen}\, x)$
- $j'(x)=-2e^{\mathrm{sen}^2 x}\cdot 2\,\mathrm{sen}\, x\cdot\cos x=-2e^{\mathrm{sen}^2 x}\cdot\mathrm{sen}\, 2x$

5.8. OUTROS MÉTODOS DE DERIVACIÓN

Derivada da función recíproca

Como consecuéncia da regra da cadea, pode obter-se a derivada dunha función f a partir da sua recíproca g.

Supoñendo que se coñece a derivada de g, resulta $(g\circ f)(x)=x$, e utilizando a regra da cadea para derivar ambos membros obtemos a derivada de f facendo: $g'[f(x)]\cdot f'(x)=1 \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{g'[f(x)]}$.

Ex 16 Obter a función derivada da función $f(x)=\ln x$.

Se chamamos g á función exponencial, $g(x)=e^x$, a función logarítmica resulta ser a sua recíproca: $f^{-1}(x)=g(x)$.

Sabemos que $(g\circ f)(x)=x$, e pola regra da cadea, derivando ambos membros obtemos:

$$g'[f(x)]\cdot f'(x)=1 \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{g'[f(x)]}$$

Sabemos que $g'(x)=e^x$ e que $f(x)=\ln x$, asi que na expresión anterior obtemos $f'(x)=\dfrac{1}{g'[f(x)]}=\dfrac{1}{e^{\ln x}}=\dfrac{1}{x}$.

Asi que a derivada de $f(x)=\ln x$ é $f'(x)=\dfrac{1}{x}$.

Derivación implícita

Este método utiliza-se para derivar funcións expresadas de maneira implícita, é dicer, funcións nas que a variábel dependente y non aparece de xeito directo como unha expresión da variábel independente x. Nestes casos as expresións en x (variábel independente) derivan-se normalmente e as expresións en y (variábel dependente) derivan-se como funcións compostas, engadindo-lle o factor y'. Este factor resolverá-se finalmente como función do resto de expresións aparecidas durante o proceso de derivación.

Ex 17 Obter a función derivada da función y na expresión implícita $xy^2+y^3-x^2+2=0$.

Ao derivar ambos membros resulta $y^2+2xyy'+3y^2y'-2x=0$.

Extraendo factor común e resolvendo y' obtemos $(2xy+3y^2)\cdot y'=2x-y^2 \Rightarrow y'=\dfrac{2x-y^2}{2xy+3y^2}$.

Derivación logarítmica

É útil principalmente no caso de expresións que conteñen poténcias nas que a variábel x aparece tanto na base como no exponente. Nestes casos, aplicando as propriedades logarítmicas é posíbel transformar a expresión orixinal en outra que permite aplicar as regras de derivación.

Ex 18 Obter a función derivada da función $f(x)=x^{\operatorname{sen} x}$.

Utilizando as propriedades dos logaritmos resulta que $\ln[f(x)]=\ln\left[x^{\operatorname{sen} x}\right]=\operatorname{sen} x\cdot\ln x$, e derivando ambos membros da identidade obtén-se $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\cos x\cdot\ln x+\operatorname{sen} x\cdot\dfrac{1}{x}$.

Resolvendo $f'(x)$ temos $f'(x)=\left(\cos x\cdot\ln x+\operatorname{sen} x\cdot\dfrac{1}{x}\right)\cdot f(x)=\left(\cos x\cdot\ln x+\operatorname{sen} x\cdot\dfrac{1}{x}\right)\cdot x^{\operatorname{sen} x}$.

6. TEOREMAS DO CÁLCULO DIFERENCIAL

6.1. TEOREMA DE ROLLE

Un dos obxectivos principais do cálculo diferencial é a expresión dunha función como suma dunha série de funcións potenciais: en certo modo, as funcións potenciais permiten aproximar cuase calquer función. Nesta direción apontan os teoremas que seguen, ainda que neste tema non se dá por completado este proceso.

Th 4 *Teorema de Rolle*

Sexa f unha función contínua no intervalo $[a,b]$, derivábel no intervalo (a,b) e tal que $f(a)=f(b)$; entón $\exists\, c\in(a,b)\ /\ f'(c)=0$.

Demostración

Como consecuéncia do teorema de Weierstrass, a función f alcanzará un máximo e un mínimo absolutos no intervalo $[a,b]$. No caso de que estes valores se atopen ambos nos extremos do intervalo, entón estamos ante unha función constante no intervalo $[a,b]$ e polo tanto a sua derivada será nula en todo o intervalo.

En outro caso, ben o máximo ou ben o mínimo alcanzarán-se no interior do intervalo; supoñamos que é o máximo o que se alcanza no intervalo (a,b). Neste caso $\exists\, c\in(a,b)\ /\ \forall x\in[a,b]\ f(c)\geqslant f(x)$.

Logo se h é o incremento da variábel x, temos que $f(c+h)\leqslant f(c)\ \Rightarrow\ f(c+h)-f(c)\leqslant 0$. Asi, xá que a función é derivábel en c, existen as duas derivadas laterais, que resultan:

i. se $h>0$: $f'(c^+)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}\leqslant 0$;

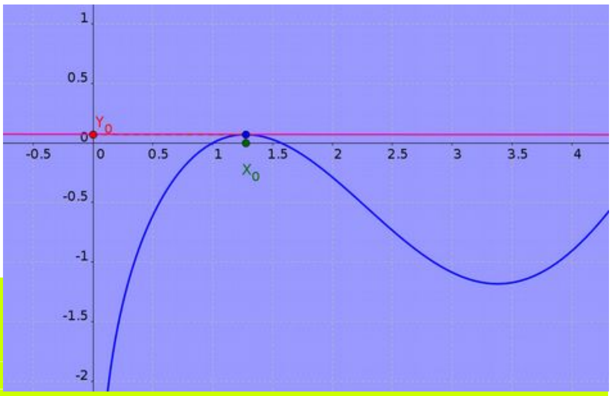
ii. se $h<0$: $f'(c^-)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}\geqslant 0$.

Mas ambas derivadas laterais han de coincidir, e polo tanto $f'(c)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}=0$.

[Nota: Se fose o mínimo o que se atopa no intervalo (a,b), a demostración seria análoga.]

Interpretación xeométrica do Teorema de Rolle

Unha función contínua e derivábel ("suave"), que tome o mesmo valor nos extremos dun intervalo fechado, presenta polo menos un ponto do intervalo no que a sua pendente é nula. Este ponto de pendente nula representa un extremo relativo da función (máximo ou mínimo).



Ex 19 Estudar se a función $f(x)=\ln x\cdot\cos x$ presenta algún ponto no que a sua derivada sexa nula e indicar un intervalo no que se localice a solución.

$f'(x)=0\ \Leftrightarrow\ \dfrac{1}{x}\cdot\cos x-\ln x\cdot\operatorname{sen} x=0$, ecuación que resulta imposíbel de resolver polos métodos habituais.

A función é contínua e derivábel en $(0,+\infty)$; $f(1)=\ln 1\cdot\cos 1=0$ e $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\ln\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2}=0$, logo polo Teorema de Rolle há de existir $c\in\left(1,\frac{\pi}{2}\right)\ /\ f'(c)=0$.

6.2. TEOREMA DO VALOR MÉDIO DO CÁLCULO DIFERENCIAL

Th 5 *Teorema do Valor Médio do Cálculo Diferencial (ou de Lagrange)*

Sexa f unha función contínua no intervalo $[a,b]$ e derivábel no intervalo (a,b); entón $\exists\, c\in(a,b)\ /\ f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Demostración

Define-se a función $s(x):=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)+f(a)$, que representa a recta secante (corda) determinada polos pontos $(a,f(a))$ e $(b,f(b))$, e a partir desta define-se $g(x):=f(x)-s(x)$, que representa a diferenza entre a función f e a recta secante s.

É imediato probar que a función g está nas hipóteses do teorema de Rolle:

i. $g(x)$ é unha función contínua en $[a,b]$, por ser diferenza de duas funcións contínuas (f por hipótese e s por ser unha recta);
ii. $g(x)$ é unha función derivábel en (a,b), por ser diferenza de duas funcións derivábeis (de novo f por hipótese e s por ser unha recta);
iii. $g(a)=g(b)$.

Logo, para a función g o Teorema de Rolle afirma que $\exists\, c\in(a,b)\ /\ g'(c)=0$. E como $g'(x):=f'(x)-s'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, obtemos que:

$$g'(c)=0\ \Rightarrow\ g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0\ \Rightarrow\ f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Interpretación xeométrica do Teorema de Lagrange

Na demostración do teorema, a función definida como $s(x)$ presenta unha variación constante entre os pontos $(a,f(a))$ e $(b,f(b))$ por ser unha recta, e a sua pendente é $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, cociente que representa a taxa de variación média de función $f(x)$.

O teorema afirma que no intervalo (a,b) há de existir algún ponto c no que a variación instantánea, que ven representada pola derivada $f'(c)$, coincida coa taxa de variación média $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Ex 20 Estudar se a función $f(x)=3x^3-4$ está nas hipóteses do Teorema de Lagrange e, nese caso, calcular o ponto c ao que se refire o teorema no intervalo $[-1,4]$.

A función é contínua e derivábel en todo o seu domínio, e en particular no intervalo $[-1,4]$, asi que $\exists\, c\in[-1,4]\ /\ f'(c)=\dfrac{f(4)-f(-1)}{4-(-1)}$.

$f'(x)=9x^2$, logo $9x^2=\dfrac{f(4)-f(-1)}{4-(-1)}=\dfrac{188-(-7)}{5}\ \Leftrightarrow\ 9x^2=\dfrac{195}{5}=39\ \Leftrightarrow\ x=\pm\sqrt{\dfrac{39}{9}}=\pm\dfrac{\sqrt{39}}{3}$.

$-\dfrac{\sqrt{39}}{3}\notin(-1,4)$, logo o ponto ao que se refire o teorema é $c=\dfrac{\sqrt{39}}{3}\in(-1,4)$.

6.3. REGRA DE L'HÔPITAL

Unha das consecuéncias do anterior é a Regra de L´Hôpital, útil para a resolución dun grande número de indeterminacións que aparecen habitualmente no cálculo de límites.

Th 6 *Regra de L'Hôpital*

Sexan f e g duas funcións contínuas nun entorno do ponto a, e derivábeis nese mesmo entorno (salvo posibelmente no próprio a), tal que $\lim_{x\to a} f(x)=0$ e $\lim_{x\to a} g(x)=0$ (infinitésimos en a). Nestas circunstáncias, se existe o límite $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$, entón: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$.

[Nota: Deixa-se sen demostrar.]

A regra de L'Hôpital resolve indeterminacións do tipo $\frac{0}{0}$, calculando o límite do cociente das derivadas do numerador e do denominador, mas permite tamén resolver de maneira idéntica a indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ e, con pequenas modificacións na expresión da función que se está a manexar, resolve ademais indeterminacións dos tipos $\infty-\infty$, $\infty\cdot 0$, 1^{∞}, 0^0 e ∞^0.

É asimesmo de aplicación no cálculo de límites infinitos, límites no infinito e límites laterais.

Ex 21 Cálculo de límites III: regra de L'Hôpital.

- $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x\cdot e^x}$

  É un caso de indeterminación do tipo $\frac{0}{0}$, que resolveremos utilizando a Regra de L'Hôpital e simplificando: $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x\cdot e^x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+x\cdot e^x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}=1$

- $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x+1-e^x}$

  É un caso de indeterminación do tipo $\frac{0}{0}$, que resolveremos usando a Regra de L'Hôpital e simplificando: $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x+1-e^x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{1-e^x}$. Este límite segue a ser do tipo $\frac{0}{0}$, polo que podemos aplicar de novo L'Hôpital: $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{1-e^x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{-e^x}=-2$

- $\lim_{x\to 0^+} x^x$

  É do tipo potencial-exponencial e resolve-se aplicando as propriedades logarítmicas: $\lim_{x\to 0^+} x^x=e^{\ln \lim_{x\to 0^+} x^x}=e^{\lim_{x\to 0^+}\ln x^x}=e^{\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln x}$

  O límite do exponente é do tipo $0\cdot\infty$ e pode-se resolver transformando-o nun cociente e usando posteriormente a Regra de L'Hôpital: $\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+} -x=0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} x^x=e^{\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln x}=e^0=1$

7. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIÓNS

No que segue, expoñen-se os principais elementos a estudar cara a representación gráfica dunha función. A orde da exposición responde a un esquema tradicional, ainda que non é preceptiva. Tampouco é imprescindíbel realizar o estudo completo en todos os casos; en ocasións o estudo duns poucos elementos resulta suficiente para obter unha boa representación gráfica da función.

7.1. DOMÍNIO DE DEFINICIÓN

Se non se indica de forma explícita, entenderemos que o domínio dunha función é o conxunto de todos os números reais nos que a expresión ten sentido. A estes efeitos, o cálculo do domínio contemplará os distintos elementos que integran a fórmula alxébrica. En particular, haberá que ter en conta os valores en que se anule algún denominador, os valores que produzan radicandos negativos en raíces de índice par, no caso dos logaritmos os valores para os que o argumento resulte nulo ou negativo, no caso das funcións exponenciais os valores para os que a base sexa de signo negativo ou os valores que produzan poténcias de base e exponente nulos.

7.2. CONTINUIDADE E DERIVABILIDADE

Relacionado co domínio, debe-se estudar tamén a continuidade da función, identificando as posíbeis discontinuidades que aparezan e o tipo a que pertencen, e a derivabilidade, identificando os valores para os que a función non é derivábel.

7.3. PONTOS DE CORTE COS EIXOS

Consiste en obter as coordenadas dos pontos nos que a gráfica corta ao eixo de abscisas (eixo OX) e ao de ordenadas (eixo OY).

No primeiro caso o cálculo realiza-se resolvendo a ecuación $f(x)=0$. Se x_0 é unha solución desta ecuación, entón o ponto $A(x_0,0)$ é un ponto de corte co eixo OX (é posíbel que non existan pontos de corte co eixo OX , ou que existan mais de un).

No segundo caso calcula-se $f(0)$, sempre que $0 \in Dom\, f$, de xeito que o ponto $B(0,f(0))$ é o ponto de corte co eixo OY . Se existe ponto de corte co eixo OY , é único.

7.4. SIGNO DA FUNCIÓN

Consiste en obter os intervalos en que os valores da función son de signo positivo ou negativo. Para realizar este estudo hai que ter en conta os intervalos de definición da función (o domínio), as discontinuidades e os pontos de corte co eixo OX .

7.5. SIMETRIA

O estudo da simetria dunha función consiste na comparación do valor de f en pontos opostos x e $-x$,e para iso calcula-se a expresión $f(-x)$.

Diremos que f presenta unha simetria par se do cálculo anterior resulta $f(-x)=f(x)\ \forall x \in Dom\, f$; e diremos que f presenta unha simetria impar se resulta $f(-x)=-f(x)\ \forall x \in Dom\, f$.

En termos gráficos, a simetria par representa unha reflexión a respeito do eixo OY , e a simetria impar representa un xiro de 180^o arredor da orixe de coordenadas.

7.6. PERIODICIDADE

Esta característica aparece asociada a algunhas funcións de tipo trigonométrico. Unha función f é periódica se $\exists\ T \in \mathbb{R}\ /\ \forall\ x \in Dom\ f\ \ f(x)=f(x+T)$. Neste caso o valor T chama-se periodo da función.

7.7. ASÍNTOTAS

As asíntotas dunha función son rectas que aproximan a sua gráfica en certas rexións do plano cartesiano. Existen trés tipos de asíntotas.

Asíntotas horizontais

Representan unha aproximación dos valores da función para valores de x extremadamente distantes da orixe de coordenadas, no caso de que a función tenda a estabilizar-se nun valor constante.

Para obter estas asíntotas calculan-se os límites da función cando x tende a $+\infty$ ou a $-\infty$, se existen: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=c\in\mathbb{R} \Rightarrow y=c$ é unha asíntota horizontal de f.

Asíntotas oblícuas

Igual que as asíntotas horizontais, representan unha aproximación dos valores da función para valores extremos de x, no caso de que a función tenda a adoptar un crecimento ou decrecimento constantes. Estas asíntotas son rectas de pendente non nula, que terán unha ecuación do tipo $y=mx+b$.

A pendente m desta recta obtén-se calculando $m=\lim_{x\to\pm\infty} f'(x)$ ou tamén $m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$, sempre e cando estes límites sexan reais e non nulos.

A ordenada na orixe b obtén-se calculando $b=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-mx$, de xeito que se $m, b\in\mathbb{R}$ e $m\neq 0$, entón $y=mx+b$ será a asíntota buscada.

[Nota: Pode acontecer que existan asíntotas horizontais ou oblícuas diferentes en $x\to+\infty$ e en $x\to-\infty$; mas o que non pode ocorrer por razóns óbvias é que no mesmo lado convivan unha asíntota horizontal con outra oblícua.]

Asíntotas verticais

Representan o comportamento da función no entorno dos pontos onde se producen discontinuidades de tipo infinito.

Se acontece que algún dos límites laterais (ou ambos) é infinito, é dicer, se $\lim_{x\to a^-} f(x)=\infty$ ou $\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$, entón a recta $x=a$ é unha asíntota vertical de f.

7.8. MONOTONIA E EXTREMOS

O estudo da monotonia consiste en coñecer os intervalos en que a función é crecente ou decrecente. Para a localización destes intervalos haberá que tomar en consideración os intervalos de definición da función (domínio), as posíbeis discontinuidades e os valores de x en que se anula a primeira derivada de f. O signo da primeira derivada nos intervalos resultantes da análise anterior indica o crecimento ou decrecimento en cada un deles. De forma mais precisa: se f é unha función derivábel nun intervalo aberto I, entón:

i. $\forall x \in I \;\; f'(x) > 0 \;\Rightarrow\; f$ é estritamente crecente no intervalo I;

ii. $\forall x \in I \;\; f'(x) < 0 \;\Rightarrow\; f$ é estritamente decrecente no intervalo I.

Para a obtención dos extremos relativos da función terán-se en conta os valores de x que son extremos dos intervalos de definición da función e os valores nos que a función ten derivada nula. En particular:

i. se f é contínua en x_0, estritamente crecente no intervalo (a, x_0) e estritamente decrecente no intervalo (x_0, b), entón f ten un máximo relativo en x_0;

ii. se f é contínua en x_0, estritamente decrecente no intervalo (a, x_0) e estritamente crecente no intervalo (x_0, b), entón f ten un mínimo relativo en x_0.

Ou ben, atendendo ao valor da primeira derivada:

i. se $f'(x_0)=0$ e $f''(x_0)<0$ entón f ten un máximo relativo en x_0;

ii. se $f'(x_0)=0$ e $f''(x_0)>0$ entón f ten un mínimo relativo en x_0.

En xeral, se $f^{(n}(x_0)=0 \;\; \forall n \leqslant N$ e $f^{(N+1}(x_0) \neq 0$, sendo N un número impar, entón f ten un extremo relativo en x_0.

O estudo dos máximos e mínimos absolutos dunha función deberá contemplar todos os extremos relativos, o domínio e as posíbeis discontinuidades.

7.9. CURVATURA E PONTOS DE INFLEXIÓN

Por convénio entende-se que a función $y = x^2$ é convexa. O estudo da curvatura dunha función consiste en determinar os intervalos en que a función é cóncava ou convexa. Para determinar estes intervalos haberá que ter en conta os intervalos de definición da función, as posíbeis discontinuidades e os valores de x nos que a derivada segunda se anula. Dado un intervalo aberto I no que a función é duas veces derivábel, ten-se que:

i. $\forall x \in I \;\; f''(x) > 0 \;\Rightarrow\; f$ é convexa no intervalo I;

ii. $\forall x \in I \;\; f''(x) < 0 \;\Rightarrow\; f$ é cóncava no intervalo I.

Chama-se ponto de inflexión a todo ponto da gráfica no que a función muda a sua curvatura. Se f é contínua en x_0, e presenta curvatura de diferente signo nos intervalos (a, x_0) e (x_0, b), entón f ten un ponto de inflexión en x_0.

O seguinte critério proporciona pontos de curvatura dunha función: se $f''(x_0)=0$ e $f'''(x_0) \neq 0$ entón f ten un ponto de inflexión en x_0.

E, en xeral, se $f^{(n}(x_0)=0 \;\; \forall n \leqslant N$ e $f^{(N+1}(x_0) \neq 0$, sendo N un número par, entón f ten un ponto de inflexión en x_0.

Un estudo completo dos pontos de inflexión deberá contemplar tamén a posibilidade de que existan pontos con tanxente vertical.

Ex 22 Facer un estudo completo da función $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$ e representá-la graficamente.

Domínio, continuidade e derivabilidade

Por ser cociente de dous polinómios, é unha función continua e derivábel en todo o seu domínio: $Dom\, f=\mathbb{R}-\{-2,2\}$.
Non é periódica (por non ser trigonométrica) e presenta unha simetria impar: $f(-x)=\dfrac{-x}{(-x)^2-4}=-\dfrac{x}{x^2-4}=-f(x)$

En $x=-2$ temos: $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x}{x^2-4}=\infty$; e os límites laterais son: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{x}{x^2-4}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{x}{x^2-4}=+\infty\end{cases}$

En $x=2$ temos: $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x}{x^2-4}=\infty$; e os límites laterais son: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x}{x^2-4}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x}{x^2-4}=+\infty\end{cases}$

Logo f ten duas discontinuidades de salto infinito en $x=-2$ e $x=2$, polo que presenta duas asíntotas verticais.

Cortes cos eixos e signo

Eixo OX : $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$, asi que corta ao eixo OX no ponto $O(0,0)$, que é tamén o ponto de corte co eixo OY.

O signo virá determinado polas discontinuidades e polos pontos de corte co eixo OX :

- En $(-\infty,-2)$: $f(-3)<0 \Rightarrow f(x)<0 \;\; \forall\, x\in(-\infty,-2)$
- En $(-2,0)$: $f(-1)>0 \Rightarrow f(x)>0 \;\; \forall\, x\in(-2,0)$
- En $(0,2)$: $f(1)<0 \Rightarrow f(x)<0 \;\; \forall\, x\in(0,2)$
- En $(2,+\infty)$: $f(3)>0 \Rightarrow f(x)>0 \;\; \forall\, x\in(2,+\infty)$

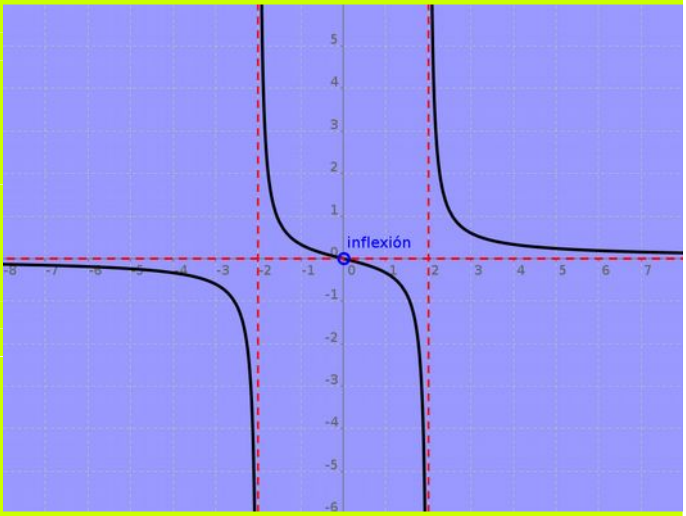
Asíntotas

Asíntotas horizontais: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2-4}=0$, logo existe unha asíntota horizontal $y=0$ en $x\to\pm\infty$.
Asíntotas verticais: $x=-2$ e $x=2$ como xá foi determinado anteriormente.
Asíntotas oblícuas: non existen debido a que existe asíntota horizontal tanto en $x\to+\infty$ como en $x\to-\infty$.

Monotonia e Extremos

$f'(x)=\dfrac{x^2-4-x\cdot2x}{(x^2-4)^2}=\dfrac{-x^2-4}{(x^2-4)^2}$;

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -x^2-4=0 \Leftrightarrow x^2+4=0$, logo non hai extremos relativos.
A primeira derivada pode-se expresar da forma $f'(x)=-\dfrac{x+4}{(x-4)^2}<0 \;\; \forall\, x\in Dom\, f$, e polo tanto f é monótona decrecente en todo o seu domínio.



Curvatura e Pontos de Inflexión

$f''(x)=\dfrac{-2x\cdot(x^2-4)^2-(-x^2-4)\cdot2\cdot(x^2-4)\cdot2x}{(x^2-4)^4}=$

$=\dfrac{(-2x)\cdot(x^2-4)+4x\cdot(x^2+4)}{(x^2-4)^3}=\dfrac{2x\cdot(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$;

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

Logo hai unha posíbel inflexión en $x=0$, e estudaremos o signo da segunda derivada nos intervalos:

- $(-\infty,-2)$: $f''(-3)<0 \Rightarrow f''(x)<0 \;\; \forall\, x\in(-\infty,-2)$
- $(-2,0)$: $f''(-1)>0 \Rightarrow f''(x)>0 \;\; \forall\, x\in(-2,0)$
- $(0,2)$: $f''(1)<0 \Rightarrow f''(x)<0 \;\; \forall\, x\in(0,2)$
- $(2,+\infty)$: $f''(3)>0 \Rightarrow f''(x)>0 \;\; \forall\, x\in(2,+\infty)$

Logo f é cóncava en $(-\infty,-2)\cup(0,2)$ e convexa en $(-2,0)\cup(2,+\infty)$.

8. OPTIMIZACIÓN

O problema da optimización consiste na procura dos valores óptimos (os extremos, máximos ou mínimos) de determinadas funcións que representan fenómenos de tipo físico, xeométrico, técnico, económico ou, en xeral, problemas que se podan modelar mediante a relación numérica entre (no noso caso) duas variábeis. Para a resolución deste tipo de problemas é necesário dar os seguintes pasos.

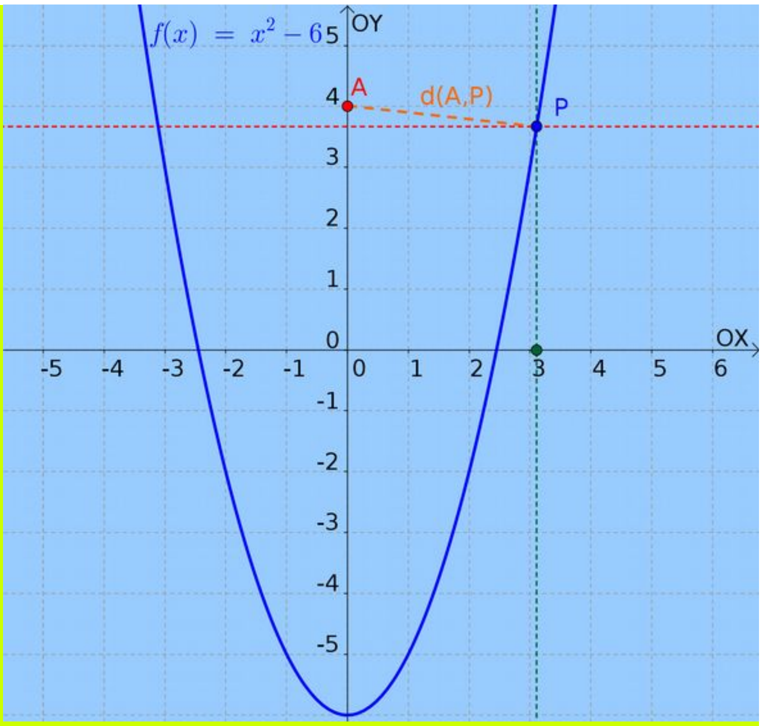
i. *Identificación das variábeis*. É necesário definir as magnitudes variábeis do problema. Entre estas magnitudes (que no noso nível, haberán de reducir-se a duas) determinará-se a variábel independente e o resto de variábeis ou magnitudes que son dependentes dela. Para estabelecer estas relacións de dependéncia entre as distintas variábeis terán-se en conta as posíbeis restricións do problema, ou sexa, aquelas magnitudes que estean sometidas a algúnha condición. Terán-se en conta ademais os valores das variábeis que non teñen cabida no problema por carecer de significado (por exemplo, lonxitudes negativas).

ii. *Obtención da relación funcional*. As condicións do problema deberán permitir estabelecer unha relación funcional entre a variábel independente e a magnitude que se desexa optimizar, de maneira que os valores que tome esta última podan expresar-se exclusivamente como función da variábel independente. En ocasións esta relación é unha expresión implícita, ou sexa, unha ecuación na que se ven involucradas ambas variábeis.

iii. *Cálculo dos extremos relativos*. Utilizando as técnicas do cálculo diferencial, calcularán-se os extremos relativos da función obtida anteriormente. Para realizar un estudo correcto dos extremos analisarán-se as restricións próprias do problema e determinarán-se no seu caso os extremos absolutos. A determinación dos extremos relativos implica ademais distinguir se son máximos ou mínimos

iv. *Conclusión*. Unha vez obtidos os extremos absolutos, dará-se unha interpretación do resultado en relación ás magnitudes que aparecen no enunciado do problema, para rexeitar aquelas solucións que posibelmente non respondan ás condicións iniciais ou restricións, e exporá-se de maneira completa e ordenada a solución final do problema e o valor óptimo da magnitude que se buscaba.

Ex 23 Obter os pontos da gráfica da función $f(x)=x^2-6$ que se atopan a menor distáncia do ponto $A(0,4)$.



Os pontos da gráfica de f son da forma $P(x,x^2-6)$, e a distáncia do ponto P ao ponto A pode-se expresar da forma: $d(A,P)=\sqrt{(x-0)^2+(x^2-6-4)^2}=\sqrt{x^4-19x^2+100}$.

Logo a función a optimizar é $d(x)=\sqrt{x^4-19x^2+100}$.

$$d'(x)=\frac{4x^3-38x}{2\sqrt{x^4-19x^2+100}}=\frac{2x^3-19x}{\sqrt{x^4-19x^2+100}}$$

$d'(x)=0 \Leftrightarrow 2x^3-19x=0 \Leftrightarrow x\cdot(2x^2-19)=0$, logo existen trés posíbeis extremos relativos, que son $x_1=0$, $x_2=+\sqrt{\frac{19}{2}}$ e $x_3=-\sqrt{\frac{19}{2}}$.

Obtemos a derivada segunda para determinar se son máximos ou mínimos:

$$d''(x)=\frac{(6x^2-19)\cdot\sqrt{x^4-19x^2+100}-(2x^3-19x)\cdot\frac{2x^3-19x}{\sqrt{x^4-19x^2+100}}}{x^4-19x^2+100}=\frac{(6x^2-19)\cdot(x^4-19x^2+100)-(2x^3-19x)^2}{\sqrt{(x^4-19x^2+100)^3}}$$

O signo da segunda derivada depende exclusivamente do seu numerador, que é $(6x^2-19)\cdot(x^4-19x^2+100)-(2x^3-19x)^2=2x^6-57x^4+600x^2-1.900$

Esta expresión toma valor $-1.900<0$ en $x=0$, e en $x=\pm\sqrt{\frac{19}{2}}$ toma valor:

$$2\cdot\left(\pm\sqrt{\frac{19}{2}}\right)^6-57\cdot\left(\pm\sqrt{\frac{19}{2}}\right)^4+600\cdot\left(\pm\sqrt{\frac{19}{2}}\right)^2-1.900=2\cdot\left(\frac{19}{2}\right)^3-57\cdot\left(\frac{19}{2}\right)^2+600\cdot\frac{19}{2}-1.900=\frac{6.859}{4}-\frac{20.577}{4}+5.700-1.900=$$

$$=\frac{741}{2}>0$$

Logo existen dous mínimos relativos para a distáncia, que son $x_1=+\sqrt{\frac{19}{2}}$ e $x_2=-\sqrt{\frac{19}{2}}$.

En ambos casos a distáncia é a mesma, por simetria:

$$d\left(\pm\sqrt{\frac{19}{2}}\right)=\sqrt{\left(\pm\sqrt{\frac{19}{2}}\right)^4-19\left(\pm\sqrt{\frac{19}{2}}\right)^2+100}=\sqrt{\left(\frac{19}{2}\right)^2-19\cdot\frac{19}{2}+100}=\sqrt{\frac{361}{4}-\frac{361}{2}+100}=\sqrt{\frac{39}{4}}=\frac{\sqrt{39}}{2}.$$

$d=\frac{\sqrt{39}}{2}$ é a distáncia mínima entre os pontos da gráfica de f e o ponto A.

TEMA 1 / CÁLCULO DIFERENCIAL EXERCÍCIOS E SOLUCIÓNS

1. FUNCIÓNS, SUCESIÓNS, LÍMITES E CONTINUIDADE

1. Calcular o domínio, signo e asíntotas das funcións:

i. $f(x)=\frac{x^2}{(x+1)^2}$

ii. $g(x)=\frac{1}{(x-1)\cdot ln(x+3)}$

iii. $h(x)=\sqrt{e^x-2}$

iv. $i(x)=\sqrt{sen\,2x}$

v. $k(x)=ln(x^2-3)$

2. Calcular para as funcións anteriores:

i. $f(-\sqrt{2})$ v. $f^{-1}(1)$ ix. $h(0)$ xiii. $i^{-1}(1)$ xvii. $k^{-1}(-5)$

ii. $f(0)$ vi. $f^{-1}(-2)$ x. $h(2)$ xiv. $i^{-1}(0)$ xviii. $Im\,f$

iii. $f(-1)$ vii. $g(1)$ xi. $h^{-1}(5)$ xv. $k(-1)$ xix. $Im\,h$

iv. $f^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$ viii. $g(-2)$ xii. $i\left(\frac{\pi}{4}\right)$ xvi. $k^{-1}(5)$ xx. $Im\,i$

3. Calcular as seguintes composicións de funcións, onde $f(x)=\frac{x}{x-1}$, $g(x)=ln\,x$ e $h(x)=e^{2x}$:

i. $f\circ g$ ii. $g\circ f$ iii. $h\circ g$ iv. $h\circ g\circ f$ v. $f\circ g\circ h$

4. Estudar a monotonia e acotación das sucesións:

i. $a_n=(-2)^n$

ii. $b_n=-2^n$

iii. $c_n=2^{-n}$

iv. $d_n=\frac{1}{n}$

v. $e_n=\frac{n}{2n+5}$

vi. $f_n=\frac{n+4}{n}$

5. Estudar a acotación e converxéncia das sucesións e calcular os seus límites no caso de seren converxentes.

i. $a_n=n!$

ii. $b_n=\frac{(-1)^n}{n}$

iii. $c_n=sen\,n\pi$

6. Demostrar que a sucesión $a_n=\frac{2n}{n+1}$ é monótona crecente e calcular $\lim_{n\to+\infty} n^2\cdot(a_{n+1}-a_n)$.

7. Estudar a continuidade das funcións:

i. $f(x)=\frac{1}{x}$

ii. $g(x)=\begin{cases}2-x^2 & se\ x\leqslant 2\\ 2x-6 & se\ x>2\end{cases}$

iii. $h(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & se\ x<1\\ \sqrt{x+1} & se\ x\geqslant 1\end{cases}$

8. Calcular o valor de a para que a función $f(x)=\begin{cases}x+1 & se\ x\leqslant 2\\ 3-ax^2 & se\ x>2\end{cases}$ sexa contínua en todo o seu domínio.

9. Estudar a continuidade de $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2+3x-2}{2x^2-5x+2} \ se \ x\neq\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{5}{3} \ se \ x=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ e $g(x)=\begin{cases} x-1 \ se \ x\leqslant 1 \\ x^2-1 \ se \ 1<x\leqslant 2 \\ x^2 \ se \ x>2 \end{cases}$.

10. Estudar a continuidade das funcións:

    i. $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4x+4}$
    ii. $g(x)=\dfrac{x^4-1}{x^2-1}$
    iii. $h(x)=\dfrac{x}{1-\sqrt{x+1}}$
    iv. $i(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$
    v. $j(x)=\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4}$
    vi. $k(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

11. Estudar se a función $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3+7x-8}$ é contínua en $x=1$. En caso contrário indicar que tipo de discontinuidade presenta. É posíbel definir un valor para $f(1)$ de xeito que se evite tal discontinuidade?

12. A función $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+x+a}{x-1}$ non está definida en $x=1$. Achar o valor de a para que sexa posíbel definir o valor de $f(1)$ de forma que $f(x)$ sexa contínua en toda a recta real.

13. Achar os valores de a e b para que a función $f(x)=\begin{cases} x^2+2x-1 \ se \ x<0 \\ ax+b \ se \ 0\leqslant x<1 \\ 2 \ se \ x\geqslant 1 \end{cases}$ sexa contínua en todo o seu domínio.

14. Demostrar que a ecuación $x^3+x^2-7x+1=0$ ten polo menos unha solución no intervalo $[0,1]$.

15. Deducir a partir do teorema de Bolzano que toda función polinómica de grau 3 ten polo menos unha raíz real.

16. Dada a función $f(x)=x^3-x^2+x$, é posíbel afirmar que existe algún elemento c do intervalo $[1,2]$ tal que $f(c)=2$?

17. Pode afirmar-se que a ecuación $sen\,x+2x-1=0$ ten solución real? Procurar un intervalo que conteña tal solución, se existe.

18. Se $f(x)$ é unha función definida en $[a,b]$, contínua en $x=a$ e en $x=b$ e tal que $f(a)\cdot f(b)<0$, pode-se asegurar que $\exists \ c\in(a,b) \ / \ f(c)=0$?

19. Se $f(x)$ é contínua en $[1,9]$, $f(1)=-5$ e $f(9)>0$, podemos asegurar que a función $g(x)=f(x)+3$ ten polo menos unha raíz no intervalo $(1,9)$?

20. Pode-se asegurar, utilizando o teorema de Bolzano, que a función $f(x)=tg\,x$ ten unha raíz no intervalo $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$? Dar unha resposta razoada e esbozar a gráfica da función nese intervalo.

21. Demostrar que a ecuación $\pi^x = e$ ten polo menos unha solución no intervalo aberto $(0,1)$.

22. Dada a función $f(x) = x^x - 2^x + x - 1$, demostrar que existen $\alpha \in \mathbb{R}$ / $f(\alpha) = 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$ / $f'(\beta) = 0$.

23. Determinar os valores de a e b para que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{ax^2 + bx + 1 - \cos x}{\operatorname{sen} x^2} = 1$.

24. Calcular os límites:

i. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

ii. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$

iii. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3}{e^x}$

iv. $\lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 + 1) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$

v. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln|1+x|} \right)$

vi. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$

vii. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$

viii. $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\operatorname{tg} x}$

ix. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x+5}}$

x. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{(x+1) \cdot e^x}$

xi. $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{x^2 - 1}}$

xii. $\lim\limits_{x \to 0} (x^2 \cdot \ln x^2)$

xiii. $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 6x - 3)$

xiv. $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^2 + 2x + 3)$

xv. $\lim\limits_{x \to 3} (x - 3)^7$

xvi. $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{x + 3}$

xvii. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$

xviii. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x)^2 - 1}{x}$

xix. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^5 - 3}{x^2 + 3}$

xx. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{1 - \sqrt{x+1}}$

xxi. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}$

xxii. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$

xxiii. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x \right)$

xxiv. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{tg}(\operatorname{sen} x))}{\operatorname{sen}(\operatorname{tg} x)}$

xxv. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{x}$

xxvi. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x \cdot (1 - \cos x)}{\operatorname{sen}^3 x}$

xxvii. $\lim\limits_{x \to 2} (3x - 4) \cdot \sqrt{x^2 + 1}$

xxviii. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{x+5}{x^2} \right)^{\frac{x^2 - 1}{x}}$

xxix. $\lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 + 3x)^{x-1}$

xxx. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2x - 3}{2x - 5} \right)^{\frac{3x}{7}}$

2. Cálculo de Derivadas e Aplicacións

25. Calcular, usando a definición, a derivada de $f(x) = x^2 - 3x + 5$ no ponto $x = 4$.

26. Achar a pendente da recta tanxente á parábola de ecuación $y = x^2 + x + 1$ en $x = 2$.

27. Achar a ecuación da recta tanxente á curva $f(x) = 2x^5 + 4$ no ponto $P(-1, 2)$.

28. Obter a ecuación da tanxente á curva $f(x) = 3^{2x^2 + 1}$ no ponto de abscisa $x = 0$.

29. Achar un ponto da gráfica da función $f(x) = x^2 - 6x + 8$ no que a tanxente á gráfica sexa paralela ao eixo de abscisas.

30. Determinar os pontos da curva $y = x^3 + 9x^2 - 9x + 15$ nos que a tanxente á gráfica é paralela á recta $y = 12x + 5$.

31. Achar os pontos da curva $y = x^4 - 7x^3 + 13x^2 + x + 1$ nos que a tanxente á gráfica forma un ángulo de 45^o coa horizontal.

32. Obter as ecuacións da recta tanxente e da recta normal á curva $y=(x+1)\cdot\sqrt[3]{3-x}$ no ponto $P(2,3)$.

33. A función $f(x)=|x+1|$ non é derivabel en todo o seu domínio. Achar os intervalos de derivabilidade da mesma.

34. Demostrar que a curva $y=|x-2|$ non ten tanxente no ponto de abscisa $x=2$.

35. Utilizando a definición de derivada, estudar a derivabilidade da función $f(x)=\begin{cases} 2 \text{ se } x\leqslant 0 \\ x^2 \text{ se } x>0 \end{cases}$. É derivábel en $x=0$? É contínua en $x=0$?

36. Usando a definición de derivada, calcular o valor de m para que $f'(1)=0$, con $f(x)=\dfrac{mx^2-1}{x}$.

37. A ecuación do espazo percorrido por un móbil en función do tempo é $e(t)=3t^2-t+1$. Achar a velocidade instantánea en $t=2$.

38. Derivar e simplificar:

i. $f(x)=\sqrt{\ln[tg(x^2+1)]}$

ii. $f(x)=atg\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

iii. $f(x)=(1-\cos x)\cdot ctg\, x$

iv. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

v. $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1+sen\, x}{1-sen\, x}}$

vi. $f(x)=\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+1}\right|$

vii. $f(x)=e^{\ln sen^2 x}$

viii. $f(x)=atg\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

ix. $f(x)=asen\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$

x. $f(x)=\sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$

xi. $f(x)=asen\left(x^{\cos^2 x}\right)$

xii. $f(x)=atg\dfrac{1+x}{1-x}$

39. Derivar as seguintes funcións utilizando os métodos alternativos á derivación de funcións elementares:

i. $f(x)=(x^2+\cos x)^{sen\, x}$ ii. $g(x)=atg\, x$ iii. $x^2y+y^2\cos x=2$

40. Calcular a derivada en $x=0$ da función $f[f(x)]$, con $f(x)=(1+x)^{-1}$.

41. Sexa f unha función derivábel en $\mathbb{R}$, tal que $f(1)=0$ e $f'(1)=-2$. Calcular $h'(1)$, con $h(x)=e^{f(x)}+x^2\cdot f(x)+[f(x)]^2$.

3. TEOREMAS DO CÁLCULO DIFERENCIAL

42. Sexa f unha función polinómica tal que $f(0)=f(1)=0$. Pode asegurar-se que existe algún $x\in(0,1)$ tal que $f'(x)=0$?

43. Estudar se a función $f(x)=1-|x|$ está nas condicións do teorema de Rolle no intervalo $[-1,1]$.

44. Estudar a continuidade e derivabilidade das funcións:

i. $f(x)=|x-1|$

ii. $g(x)=\begin{cases} x^2\, sen\dfrac{1}{x} \text{ se } x\neq 0 \\ 0 \text{ se } x=0 \end{cases}$

iii. $h(x)=\begin{cases} 2 \text{ se } x<0 \\ x+2 \text{ se } x\in[0,4] \\ x^2-8 \text{ se } x>4 \end{cases}$

45. Estudar se a función $f(x)=|x^2-4|$ está nas hipóteses do teorema de Rolle en $[-3,3]$.

46. Estudar se a función $f(x)=\begin{cases} x+2 \text{ se } 1\leqslant x<3 \\ 7-x \text{ se } 3\leqslant x<5 \end{cases}$ está nas hipóteses do teorema de Rolle, no intervalo $[1,4]$.

47. Achar o ponto c ao que se refire o teorema do valor médio para a función $f(x)=x^2-x+3$ no intervalo $[2,5]$.

48. Probar que se o termo independente dun polinómio é 3 e o valor que toma o polinómio para $x=2$ é tamén 3, entón a sua derivada se anula para algún valor de x. Indicar un intervalo onde se localice tal valor de x.

49. Dada a función $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-4}$, obter a ecuación da secante que une os pontos $(-2,f(-2))$ e $(2,f(2))$. Existe algún ponto $c\in[-2,2]$ tal que a tanxente á gráfica de f en $(c,f(c))$ é paralela á secante pedida? En caso afirmativo, razoar a resposta e obter c; en caso negativo, razoar por que non existe.

50. Estudar a continuidade da función $f(x)=\dfrac{ln(1+x^2)}{x}$ en $x=0$.

4. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIÓNS

51. Achar os intervalos de monotonia das funcións $f(x)=x+5-2\,sen\,x$ e $g(x)=sen\,x+cos\,x$.

52. Achar os intervalos de monotonia das funcións $f(x)=x^3-3x^2+1$ e $g(x)=x^3-6x^2+9x-8$.

53. Estudar o domínio e a monotonia de $f(x)=ln|(x-1)\cdot(x-2)|$.

54. Estudar os extremos relativos e absolutos da función $f(x)=(x^3-4x^2+7x-6)\cdot e^x$.

55. Dada a parábola $f(x)=ax^2+bx+c$, determinar o valor de a, b e c sabendo que $f(x)$ alcanza un máximo no ponto de abscisa $x=\dfrac{1}{2}$ e a recta tanxente a $f(x)$ no ponto $P(1,3)$ é $y=6-3x$.

56. Procurar unha función cuadrática tal que $f'(0)=0$, $f'(3)=-8$ e $f(4)=5$.

57. Achar a, b, c e d para que a función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ teña un máximo relativo en $M(0,4)$ e un mínimo relativo en $M'(2,0)$.

58. Achar a, b e c para que a función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ teña un máximo relativo en $x=4$, un mínimo relativo en $x=0$ e tome valor 1 para $x=1$.

59. Achar a, b, c e d para que a función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ teña un máximo relativo igual a 11 en $x=-1$, un mínimo relativo igual a -97 en $x=5$ e tome o valor -17 para $x=1$.

60. O custo médio C en euros da produción diária dunha mercadoria depende da cantidade x de unidades producidas ao dia, segundo a función $C(x)=0{,}01x^2-10x+600$. Calcular a produción diária que reduce ao mínimo o custo médio por unidade.

61. Estudar a curvatura (intervalos de concavidade e convexidade) da curva $y=-6x^3+12x^2-5x+1$.

62. Achar a recta tanxente á curva $y=x^3-6x^2+16x-11$ no seu ponto de inflexión.

63. Calcular os extremos relativos e pontos de inflexión da función $f(x)=3\,sen\,x-sen\,3x$ no intervalo $[0,2\pi]$.

64. Determinar os parámetros a , b , c e d para que a función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ teña un ponto de inflexión en $P(-2,6)$ con tanxente en P paralela á recta $8x+y+10=0$, e tome o valor -2 para $x=0$.

65. Determinar os parámetros a , b , c e d para que a gráfica da función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ conteña ao ponto $P(-1,1)$ e teña un ponto de inflexión con tanxente horizontal en $Q(0,-2)$.

66. Determinar os parámetros a , b , c e d para que a función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ teña un extremo relativo en $P\left(1,\frac{4}{3}\right)$ e un ponto de inflexión con tanxente de ecuación $y=2x$ na orixe.

67. Dada a función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, determinar o valor dos coeficientes para que a recta $y+1=0$ sexa tanxente á gráfica de f no ponto $(0,-1)$ e a recta $x-y-2=0$ sexa tanxente á mesma gráfica en $(1,-1)$.

68. Sabe-se que a función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ten un máximo relativo en $x=-1$, que a sua gráfica corta ao eixo OX no ponto de abscisa $x=-2$ e que ten un ponto de inflexión en $x=0$. Determinar a función sabendo ademais que a recta tanxente á gráfica en $x=2$ ten pendente 9 .

69. Achar a condición que debe cumprir λ para que o polinómio $p(x)=x^4+x^3+\lambda x^2$ sexa cóncavo en algún intervalo. Determinar o intervalo de concavidade en función do parámetro λ .

70. Sexa $f(x)=x\cdot g(x)$, tal que $g(x)$ é unha función contínua, derivábel, que presenta un máximo en $x=1$ e que $f(1)\cdot g(1)=4$. Estudar se a función $f(x)$ presenta tamén un máximo en $x=1$.

71. A concentración en sangue dun fármaco despois da sua toma é $C(t)=0{,}29483t+0{,}04253t^2-0{,}00035t^3$ mg/ml , onde t é o tempo transcorrido en minutos. Calcular o periodo de tempo no que actua o fármaco e o intre no que a sua concentración é máxima.

72. Determinar un ponto da curva $y=x^{e^{-x^2}}$ no que a pendente sexa máxima.

73. Representar as funcións:
    i. $f(x)=|x+1|$
    ii. $f(x)=|x+1|+|x-1|$
    iii. $f(x)=|x^2-4|$
    iv. $f(x)=4x^3-5x+1$
    v. $f(x)=x^4-4x^2$
    vi. $f(x)=x^4-x^3$
    vii. $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$
    viii. $f(x)=\frac{4x}{x^2+4}$
    ix. $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$
    x. $f(x)=\frac{0{,}5x^3}{x^2-4}$
    xi. $f(x)=\frac{x}{x^2-5x+4}$
    xii. $f(x)=ln\,x$
    xiii. $f(x)=ln|x^2-4|$
    xiv. $f(x)=\frac{1}{ln\,x}$
    xv. $f(x)=x-e^x$

xvi. $f(x)=x^2 \cdot e^x$

xvii. $f(x)=\frac{1}{1-e^{-x}}$

xviii. $f(x)=\frac{x}{e^x-1}$

xix. $f(x)=sen\,x+cos\,x$

xx. $f(x)=\frac{cos\,x}{x}$

xxi. $f(x)=ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|$

xxii. $f(x)=x \cdot ln\,x$

5. OPTIMIZACIÓN

74. Achar dous números que sumen 18, sabendo que o produto dun polo cuadrado do outro há de ser máximo.
75. Achar as dimensións dun campo rectangular de $3.600\ m^2$ de superfície, de forma que o seu perímetro sexa mínimo.
76. Achar as dimensións óptimas dos barrís cilíndricos usados no armacenamento de petróleo, para que a sua capacidade sexa de $160\ l$, de maneira que a chapa utilizada na sua fabricación sexa mínima.
77. Entre todos os rectángulos inscritos nunha circunferéncia de raio $12\ cm$ calcular as dimensións do que teña área máxima.
78. Dividir un segmento en duas partes de maneira que a suma das áreas dos triángulos equiláteros construidos sobre elas sexa mínima.
79. Determinar a distáncia mínima da curva $xy=1$ á orixe de coordenadas.
80. Obter a ecuación da recta que contén ao ponto $P(3,1)$, tal que a área do triángulo determinado pola recta e os semieixos positivos de coordenadas sexa mínima.
81. Achar os pontos da curva $y^2=6x$ mais próximos ao ponto $P(4,0)$.
82. Entre todos os cilindros rectos de volume fixo achar o que teña menor superfície.
83. Unha imprenta debe deseñar un cartaz coas seguintes características: a área impresa debe ocupar $100\ cm^2$, a marxen superior será de $3\ cm$, a inferior de $2\ cm$ e as laterais de $4\ cm$. Calcular as dimensións do cartaz de maneira que se utilice a menor cantidade posíbel de papel na sua elaboración.
84. Unha empresa quere instalar un sistema de seguridade con nove alarmes. Os alarmes poden ser do tipo A ou B, e o nível de seguridade acadado pode-se expresar como a décima parte do produto entre o número de alarmes de tipo A e o cuadrado do número de alarmes do tipo B. Cal será o número de alarmes de cada tipo a instalar para obter o máximo nível de seguridade?
85. Dadas as funcións $f(x)=e^x$ e $g(x)=-e^{-x}$, toda recta perpendicular ao eixo OX determina dous pontos A e B nos que a recta corta a cada unha das duas gráficas. Determinar a recta r que fai que o segmento AB teña lonxitude mínima.
86. O custo do marco dunha xanela rectangular é de $12{,}50$ € por metro linear nos lados verticais e 8 € nos horizontais. Calcular as dimensións que há de ter unha xanela de $1\ m^2$ de superfície para que o marco resulte o mais económico posíbel.
87. Un corredor ten $2\ m$ de anchura e tras virar en ángulo recto á direita pasa a ter $6\sqrt{3}\ m$ de anchura. Hai que trasladar horizontalmente un poste ao longo do corredor. Calcular a lonxitude máxima do poste que permite realizar o traslado.

6. VARIEDADES

88. Calcular de forma aproximada o valor de $\sqrt{15{,}97}$, utilizando a diferencial.

89. Unha circunferéncia ten $3\ m$ de raio. Calcular de forma aproximada a sua área se o raio aumenta $1\ mm$.

90. Nos países desenvolvidos, o modelo de evolución demográfica responde á expresión $f(x)=1275+33\ln(x-2000)$, onde x é o ano, $x\geqslant 2001$, e $f(x)$ é o número de habitantes, en millóns.

   i. Estudar o crecimento ou decrecimento demográfico destes países no intervalo de definición.

   ii. Calcular e interpretar $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

   iii. Calcular a población prevista a 1 de xaneiro dos anos 2011 e 2021 e a variación média nese intervalo.

   iv. Calcular a taxa de variación da población ás 0 horas do 1 de xaneiro dos anos 2011 e 2021. En cal deses dous intres é mais rápido o crecimento?

   v. En que porcentaxe aumentou a población no intervalo $[2010,2020]$.

   vi. Determinar en que momento o número de habitantes alcanzou ou alcanzará os 1.500 millóns.

   vii. Calcular o número de habitantes no momento actual.

91. Unha enfermidade infeciosa comporta-se conforme a función $i(t)=\dfrac{25t+4}{t^2-3t+5}$, onde t é o número de dias transcorridos desde que se detectou a epidémia e $i(t)$ é o número de persoas afectadas, expresado en miles.

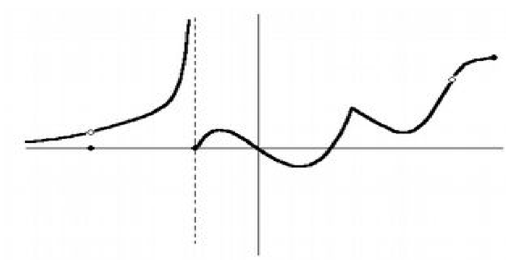
   i. Calcular o número de persoas contaxiadas durante o quinto dia da epidémia.

   ii. Calcular a variación média da epidémia durante os cinco primeiros dias.

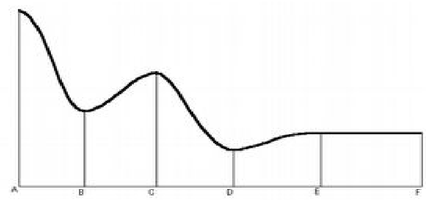
   iii. Calcular o ritmo do contáxio ás 12 horas do quinto dia da epidémia.

   iv. Estudar cal será a evolución da enfermidade co paso do tempo.

92. Unha función $f(x)$ ten a gráfica adxunta. Representar sobre a própria gráfica os elementos significativos da función: domínio, imaxe, cortes cos eixos, asíntotas, continuidade, derivabilidade, monotonia e extremos (relativos e absolutos), curvatura e inflexións.



93. Unha montaña rusa ten o perfil que se indica na figura.



   i. Representar nunha gráfica aproximada a velocidade en cada posición do tren. Analisar, en particular, o comportamento da velocidade nos lugares sinalados por letras e nos tramos determinados por estas.

   ii. Se $e(t)=600t+150t^3-115t^4+27t^5-2t^6$ é a función que relaciona o espazo percorrido (en centímetros) co tempo t (en segundos), determinar a cantos metros da saída está o ponto no que se alcanza a máxima velocidade.

94. Nunha nória, a distáncia en metros desde a cabina 1 ao chan ven dada pola expresión $d(t)=7+5\,sen\left(\frac{t\pi}{30}\right)$, onde t é o tempo desde que comeza a xirar a nória.

i. Determinar a que altura do chan se atopaba a cabina 1 ao comezar a xirar.

ii. Realizar unha gráfica da función $d(t)$ para o intervalo $t \in [0,75]$.

iii. Obter de forma razoada o diámetro da nória e o sentido do xiro.

7. SOLUCIÓNS

1.i. $Dom\ f=\mathbb{R}-\{-1\}$; $f(x)>0$ en todo o seu domínio; asíntota vertical $x=-1$ e asíntota horizontal $y=1$.

ii. $Dom\ g=(-3,-2)\cup(-2,1)\cup(1,+\infty)$; $g(x)<0$ en todo o seu domínio; asíntotas verticais $x=-2$ e $x=1$ e asíntota horizontal $y=0$.

iii. $Dom\ h=[\ln 2,+\infty)$; $h(x)>0\ \ \forall\ x>\ln 2$ e non ten asíntotas.

iv. $Dom\ i=\ldots\cup\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]\cup\left[2\pi,\frac{5\pi}{2}\right]\ldots=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[k\pi,\frac{(2k+1)\pi}{2}\right]$;

$i(x)>0\ \ \forall\ x\in Dom\ i-\left\{\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$ e non ten asíntotas.

v. $Dom\ j=\mathbb{R}-\{\pm\sqrt{3}\}$; $j(x)>0\ \Leftrightarrow\ x\in(-\infty,-2)\cup(-\sqrt{2},\sqrt{2})\cup(2,+\infty)$ e $j(x)<0\ \Leftrightarrow\ x\in(-2,-\sqrt{3})\cup(-\sqrt{3},-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},2)$; asíntotas verticais $x=\sqrt{3}$ e $x=-\sqrt{3}$.

2.i. $f(-\sqrt{2})=6+4\sqrt{2}$

ii. $f(0)=0$

iii. $f(-1)\notin\mathbb{R}$

iv. $f^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)=\left\{1,-\frac{1}{3}\right\}$

v. $f^{-1}(1)=-\frac{1}{2}$

vi. $f^{-1}(-2)\notin\mathbb{R}$

vii. $g(1)\notin\mathbb{R}$

viii. $g(-2)\notin\mathbb{R}$

ix. $h(0)\notin\mathbb{R}$

x. $h(2)=\sqrt{e^2-2}$

xi. $h^{-1}(5)=\ln 27$

xii. $i\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$

xiii. $i^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

xiv. $i^{-1}(0)=\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

xv. $k(-1)=\ln 2$

xvi. $k^{-1}(5)=\pm\sqrt{e^5+3}$

xvii. $k^{-1}(-5)=\pm\sqrt{e^{-5}+3}$

xviii. $Im\ f=[0,+\infty)$

xix. $Im\ h=[0,+\infty)$

xx. $Im\ i=[0,1]$

3.i. $(f\circ g)(x)=\frac{\ln x}{\ln x-1}$

ii. $(g\circ f)(x)=\ln\frac{x}{x-1}$

iii. $(h\circ g)(x)=x^2$

iv. $(h\circ g\circ f)(x)=\frac{x^2}{(x-1)^2}$

v. $(f\circ g\circ h)(x)=\frac{2x}{2x-1}$

4.i. a_n non é monótona nen acotada;

ii. b_n é monótona e acotada superiormente;

iii. c_n é monótona e acotada;

iv. d_n é monótona e acotada;

v. e_n é monótona e acotada;

vi. f_n é monótona e acotada.

5.i. a_n é acotada inferiormente e non converxente;

ii. b_n é acotada e converxente, $\lim_{n\to+\infty} b_n=0$

iii. c_n é acotada mas non converxente.

6. O límite é 2 .

7.i. f é contínua en todo o seu domínio: $\mathbb{R}-\{0\}$;

ii. g é contínua en $\mathbb{R}$;

iii. h é contínua en $\mathbb{R}-\{0,1\}$.

8. $a=0$.
9. f é contínua en todo o seu domínio: $\mathbb{R}-\{2\}$ e g é contínua en $\mathbb{R}-\{2\}$.

10.i. f é contínua en todo o seu domínio: $\mathbb{R}-\{2\}$;
ii. g é contínua en todo o seu domínio: $\mathbb{R}-\{-1,1\}$;
iii. h é contínua en todo o seu domínio: $[-1,0)\cup(0,+\infty)$;
iv. i é contínua en todo o seu domínio: $[-1,3)\cup(3,+\infty)$;
v. j é contínua en todo o seu domínio: $[-9,0)\cup(0,+\infty)$;
vi. k é contínua en todo o seu domínio: $[1,+\infty)$.

11. f presenta en $x=1$ unha discontinuidade de tipo evitábel, que desaparece definindo $f(1):=\frac{1}{5}$.
12. f é contínua en todo o seu domínio, que é $\mathbb{R}-\{1\}$. Para que se poda definir en $x=1$ con continuidade, f terá que presentar en $x=1$ unha discontinuidade de tipo evitábel, polo que $a=-3$.
13. $a=3$ e $b=-1$.
14. $f(0)>0$ e $f(1)<0$, logo polo teorema de Bolzano $\exists\, c\in(0,1)\ /\ f(c)=0$.
15. Se supomos que o coeficiente principal do polinómio $p(x)$ é positivo, entón $\lim_{x\to-\infty} p(x)=-\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} p(x)=+\infty$, logo forzosamente existirán valores $a,b\in\mathbb{R},\ a<b\ /\ p(a)<0,\ p(b)>0 \Rightarrow \exists\, c\in(a,b)\ /\ p(c)=0$. O razoamento é análogo no caso de que o polinómio $p(x)$ teña o coeficiente principal negativo.
16. $f(x)=x^3-x^2+x=2 \Leftrightarrow x^3-x^2+x-2=0$; logo o problema equivale a estudar se a función $g(x)=x^3-x^2+x-2$ está nas hipóteses do teorema de Bolzano: $g(1)=-1<0$ e $g(2)=4>0$, logo $\exists\, c\in(1,2)\ /\ g(c)=0 \Leftrightarrow f(c)=2$.
17. Hai que procurar algún intervalo tal que a función tome valores de signo oposto nos seus extremos, para situar a función f nas hipóteses do teorema de Bolzano; tal intervalo pode ser $[0,\pi]$, entre outras posibilidades.
18. Non, xá que a función há de ser contínua no intervalo $[a,b]$ para extraer a conclusión do teorema de Bolzano; por exemplo, a función $f(x)=\begin{cases} 3 \text{ se } x\leqslant\frac{a+b}{2} \\ -12 \text{ se } x>\frac{a+b}{2}\end{cases}$ está nas condicións do exercício pero non ten raíz real no intervalo $[a,b]$.
19. $g(1)=f(1)+3=-2<0$ e $g(9)=f(9)+3>0$, e ademais $g(x)$ é contínua en $[1,9]$ por ser f contínua nese intervalo; logo polo teorema de Bolzano existe algunha raíz da función g en $[1,9]$.
20. Non se pode asegurar, debido a que a función $f(x)$ non é contínua no intervalo.
21. Define-se a función $f(x)=\pi^x-e$. Esta función é contínua no intervalo $[0,1]$ e $f(0)=1-e<0$, $f(1)=\pi-e>0$, logo o Teorema de Bolzano asegura que $\exists\, c\in(0,1)\ /\ f(c)=0 \Rightarrow \pi^c-e=0 \Rightarrow \pi^c=e$.
22. É consecuéncia dos teoremas de Bolzano e Darboux.

23. $a=\frac{1}{2}$ e $b=0$.

24.i. 1
ii. $\frac{1}{6}$
iii. 0
iv. $-\infty$
v. $-\frac{1}{2}$
vi. e^2
vii. 1
viii. 1
ix. $+\infty$
x. 0
xi. $e^{\frac{1}{2}}$
xii. 0
xiii. 13
xiv. $-\infty$
xv. 0
xvi. 0
xvii. 4
xviii. 2
xix. $+\infty$
xx. -2
xxi. 0
xxii. 1
xxiii. $\frac{1}{2}$
xxiv. 1
xxv. 5
xxvi. $\frac{1}{2}$
xxvii. $2\sqrt{5}$
xxviii. e
xxix. $+\infty$
xxx. $e^{\frac{3}{7}}$

25. $f'(4)=5$

26. A pendente é $y'=5$.

27. $y=10x+12$

28. $y=3$

29. $P(3,-1)$

30. $P(1,16)$ e $P'(-7,176)$.

31. $P(0,1)$, $P'(2,15)$ e $P''\left(\frac{13}{4},\frac{3.285}{256}\right)$.

32. $y=3$ é a recta tanxente e $x=2$ é a recta normal.

33. $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$

34. $y'(2^-)=-1$ e $y'(2^+)=1$.

35. f é contínua e derivábel en $\mathbb{R}-\{0\}$.

36. $m=-1$

37. $v(2)=e'(2)=11$

38.i. $f'(x)=\dfrac{x\cdot sec^2(x^2+1)}{tg(x^2+1)\sqrt{ln\left|tg(x^2+1)\right|}}$

ii. $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

iii. $f'(x)=cos\,x-\dfrac{1}{1+cos\,x}$

iv. $f'(x)=\dfrac{1}{(1-x)\cdot\sqrt{x^2-1}}$

v. $f'(x)=sec\,x$

vi. $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}$, $x>-1$

vii. $f'(x)=sen\,2x$

viii. $f'(x)=\dfrac{1}{(2x^2-1)\cdot\sqrt{x^2-1}}$

ix. $f'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

x. $f'(x)=\dfrac{ad-bc}{2(cx+d)\cdot\sqrt{(ax+b)\cdot(cx+d)}}$

xi. $f'(x)=\dfrac{x^{cos^2x}\cdot\left(\dfrac{cos^2x}{x}-sen\,2x\cdot ln\,x\right)}{\sqrt{1-x^{2\,cos^2x}}}$

xii. $f'(x)=0$

39.i. $f'(x)=(x^2 cos\,x+cos^2x-2x\,sen\,x-sen^2x)\cdot(x^2+cos\,x)^{sen\,x}$

ii. $g'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

iii. $y'=\dfrac{y^2 sen\,x-2xy}{x^2+2y\,cos\,x}$

40. O valor da derivada é $\frac{1}{4}$.

41. $h'(1)=-4$

42. Si, porque toda función polinómica é derivábel en $\mathbb{R}$, logo está nas hipóteses do Teorema de Rolle.

43. Non, por non ser derivábel en $x=0$.

44.i. f é contínua en $\mathbb{R}$ e derivábel en $\mathbb{R}-\{1\}$;

ii. f é contínua en $\mathbb{R}$ e derivábel en $\mathbb{R}-\{0\}$;

iii. f é contínua en $\mathbb{R}-\{4\}$ e derivábel en $\mathbb{R}-\{0,4\}$.

45. f non é derivábel en $x=2$ e $x=-2$.

46. f non é contínua e, polo tanto, tampouco é derivábel en $x=3$.

47. $x=\frac{7}{2}$

48. A función de que se trata está nas hipóteses do Teorema de Lagrange no intervalo $[0,2]$.

49. A secante é $x-6y=8$; a existéncia de c ven asegurada polo Teorema de Lagrange: $c=4-2\sqrt{3}\approx 0.54 \in [-2,2]$.

50. A función é contínua en todo $\mathbb{R}$ agás en $x=0$, onde presenta unha discontiuidade evitábel.

51.i. f é estritamente crecente nos intervalos da forma $\left((6k+1)\cdot\frac{\pi}{3},(6k+5)\cdot\frac{\pi}{3}\right)$ $k\in\mathbb{Z}$ e estritamente decrecente nos da forma $\left((6k-1)\cdot\frac{\pi}{3},(6k+1)\cdot\frac{\pi}{3}\right)$ $k\in\mathbb{Z}$;

ii. g é estritamente crecente nos intervalos da forma $\left((8k+5)\cdot\frac{\pi}{4},(8k+9)\cdot\frac{\pi}{4}\right)$ $k\in\mathbb{Z}$ e estritamente decrecente nos da forma $\left((8k+1)\cdot\frac{\pi}{4},(8k+5)\cdot\frac{\pi}{4}\right)$ $k\in\mathbb{Z}$.

52.i. f é estritamente crecente en $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ e estritamente decrecente no intervalo $(0,2)$;

ii. g é estritamente crecente en $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$ e estritamente decrecente no intervalo $(1,3)$.

53. $Dom\, f=\mathbb{R}-\{1,2\}$; f é estritamente crecente en $\left(1,\frac{3}{2}\right)\cup(2,+\infty)$ e estritamente decrecente en $(-\infty,1)\cup\left(\frac{3}{2},2\right)$.

54. f presenta un mínimo absoluto en $x=-1$.

55. A parábola é $f(x)=-x^2-x+5$.

56. $f(x)=-\frac{1}{3}\cdot(4x^2-79)$

57. $a=1$, $b=-3$, $c=0$ e $d=4$.

58. $a=-6$, $b=0$ e $c=6$.

59. Non existe unha función nestas condicións; o problema non ten solución.
60. A produción diária há de ser de 500 unidades.
61. A función y é convexa en $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$ e cóncava en $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$.
62. A tanxente é $y=4x-3$.
63. f ten un máximo relativo en $x=\frac{\pi}{2}$, un mínimo relativo en $x=\frac{3\pi}{2}$ e pontos de inflexión en $x=0$, $x=\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{2\pi}{3}$, $x=\pi$, $x=\frac{4\pi}{3}$, $x=\frac{5\pi}{3}$ e $x=\frac{\pi}{2}$.
64. $a=1$, $b=6$, $c=4$ e $d=-2$.
65. $a=-3$, $b=c=0$ e $d=-2$.
66. $a=-\frac{2}{3}$, $b=0$, $c=2$ e $d=0$.
67. A función é $f(x)=x^3-x^2-1$.
68. A función é $f(x)=x^3-3x+2$.
69. Ten que ser $\lambda<\frac{3}{8}$ e o intervalo de concavidade é $\left(-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{9-24\lambda}}{12}, -\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{9-24\lambda}}{12}\right)$.
70. Non, porque f é contínua e derivábel en $x=1$ e $f'(1)\neq 0$.
71. Actua durante $127{,}9$ minutos e a máxima concentración produce-se aos $84{,}34\ min$.
72. O ponto é $(0{,}0)$.
73.
74. Os dous números son 6 e 12.
75. Há de ser un campo cuadrado de $60\ m$ de lado.
76. As dimensións óptimas serán: o raio da base $2\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}\approx 2{,}94\ dm$ e a altura $4\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}\approx 5{,}88\ dm$.
77. É un cuadrado de lado $12\sqrt{2}\ cm$.
78. Fará-se a división do segmento polo seu ponto médio.
79. A distáncia mínima é $\sqrt{2}$ unidades.
80. A área é mínima para a recta de ecuación $x+3y=6$.
81. $A(1,\sqrt{6})$ e $A'(1,-\sqrt{6})$.
82. Son cilindros nos que a altura é o duplo do raio da base.
83. As dimensións serán $12{,}9\ cm$ de altura e $20{,}65\ cm$ de anchura.
84. Deberán instalar-se 3 alarmes do tipo A e 6 do tipo B.
85. A recta é $x=0$.
86. A xanela terá unha altura de $0{,}8\ m$ e unha anchura de $1{,}25\ m$.

87. En xeral, se as dimensións dos corredores son a e b, a solución ao problema é unha lonxitude máxima $L=\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$. Neste caso particular, resulta $L=16\ m$. É recomendábel expresar a lonxitude como función dun ángulo, en lugar de facé-lo como función do cateto dun triángulo.

88. $\sqrt{15,97}\approx 3,99625$

89. A área é aproximadamente $9,006\pi\ u^2$.

90.i. Produce-se un crecimento demográfico ilimitado;

ii. $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, polo que este modelo non pode ser correcto mais que nun intervalo limitado de tempo;

iii. $f(2010)\approx 1.351\ Mhab$, $f(2020)\approx 1.374\ Mhab$, $\frac{\Delta f}{\Delta x}[2010,2020]=2,3\ Mhab/ano$;

iv. $f'(2010)=3,3\ Mhab/ano$, $f'(2020)=1,65\ Mhab/ano$;

v. incrementou-se no $1,7\%$;

vi. no segundo trimestre do ano 2914;

vii. $f(ano\ corrente)$.

91.i. $i(5)-i(4)\approx -2,96$ miles de persoas infectadas: tal resultado debe interpretar-se como unha diminución do número de persoas afectadas;

ii. $\frac{\Delta i}{\Delta t}[0,5]=1,56$ miles de infectadas/dia;

iii. $i'(4,5)\approx -2,94$ miles de infectadas/dia;

iv. produce-se un máximo de infectadas en $t\approx 2,19$, ou sexa, ás $4\ h\ \ 33\ min$ do terceiro dia da epidémia; a partir dese momento comeza a remitir e desaparece, xá que $\lim_{t\to+\infty} i(x)=0$.

92.

93. A velocidade máxima alcanza-se en $t=5$ segundos, que se corresponde con $30\ m$ de distáncia ao ponto de partida.

94.i. $7\ m$ de altura;

ii.

iii. a nória xira en sentido anti-horário e o diámetro é de $10\ m$.