

## Obxectivos

Nesta quincena aprenderás a:

- Identificar problemas nos que interveñen magnitudes directamente proporcionais.
- Calcular a función que relaciona a esas magnitudes a partir de diferentes datos e representala graficamente.
- Representar estas funcións de diferentes maneiras.
- Comparar funcións deste tipo.
- Resolver problemas reais nos que interveñen estas funcións.

Antes de empezar

1. Función de proporcionalidade directa ..... páx. 170  
Definición  
Representación gráfica
2. Función afín ..... páx. 172  
Definición  
Representación gráfica
3. Ecuación da recta ..... páx. 174  
Forma punto-pendiente  
Recta que pasa por dous puntos  
Forma xeral
4. Posición relativa de dúas rectas ..... páx. 178  
Análise en forma explícita  
Análise en forma xeral
5. Aplicacións ..... páx. 180  
Problemas simples  
Problemas combinados

Exercicios para practicar

Para saber máis

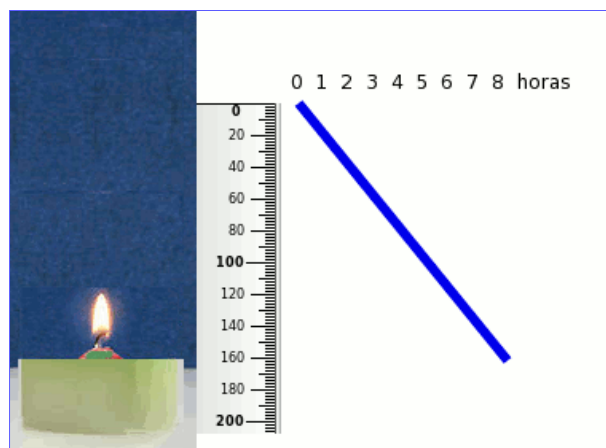
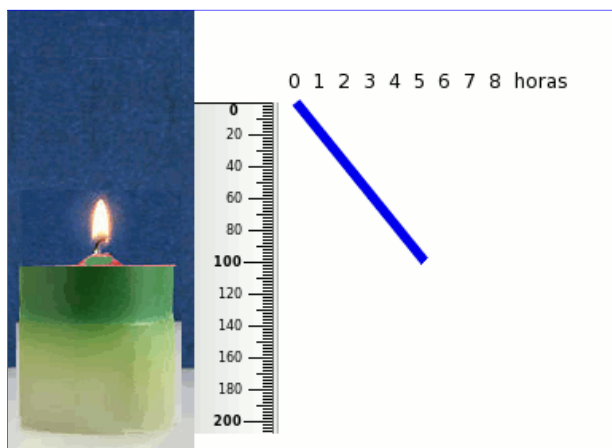
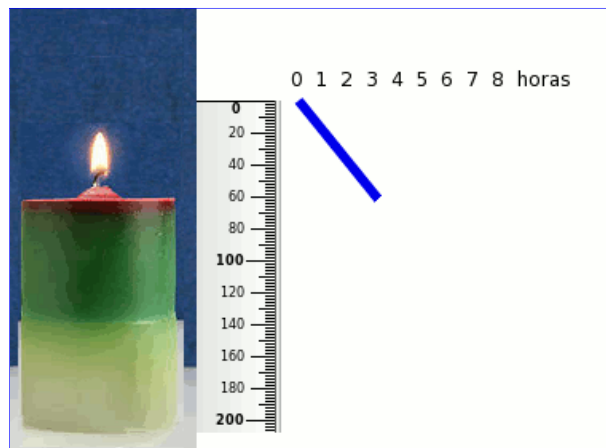
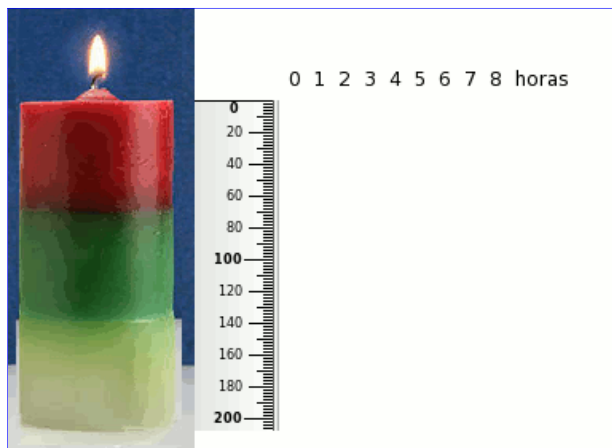
Resumo

Autoavaliación

Actividades para enviar o titor



## Antes de empezar



### Investiga

Se unha sandía pesa 3 kg e outro peso 6 kg cobrarannos o dobre pola segunda. Pero se a primeira ten un diámetro de 15 cm e a outra o ten de 30 cm, será o prezo da segunda dobre que o da primeira?

Intenta atopar a resposta e dar unha explicación razoada a esta.



# Funcións lineais

## 1. Función de proporcionalidade directa

### Definición

Chámase **función de proporcionalidade directa** ou, simplemente, **función lineal** a calquera función que relacione dúas magnitudes directamente proporcionais  $(x,y)$ . A súa ecuación ten a forma

$$y = mx \text{ ou } f(x) = mx$$

O factor  $m$  é a constante de proporcionalidade e recibe o nome de **pendente** da función porque, como veremos na seguinte sección, indica a inclinación da recta que a representa graficamente.

*Lembra: dúas magnitudes son directamente proporcionais se o seu cociente é constante.*



### Representación gráfica

Como xa tes visto, as funcións lineais representáanse graficamente como liñas rectas. Ademais, como  $y=mx$ , se  $x=0$  entón  $y=0$ ; polo tanto a gráfica de todas as funcións lineais pasa polo punto  $(0,0)$ .

Para debuxar a gráfica basta con obter as coordenadas doutro punto, dando un valor arbitrario á  $x$  e unir ese punto coa orixe de coordenadas  $(0,0)$ .

Se  $x=1$ , entón  $y=m$ , polo tanto  $m$  representa a variación de  $y$  por cada unidade de  $x$ , é dicir, a inclinación ou **pendente da recta**. Se  $m$  é positiva, representa a cantidade que sobe a  $y$  por cada unidade de  $x$  e se  $m$  é negativa a cantidade que baixa  $y$  por cada unidade de  $x$ .

### REPRESENTACIÓN GRÁFICA DA FUNCIÓN $y = -\frac{1}{2}x$

1. Representamos o punto  $(0,0)$

$$m = -\frac{1}{2} = -0,5$$

2. Damos un valor a  $x$ .

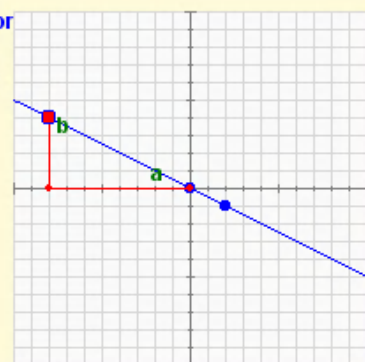
Para simplificar, dámoslle o valor do denominador:  $x=2 \Rightarrow y=-1$  e representamos o punto  $(2,-1)$

3. Unimos os dous puntos.

Move o control co rato e observa:

$$\frac{b}{a} = \frac{4}{-8} = -0,5 = m$$

O cociente entre as dúas variables é constante.



## EXERCICIOS resoltos

1. Determina se as relacións entre as parellas de magnitudes seguintes son lineais ou non escribindo para iso a ecuación que as relaciona.
  - a. Relación entre o prezo inicial e o prezo rebaixado un 10%.
  - b. Relación entre o peso e o volume dun material en condicións constantes de presión e temperatura.
  - c. Un banco ofrece un depósito anual ao 5% cunha comisión fixa de 20€ Relación entre a cantidade invertida e os xuros recibidos.
  - d. Relación entre a área dun cadrado e a lonxitude do seu lado.

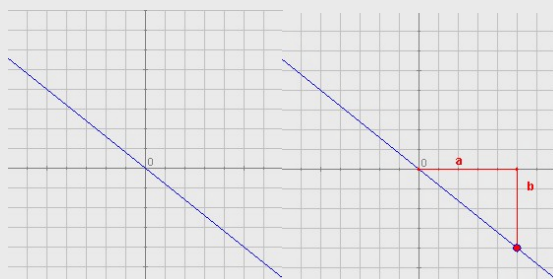
Solución:

- a) Se o desconto é 10% pago o 90%:  $P_{\text{Rebaixado}} = 0.9 \cdot P_{\text{Inicial}}$  (SI é lineal)
  - b) A relación entre peso (P) e volume (V) é a densidade (d), que é constante se non cambian as condicións de presión e temperatura:  $P = d \cdot V$  (SI é lineal)
  - c) Se C é a cantidade depositada e I son os xuros  $I = 0.05 \cdot C - 20$  (NON é lineal, pero case o é. En realidade é unha función afín que veremos no seguinte capítulo)
  - d) Se A é a área e l a lonxitude do lado, entón  $A = l^2$  (NON é lineal)
2. Determina as ecuacións das funcións lineais que corresponden coas seguintes gráficas:
    - a.



Buscamos un punto de coordenadas enteiras (non é estritamente necesario pero é máis cómodo se é posible).  $a = 2$ ,  $b = 7$ . A pendente é  $m = 7/2$  e a ecuación é  $y = \frac{7}{2}x$

b.



Neste caso  $a = 5$  e  $b = -4$  (asígnámoslle un valor negativo porque a recta é decrecente). A pendente é, pois,  $m = -4/5$  e a ecuación e  $y = -\frac{4}{5}x$

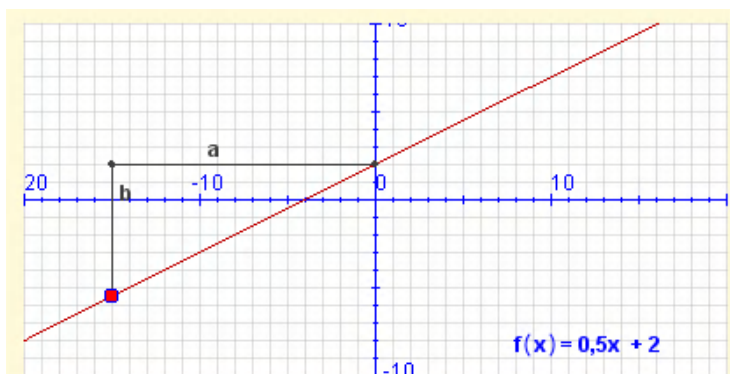
# Funcións lineais

## 2. Función afín

### Definición

Se a dúas magnitudes directamente proporcionais se lles aplica algunha condición inicial, a función que as liga xa non é totalmente lineal (*as magnitudes xa non son proporcionais*). Dise que é unha **función afín** e a súa forma é:

$$y = mx + n \text{ ou } f(x) = mx + n$$



Movendo o punto vermello observa que  $m$  é a pendente, pero  $f(x)$  e  $x$  non son proporcionais (agás no caso de que  $n=0$ ):

$$\frac{b}{a} = \frac{-7,5}{-15} = 0,5 \quad \frac{f(x)}{x} = \frac{-5,5}{-15} = 0,3667 \text{ Non é constante.}$$

Modificando os valores inferiores observa que  $n$  coincide sempre co punto de corte co eixe Y.

A **pendente**,  $m$ , segue sendo a constante de proporcionalidade e o termo  $n$  denomínase **ordenada na orixe** porque é o valor que toma  $y$  (ordenada) cando  $x$  vale 0 (abscisa na orixe).

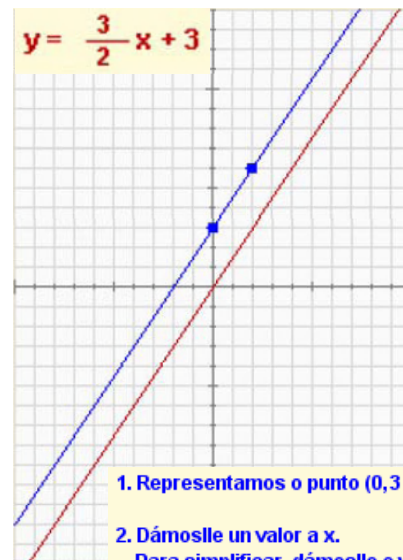
Lembra: Agora o cociente entre  $f(x)$  e  $x$  non é constante.

### Representación gráfica

As funcións afíns representáanse tamén mediante liñas rectas, pois o termo independente que as diferencia das funcións de proporcionalidade só produce unha translación da gráfica cara a arriba ou cara abaixo.

Para representar a gráfica precisamos obter dous puntos.

- Un deles obtémolo da propia ecuación pois, como vimos, a **ordenada na orixe**,  $n$ , indícanos que a recta pasa polo punto **(0,n)**.
- O outro punto obtense dándolle un valor calquera a  $x$  e calculando o correspondente valor de  $y$ . Unindo os dous puntos temos a gráfica da función.



1. Representamos o punto (0,3)

2. Dámoslle un valor a  $x$ .

Para simplificar, dámoslle o valor do denominador:  $x=2 \Rightarrow y=6$  e representamos o punto (2,6)

3. Unimos os dous puntos.

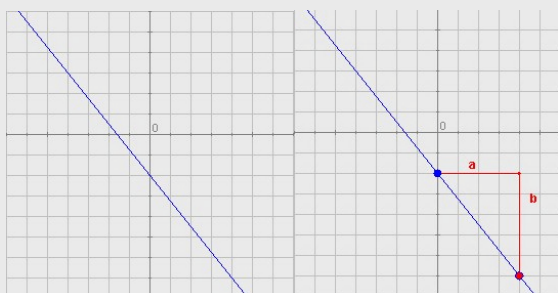
Compara coa gráfica de

$$y = \frac{3}{2}x$$

## EXERCICIOS resoltos

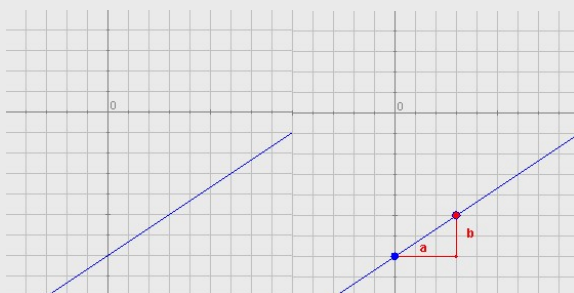
3. Determina a ecuación das funcións afíns que se corresponden coas gráficas:

a.



Corta ao eixe Y no punto  $(0, -2)$ , logo  $n = -2$ . Agora buscamos outro punto de coordenadas enteiras se é posible  $(4, -7)$  e calculamos as súas distancias horizontal e vertical ao punto  $(0, -2)$ :  $a = 4$ ,  $b = -5$ . A pendente é  $m = -5/4$  e a ecuación é  $y = -\frac{5}{4}x - 2$  (Lembra: negativo por ser unha recta decrecente)

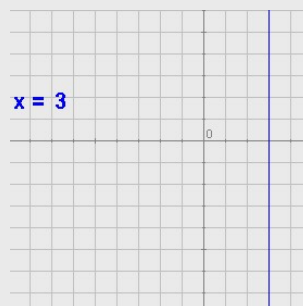
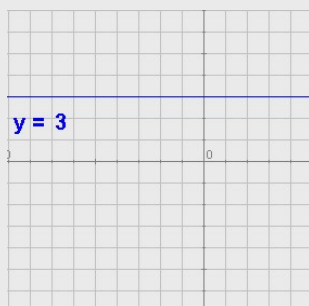
b.



Neste caso  $n = -7$ ,  $a = 3$  e  $b = 2$ . A pendente é, polo tanto,  $m = 2/3$  e a ecuación é  $y = \frac{2}{3}x - 7$

4. Casos particulares:

- a. Se a pendente é cero, a ecuación é  $y = n$  e a función é constante.
- b. Se a recta é vertical a ecuación é  $x = k$  e **non é unha función**. Dicimos que neste caso **a pendente é infinita**.



## 3. Ecuación da recta

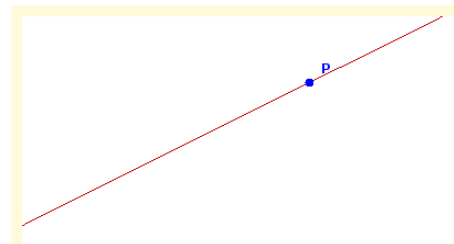
### Ecuación punto-pendente

A ecuación  $y = mx + n$  que vimos denomínase **forma explícita** da ecuación da recta, e permítenos achar a devandita ecuación cando coñecemos a pendente e a ordenada na orixe.

Cando só coñecemos a pendente,  $m$ , e as coordenadas doutro dos puntos da recta,  $(x_0, y_0)$ , a súa ecuación é

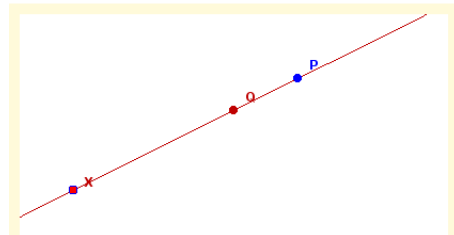
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Esta expresión recibe o nome de **ecuación punto-pendente** da recta. Na secuencia adxunta explícase como se obtén.



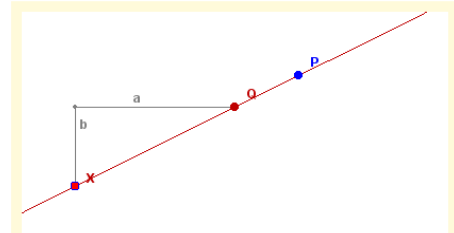
Da recta da imaxe coñecemos a súa pendente e as coordenadas dun dos puntos polos que pasa. Queremos determinar a súa ecuación:

$$m = \frac{1}{2} \quad P = (6,5)$$



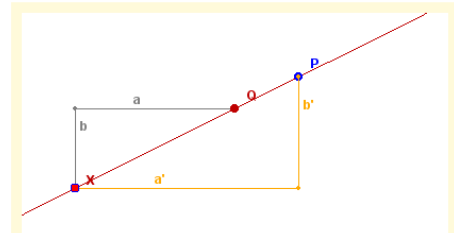
Consideremos un punto arbitrario X da recta e supoñamos que coñecemos a ordenada na orixe Q:

$$m = \frac{1}{2} \quad P = (6,5) \quad X = (x,y) \quad Q = (0,n)$$



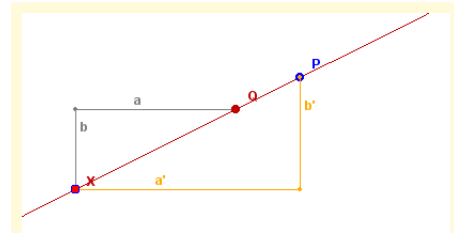
Nos apartados anteriores temos visto que aínda movendo X, o cociente entre b e a é constante e igual á pendente:

$$m = \frac{1}{2} \quad P = (6,5) \quad X = (x,y) \quad Q = (0,n) \quad \frac{b}{a} = m = \frac{1}{2}$$



Observa que os triángulos da figura teñen os lados paralelos, logo son semellantes e polo tanto:

$$\frac{b'}{a'} = \frac{b}{a} = m = \frac{1}{2}$$



$$P = (6,5) \quad X = (x,y)$$

$$b' \text{ é a distancia vertical entre P e X: } b' = y - 5$$

$$a' \text{ é a distancia horizontal entre P e X: } a' = x - 6$$

$$\text{logo } \frac{b'}{a'} = \frac{y-5}{x-6} = \frac{1}{2} \Rightarrow y - 5 = \frac{1}{2} \cdot (x - 6)$$

### EXERCICIOS resoltos

5. Acha a ecuación da recta que pasa por  $P(-8,-5)$  e de pendente  $m = 2/7$

A ecuación punto-pendente é:

$$y + 5 = \frac{2}{7}(x + 8)$$

A ecuación explícita obtense así:

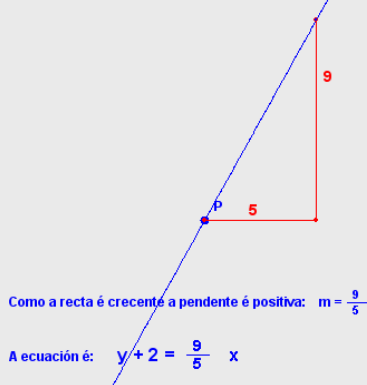
$$y + 5 = \frac{2}{7}x + \frac{2}{7}$$

Que equivale a:

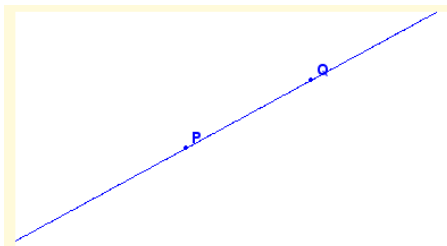
$$y = \frac{2}{7}x - \frac{33}{7}$$

6. Determina a ecuación desta recta:

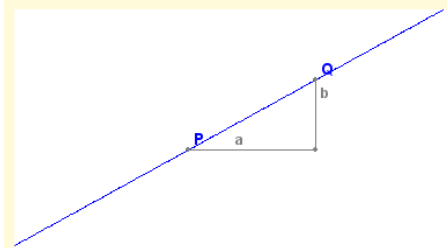
$P(0, -2)$





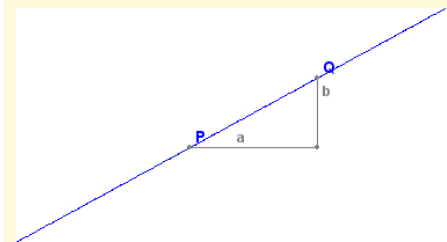


Os puntos P e Q da figura teñen coordenadas coñecidas  $P(x_0, y_0)$  e  $Q(x_1, y_1)$ . Queremos achar a ecuación da recta que pasa por eles:



Procedemos como en casos anteriores:

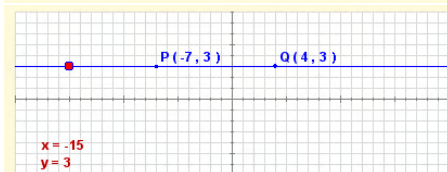
$$a = x_1 - x_0 \quad b = y_1 - y_0 \quad m = \frac{b}{a} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$



$$m = \frac{b}{a} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad P = (x_0, y_0), \quad \text{a ecuación punto-pendente é:}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Leftrightarrow y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

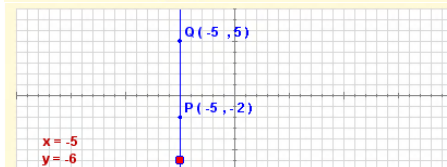


**CASOS ESPECIAIS:** Ordenadas iguais  
Coa fórmula anterior a ecuación da recta que pasa por P e Q é:

$$\frac{y - 3}{3 - 3} = \frac{x + 7}{4 + 7} \Leftrightarrow \frac{y - 3}{0} = \frac{x + 7}{11}$$

Non é válida porque hai unha división por cero!  
Movendo o control comproba que todos os puntos da recta teñen a mesma ordenada e, polo tanto, a ecuación da recta neste caso é:

$$y = 3$$



**CASOS ESPECIAIS:** Abscisas iguais  
Coa fórmula anterior a ecuación da recta que pasa por P e Q é:

$$\frac{y + 2}{5 + 2} = \frac{x + 5}{-5 + 5} \Leftrightarrow \frac{y + 2}{7} = \frac{x + 5}{0}$$

Non é válida porque hai unha división por cero!  
Movendo o control comproba que todos os puntos da recta teñen a mesma abscisa e, polo tanto, a ecuación da recta neste caso é:

$$x = -5$$

## Ecuación da recta que pasa por dous puntos

Sexan  $P(x_0, y_0)$  e  $Q(x_1, y_1)$  dous puntos do plano. A ecuación da recta que pasa por estes puntos é

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Esta expresión recibe o nome de **ecuación continua** da recta. Na secuencia adxunta explícase como se obtén.

## EXERCICIOS resoltos

7. Acha a ecuación da recta que pasa por  $P(5, -9)$  e  $Q(6, 8)$ . Exprésaa en forma explícita e determina a pendente e a ordenada na orixe.

A ecuación continua é:  $\frac{y - (-9)}{8 - (-9)} = \frac{x - 5}{6 - 5}$

$$\frac{y + 9}{17} = x - 5$$

A ecuación explícita obtense resolvendo  $y$ :

$$y = 17(x - 5) - 9 =$$

$$= 17x - 85 - 9 = 17x - 94$$

$$y = 17x - 94$$

A pendente é 17

A ordenada na orixe é -94

8. Acha a ecuación da recta que pasa por  $P(7, 4)$  e  $Q(-3, -1)$ . Exprésaa en forma explícita e determina a pendente e a ordenada na orixe.

A ecuación continua é:  $\frac{y - 4}{-1 - 4} = \frac{x - 7}{-3 - 7}$

$$\frac{y - 4}{-5} = \frac{x - 7}{-10}$$

A ecuación explícita obtense resolvendo  $y$ :

$$y = -5 \frac{x - 7}{-10} + 4 = \frac{1}{2}(x - 7) + 4 =$$

$$= \frac{x - 7}{2} + 4 = \frac{x - 7 + 8}{2} = \frac{x + 1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

A pendente é  $\frac{1}{2}$

# Funcións lineais

## Ecuación xeral ou implícita

O xeito máis habitual de representar rectas é a **ecuación xeral** ou **implícita**:

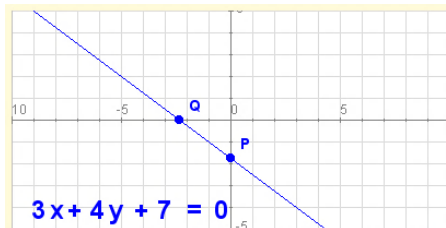
$$Ax + By + C = 0$$

onde A, B e C son números calquera (coa condición de que polo menos A ou B sexan diferentes de cero).

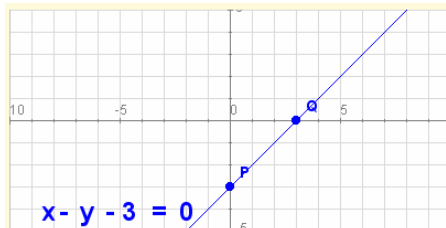
Se  $B=0$  trátase dunha recta vertical de ecuación  $x = -\frac{C}{A}$ .

Se B non é cero a pendente é  $m = -\frac{A}{B}$ .

Nas escenas móstranse representacións de rectas en forma xeral e o paso doutras formas de ecuación a xeneral.



**REPRESENTACIÓN GRÁFICA DA ECUACIÓN XERAL:**  
Obtemos dous puntos dando valores a unha das variábeis.  
O máis sinxelo é dar ás variábeis o valor 0:  
 $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{7}{4}$        $P = (0, -\frac{7}{4})$   
 $y = 0 \Rightarrow x = -\frac{7}{3}$        $Q = (-\frac{7}{3}, 0)$



**REPRESENTACIÓN GRÁFICA DA ECUACIÓN XERAL:**  
Obtemos dous puntos dando valores a unha das variables.  
O máis sinxelo é dar ás variables o valor 0:  
 $x = 0 \Rightarrow y = -3$        $P = (0, -3)$   
 $y = 0 \Rightarrow x = 3$        $Q = (3, 0)$

### PASO DE CALQUERA ECUACIÓN Á XERAL:

#### a) Función lineal en forma explícita:

$$y = mx \Leftrightarrow mx - y = 0 \quad (A = m, B = -1, C = 0) \quad m = -\frac{A}{B}$$

#### b) Función afín en forma explícita:

$$y = mx + n \Leftrightarrow mx - y + n = 0 \quad (A = m, B = -1, C = n) \quad m = -\frac{A}{B}$$

#### c) Función constante (paralela ao eixe X):

$$y = n \Leftrightarrow y - n = 0 \quad (A = 0, B = 1, C = -n) \quad m = -\frac{A}{B} = 0$$

#### d) Recta vertical:

$$x = n \Leftrightarrow x - n = 0 \quad (A = 1, B = 0, C = -n) \quad \text{Non se pode achar } m.$$

#### e) Ecuación punto-pendiente:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Leftrightarrow mx - y + y_0 - mx_0 = 0 \quad m = -\frac{A}{B}$$

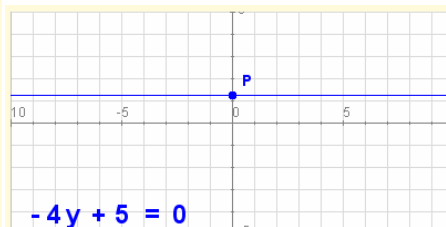
$$(A = m, B = -1, C = y_0 - mx_0)$$

#### f) Ecuación continua:

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \Leftrightarrow (y_1 - y_0)(x - x_0) = (x_1 - x_0)(y - y_0) \Leftrightarrow$$

$$(y_1 - y_0)x - (x_1 - x_0)y + y_0(x_1 - x_0) - x_0(y_1 - y_0) = 0$$

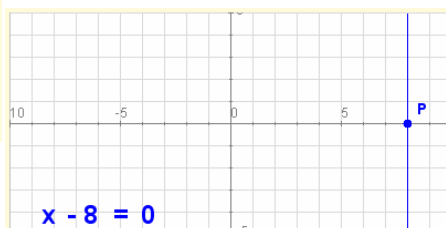
$$(A = y_1 - y_0, B = -(x_1 - x_0), C = y_0(x_1 - x_0) - x_0(y_1 - y_0)) \quad m = -\frac{A}{B}$$



**REPRESENTACIÓN GRÁFICA DA ECUACIÓN XERAL:**

Como xa sabemos, neste caso é unha recta horizontal. A ordenada na orixe dínos a que altura pasa:

$$y = \frac{5}{4} \quad P = (0, \frac{5}{4})$$



**REPRESENTACIÓN GRÁFICA DA ECUACIÓN XERAL:**

Como xa sabemos, neste caso é unha recta vertical.

O valor de x indicanos por onde pasa:

$$x = 8 \quad P = (8, 0)$$

## EXERCICIOS resoltos

9. Determina a ecuación da recta que pasa polo punto (1,-7) e cuxa pendente é  $-2/3$ . Despois pasa a forma xeral.

Solución: A ecuación punto-pendente é  $y + 7 = -\frac{2}{3}(x - 1)$ .

Quitando denominadores e paréntese queda  $3y + 21 = -2x + 2$ . Traspoñendo todo ao primeiro membro queda  $2x + 3y + 19 = 0$ . Tamén sería válido o resultado con todos os signos cambiados:  $-2x - 3y - 19 = 0$

10. Determina a ecuación da recta que pasa polo punto (-4,-2) e de pendente 0. Despois pasa a forma xeral.

Solución: A ecuación na forma punto-pendente xa é a ecuación xeral:  $y + 2 = 0$

11. Determina a ecuación da recta que pasa polos puntos P(2,-2) e Q(-8,3). Logo pasa á ecuación xeral.

Solución: En forma continua a ecuación é  $\frac{y + 2}{3 + 2} = \frac{x - 2}{-8 - 2}$ .

Quitando denominadores queda:  $-10y - 20 = 5x - 10$ .

Poñendo todo no primeiro membro:  $-5x - 10y - 10 = 0$ . Así abondaría, pero como todos os termos son múltiplos de 5 podemos simplificar:  $-x - 2y - 2 = 0$ . Tamén é válido cambiar todos os termos de signo:  $x + 2y + 2 = 0$ .

12. Determina a ecuación da recta que pasa polos puntos P(5,-2) e Q(3,-2). Logo pasa a forma xeral.

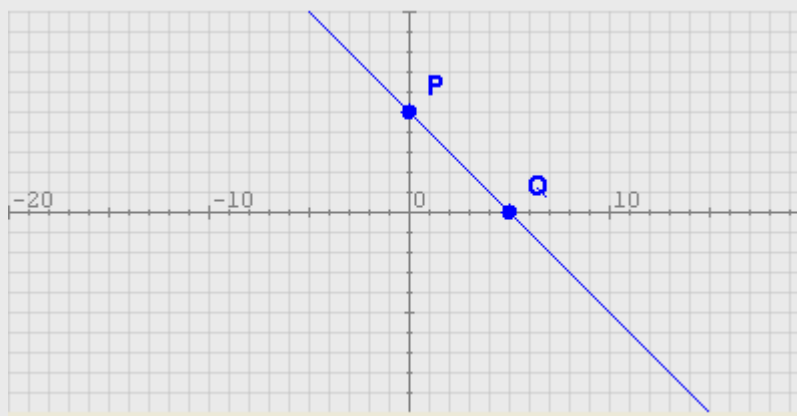
Solución: Como os puntos P e Q teñen igual ordenada, trátase da recta horizontal  $y = -2$ , ou en forma xeral:  $y + 2 = 0$ .

13. Determina a ecuación da recta que pasa polos puntos P(6,5) e Q(6,-2). Logo pasa a ecuación xeral.

Solución: Como os puntos P e Q teñen igual abscisa, trátase da recta vertical  $x = 6$ . En forma xeral queda  $x - 6 = 0$ .

14. Representa graficamente a recta que ten por ecuación xeral  $x + y - 5 = 0$ .

Solución: Resolvemos y para obter a ecuación explícita:  $y = -x + 5$ . Polo tanto, a pendente é -1 e a ordenada na orixe é 5. É dicir, a recta pasa polo punto (0,5). Calculamos outro punto dando, por exemplo, o valor 5 a x. Entón  $y = -5 + 5 = 0$ . A recta pasa tamén polo punto (5,0). Debuxamos os puntos e unimos coa regra:



## 4. Posición relativa de dúas rectas

### Análise en forma explícita

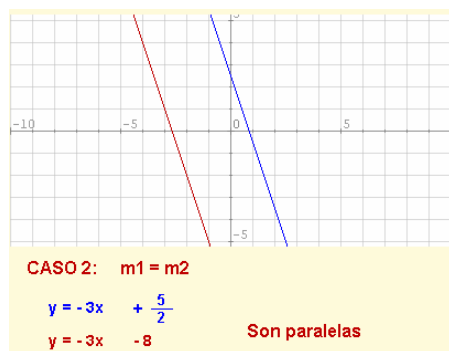
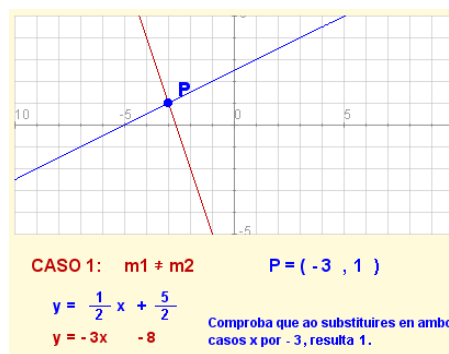
Dadas dúas rectas

$$y = m_1x + n_1 \text{ e } y = m_2x + n_2$$

Se  $m_1 \neq m_2$  as rectas córtanse nun punto. As coordenadas dese punto de intersección obtéñense resolvendo o sistema. Dise que as rectas son **secantes**.

Se  $m_1 = m_2$  as rectas son **paralelas**.

Se, ademais de coincidir as pendentes, tamén  $n_1 = n_2$  as rectas serán entón **coincidentes**.



### Análise en forma xeral

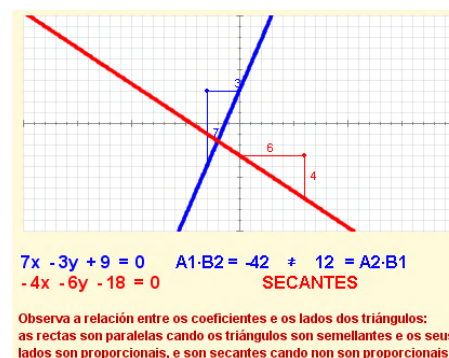
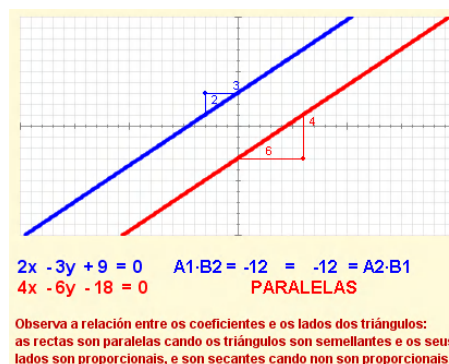
Dadas dúas rectas

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Se  $A_1B_2 \neq A_2B_1$  son **secantes**. Ao igual que no caso anterior as coordenadas do punto de corte obtéñense resolvendo o sistema.

Se  $A_1B_2 = A_2B_1$  as rectas poden ser **paralelas** ou **coincidentes**.



## EXERCICIOS resoltos

15. Determina a posición relativa das rectas  $y = -4x + 1$ ,  $y = 4x$ . En caso de seren secantes, determina as coordenadas do punto de intersección.

Solución: A pendente da primeira recta é  $m_1 = -4$  e a da segunda é  $m_2 = 4$ . Como as pendentes son distintas as rectas son **secantes**. Achamos agora o punto de corte resolvendo o sistema:

$$-4x + 1 = 4x; \quad 1 = 8x; \quad x = 1/8; \quad y = 4 \cdot (1/8) = 4/8 = 1/2; \quad P = \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)$$

16. Determina a posición relativa das rectas  $y = -2x + 3$ ,  $y = -2x - 2$ . En caso de seren secantes, determina as coordenadas do punto de intersección.

Solución: A pendente de ambas as dúas rectas é  $-2$  e a ordenada na orixe é diferente, polo tanto son dúas rectas **paralelas**.

17. Determina a posición relativa das rectas  $x - 3y - 1 = 0$ ,  $4x + y + 1 = 0$ . En caso de seren secantes, determina as coordenadas do punto de intersección.

Solución: Como están en forma xeral debemos comprobar se os coeficientes respectivos de  $x$  e  $y$  son proporcionais:  $A_1=1$ ,  $B_1=-3$ ,  $A_2=4$ ,  $B_2=1$ , entón  $A_1 \cdot B_2 = 1$  e  $A_2 \cdot B_1 = -12$ . Son diferentes, polo tanto as rectas son **secantes**. Imos achar as coordenadas do punto de intersección. Hai varias maneiras de facelo, unha delas é despegar  $y$  en ambas as dúas ecuacións (pasar a forma explícita) e repetir o feito no exercicio 15 máis arriba:

$$y = \frac{1-x}{-3}; \quad y = -1 - 4x; \quad \frac{1-x}{-3} = -1 - 4x; \quad 1 - x = 3 + 12x; \quad -2 = 13x; \quad x = -\frac{2}{13}$$

Agora substituíndo o valor obtido para  $x$  en calquera das dúas ecuacións temos:

$$y = -1 - 4 \cdot \left(-\frac{2}{13}\right) = -1 + \frac{8}{13} = -\frac{5}{13}$$

Polo tanto, as coordenadas do punto de intersección son  $P = \left(-\frac{2}{13}, -\frac{5}{13}\right)$

Imos comprobar que o resultado é correcto substituíndo os dous valores en ambas as dúas ecuacións e vendo que en ambos casos as igualdades se verifican:

$$-\frac{2}{13} - 3 \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) - 1 = -\frac{2}{13} + \frac{15}{13} - 1 = \frac{13}{13} - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$4 \cdot \left(-\frac{2}{13}\right) + \left(-\frac{5}{13}\right) + 1 = -\frac{8}{13} - \frac{5}{13} + 1 = -\frac{13}{13} + 1 = -1 + 1 = 0$$

18. Determina a posición relativa das rectas  $2x - 5y - 1 = 0$ ,  $-4x + 10y + 1 = 0$ . En caso de seren secantes, determina as coordenadas do punto de intersección.

Solución: Como temos as ecuacións xerais debemos comprobar se os coeficientes respectivos de  $x$  e  $y$  son proporcionais:  $A_1=2$ ,  $B_1=-5$ ,  $A_2=-4$ ,  $B_2=10$ , entón  $A_1 \cdot B_2 = 20$  e  $A_2 \cdot B_1 = 20$ . Son iguais, polo tanto as rectas son **paralelas**.

# Funcións lineais

## 5. Aplicacións

### Problemas simples

As funcións lineais describen fenómenos nos que interveñen magnitudes directamente proporcionais. A representación gráfica será unha recta cuxa pendente nos aporta información da rapidez da variación dunha magnitude con respecto á outra mentres que a ordenada na orixe nos informa sobre as condicións iniciais.

Nas imaxes da dereita tes un par de exemplos de como obter a ecuación (dunha función lineal ou afín) a partir de dous puntos coñecidos ou ben a partir dun punto e a pendente e, a partir delas, facer predicións e cálculos de situacións descoñecidas.

Na descrición de fenómenos reais é frecuente que as magnitudes que se relacionan veñan dadas por números de tamaños moi diferentes, polo que ao representalas graficamente haberá que escoller unhas escalas axeitadas nos eixes correspondentes.

Nos países anglosaxóns úsase habitualmente a escala Fahrenheit para medir temperaturas. Nesta escala o punto de conxelación da auga acádase a 32° F e o de ebullición a 212° F.

Na nosa escala Celsius, estes puntos acádanse a 0° C e 100° C respectivamente.

Acha a ecuación que relaciona a temperatura medida en °C coa medida en °F e represéntaa. Cal é a temperatura en °C equivalente a 80° F? Cal será a temperatura en °F equivalente a 36° C?

Pasa polos puntos P = (32,0) e Q = (212,100)

A ecuación continua é:  $\frac{y - 0}{100 - 0} = \frac{x - 32}{212 - 32}$

E a ecuación explícita:  $y = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9}$

$x = 80^\circ \text{ F} \Rightarrow y = 62,2^\circ \text{ C}$

$y = 36^\circ \text{ C} \Rightarrow x = \frac{9}{5} \left( y + \frac{160}{9} \right) = 96,8^\circ \text{ F}$

### Problemas combinados

Onde realmente resulta interesante o uso das funcións lineais é no estudo simultáneo de varias funcións de xeito que poidamos comparalas con facilidade.

Debaixo tes un exemplo ilustrativo:

**Que compañía me interesa máis?**

A compañía A ofréceme unha cota fixa de 15€ ao mes máis 0,05€/min.  
 A compañía B ofréceme pagar só polo consumo a 0,25€/min.  
 A compañía C ofréceme unha cota de 0,15€/min cun mínimo de 15€.

Se chamamos x ao tempo (en minutos) de consumo e y ao importe total, a función que describe o gasto con cada compañía é:

A:  $y = 0,05x + 15$   
 B:  $y = 0,25x$   
 C:  $y = \begin{cases} 15 & \text{se } x \leq 100 \\ 0,15x & \text{se } x > 100 \end{cases}$  (porque se falamos menos de 100 minutos cóbrannos 15€)

As gráficas destas funcións son:

Se falo menos de 60 min ao mes a máis barata é a compañía B.

Se falo entre 60 e 150 minutos ao mes, é mellor C.

Se falo máis de 150 minutos ao mes, a mellor será A.

Minutos falados: 40 min  
 Custo mensual: 10 €

**Chegaron as rebaixas.**

Nun comercio aplican o 18% de desconto a todos os seus produtos.

Acha a ecuación que relaciona o prezo rebaxado co orixinal e represéntaa.

Canto custa unha camisa que antes custaba 72€?  
 Se paguei 65,60€ por uns pantalóns, canto custaban antes?

Se o desconto é do 18%, cada produto custa o 82% do seu prezo orixinal. Polo tanto a ecuación é  $y = 0,82 \cdot x$ , que é unha función lineal de pendente 0,82.

Pasa polos puntos P = (0,0) e Q = (100,82).

$x = 72\text{€} \Rightarrow y = 0,82 \cdot 72 = 59,04\text{€}$

$y = 65,60\text{€} \Rightarrow x = 65,60 / 0,82 = 80\text{€}$

## EXERCICIOS resoltos

19.

Nunha cidade teñen implantada a Ordenanza de Regulación de Aparcamiento (O.R.A.). A norma indica que se debe pagar certa cantidade por cada minuto e que non hai un mínimo.



Xohán pon 1,35€ e o parquímetro indica que dispón de 45 minutos. Sara con 0,84€ ten 28 minutos.

Acha a ecuación que relaciona o prezo co tempo e represéntaa. Canto hai que pagar por un aparcamento de 55 minutos? De canto tempo dispoño se pago 2,40€?

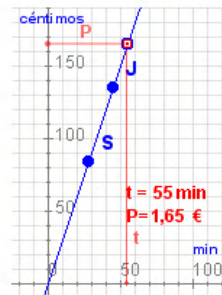
Eliximos as escalas de maneira que o tempo estea en minutos e o prezo en céntimos de euro.

Pasa polos puntos:  
J = (45,135) e S = (28,84).

Como pasa pola orixe é lineal e a pendente é  $m = 135/45 = 3$   
A ecuación é  $y = 3x$

$$x = 55 \text{ min} \Rightarrow y = 3 \cdot 55 = 165 \text{ c} = 1,65\text{€}$$

$$y = 2,40\text{€} \Rightarrow x = 240/3 = 80 \text{ min}$$



20.

Nun banco ofrécennos un depósito a prazo fixo ao 5% anual, cunha comisión anual de mantemento de 20€, sexa cal for o depósito realizado.



Obtén a ecuación que relaciona o xuro producido co capital depositado.

Canto producirán 3.000€ nun ano?  
A canto ascendeu o depósito se o xuro percibido foi de 117,50€?

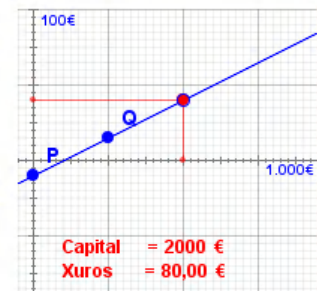
O xuro é directamente proporcional ao capital depositado. A constante de proporcionalidade é 5% = 0,05 e a comisión inicial é de 20€. Logo é unha función afín de ecuación  $y = 0,05 \cdot x - 20$

Pasa polos puntos P = (0,-20) e Q = (1.000,30)

$$x = 3.000\text{€} \Rightarrow y = 0,05 \cdot 3.000 - 20 = 130\text{€}$$

$$y = 117,50\text{€} \Rightarrow x = \frac{y+20}{0,05} = 2.750\text{€}$$

Observa as escalas: cada unidade en horizontal son 1.000€ e cada unidade vertical son 100€. Comproba que só hai beneficio se o depósito inicial é superior a 400€.  
*move o punto vermello*



Capital = 2000 €  
Xuros = 80,00 €

21.

Final de etapa.

Nunha etapa con final en alto un escapado está a 8 km da meta e circula a 10 km/h. O grupo perseguidor atópase a 10 km da meta rodando a 15 km/h. Darán alcance ao escapado se manteñen as velocidades? E, en caso afirmativo, canto tardarán e a que distancia da meta se producirá a captura?

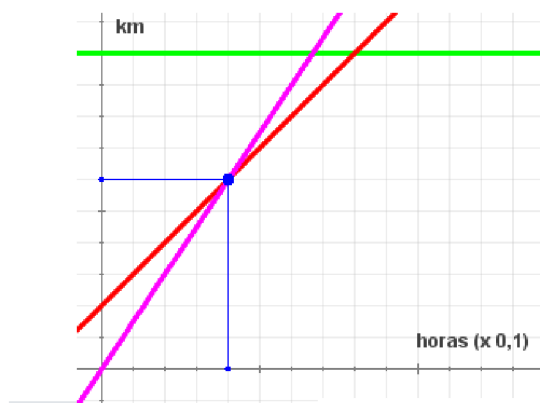


Se chamamos x ao tempo transcorrido desde agora (medido en horas) e y á distancia percorrida desde este momento (medida en km), entón o escapado está 2 km por diante do grupo perseguidor. Logo a función que describe o desprazamento a respecto do tempo en cada un dos casos é:

Escapado:  $y = 10x + 2$       Grupo perseguidor:  $y = 15x$       Meta:  $y = 10$

As súas gráficas (segundo a cor) son:

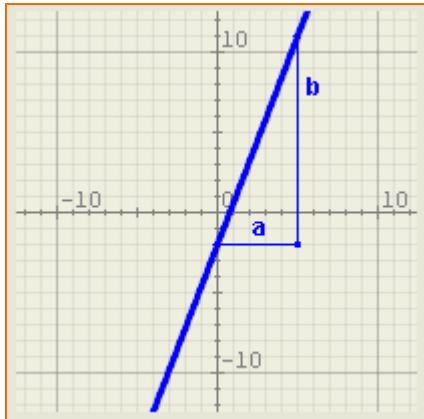
Alcázanse en 0,4 horas (24 minutos) a 4 km da meta.





## Para practicar

1. Representa graficamente as rectas de ecuacións  $y=2x/5$  e  $5x+y+5=0$ .
2. Acha a ecuación da recta da imaxe:



3. Acha a ecuación xeral da recta que pasa polo punto  $P(3,-2)$  e cuxa pendente é  $m=-2$ .
4. Acha a ecuación xeral da recta que pasa polos puntos  $P(3,-2)$  e  $Q(-2,-1)$ .
5. Determina a pendente e a ordenada na orixe da recta de ecuación  $3x+2y-2=0$ .
6. Determina a posición relativa das rectas  $y=3x-2$  e  $y=-2x-2$ . No caso de cortárense acha tamén as coordenadas do punto de intersección.
7. Descubre se os puntos  $A(-2,-4)$ ,  $B(0,-2)$  e  $C(3,1)$  están aliñados.
8. Acha a ecuación da recta paralela a  $y=3x-4$  que pasa polo punto  $(-3,-10)$ .
9. Dous agricultores de zonas diferentes cultivan millo cos rendementos e custos que se indican debaixo. Descubre cantas ha debe ter cada un para empezar a ter beneficios e quen ten máis beneficio en función do número de ha cultivadas.

### Labrego 1:

Rendemento: 6,35 Tm/ha.  
 Custos por rego, abono, etc: 188 €/ha.  
 Custos fixos (seguro, impostos, etc): 5715 €

### Labrego 2:

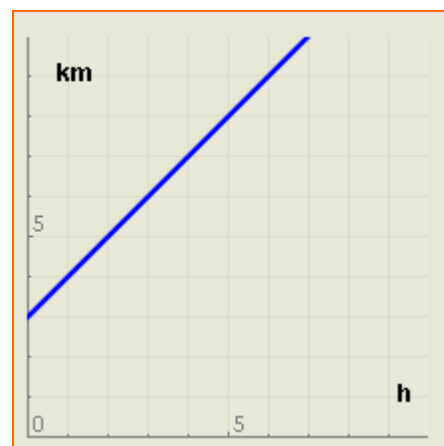
Rendemento: 3,64 Tm/ha.  
 Custos por rego, abono, etc: 50 €/ha.  
 Custos fixos (seguro, impostos, etc): 2043 €

Prezo do millo: 222 €/Tm

10. A area contida nun reloxo de area ocupa un volume de  $563 \text{ cm}^3$  e o fabricante indica que a velocidade de caída da area é de  $7 \text{ cm}^3/\text{s}$ . Descubre canto tarda en haber a mesma cantidade de area nas dúas partes do reloxo.



11. Acha a ecuación da función que describe a seguinte frase: "Un móbil está a 3 km de min e achégase a  $2 \text{ km/h}$ ".
12. Acha a ecuación da función que describe a seguinte frase: "Un móbil está ao meu carón durante 1 hora e logo afástase a  $2 \text{ km/h}$ ".
13. A gráfica seguinte representa a distancia á que se atopa unha persoa con respecto a min en relación co tempo transcorrido. Expresa cunha frase o seu significado.





## Para saber m3ais



### Relaci3ns non lineais

Lembra o problema que se che presenta ao principio da quincena: se unha sand3a pesa o dobre que outra o seu prezo ser3 o dobre. Pero se o raio dunha sand3a 3 o dobre do da outra, ser3 o seu prezo tam3n o dobre?

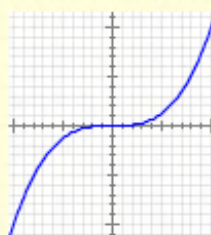


Sup3nhamos que 1kg custa 0'75€.

O custo dunha sand3a de  $x$  kg 3  $y = 0'75x$ . 3 unha funci3n lineal. O prezo 3 directamente proporcional ao peso.

O peso 3, a s3a vez, directamente proporcional ao volume e o volume dunha esfera 3  $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ . Logo se o raio da primeira 3  $r$  e o da segunda 3  $2r$ , o volume da primeira 3 proporcional a  $r^3$  e o da segunda a  $(2r)^3 = 8r^3$ . Polo tanto o volume, o peso e, en definitiva, o prezo da segunda 3 8 veces maior que o da primeira.

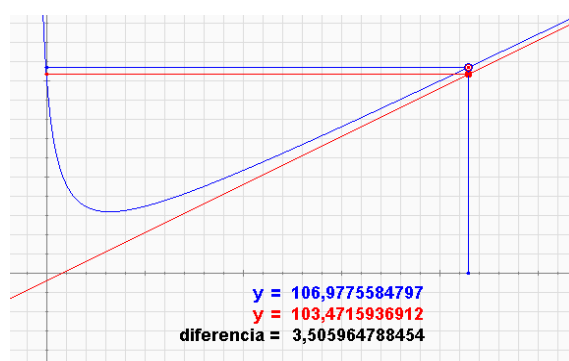
A relaci3n entre peso (ou prezo) e lonxitude non 3, polo tanto, lineal. Como o peso non 3 proporcional 3 lonxitude, sen3n ao cubo da lonxitude, dicimos que a relaci3n entre estas d3as magnitudes 3 **c3bica**. A s3a gr3fica ten este aspecto:



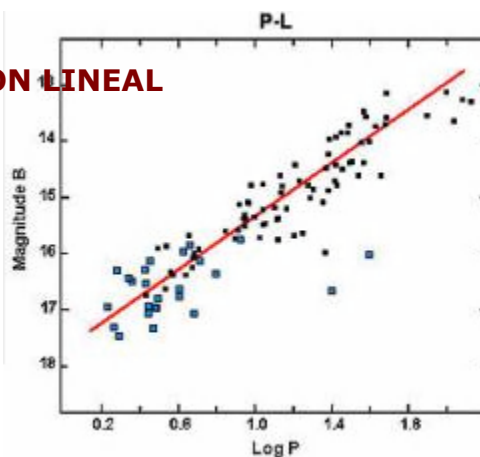
$$y = x^3$$

### Comportamento asint3tico

Algunhas funci3ns non lineais te3nen a propiedade de que canto m3ais grande 3 o valor de  $x$  m3ais semellan unha funci3n lineal ou af3n (3 dicir, unha li3a recta). Isto facilita o estudo da s3a tendencia a longo prazo. Esta recta recibe o nome de **as3ntota** e dise que a funci3n ten un comportamento **asint3tico**.



### REGRESI3N LINEAL



3 unha das t3cnicas m3ais usadas pola ciencia. Se se quere estudar a relaci3n que existe entre d3as magnitudes fanse moitas observaci3ns asignando unha parella de valores a cada unha. Obtense as3 unha nube de puntos que pode ou non mostrar unha tendencia.

No exemplo parece existir certo comportamento lineal.



### Derivadas:

Comportamento lineal dunha funci3n non lineal. A funci3n azul da imaxe non 3 lineal. A vermella 3 unha funci3n af3n tanxente nun punto da primeira. Preto do punto  $x = 0,5$  os valores de ambas as d3as funci3ns son moi parecidos. Lonxe do punto son moi diferentes. Cando estamos estudando unha funci3n preto dun punto 3 m3ais doado facer c3lculos cunha funci3n lineal ou af3n que se aproxime a ela. A recta tanxente a unha funci3n nun punto recibe o nome de **funci3n derivada** no punto e aprender3s a calculala nos cursos vindeiros.

# Funcións lineais

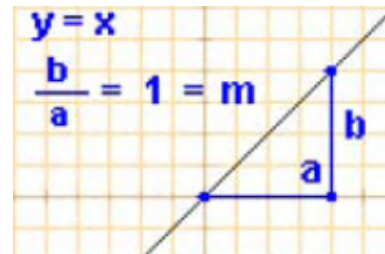


## Lembra o máis importante

### Funcións lineais

Son as funcións que relacionan magnitudes directamente proporcionais e a súa ecuación é da forma  $y = mx$

A súa representación gráfica é sempre unha liña recta que pasa pola orixe. A pendente,  $m$ , é a constante de proporcionalidade.

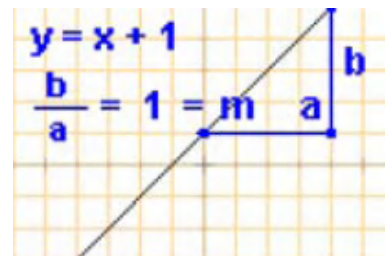


### Funcións afíns

Relacionan magnitudes directamente proporcionais sometidas a algunha condición inicial. Teñen a forma

$$y = mx + n$$

A súa gráfica é unha recta de pendente  $m$  que pasa polo punto  $(0, n)$  ( $n$  é a **ordenada na orixe**).



### Ecuación da recta

- Ecuación explícita:  $y = mx + n$
- Ecuación punto-pendente: se se coñece a pendente,  $m$ , e as coordenadas dun punto  $(x_0, y_0)$  a ecuación é:

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

- Ecuación da recta que pasa por dous puntos:  
Se se coñecen as coordenadas de dous puntos  $P(x_0, y_0)$ ,  $Q(x_1, y_1)$  a ecuación é:

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

- Ecuación xeral: Simplificando calquera das ecuacións anteriores obtense:

$$Ax + By + C = 0$$

a pendente é  $m = -A/B$  se  $B \neq 0$

### Posición relativa de dúas rectas

$$r_1: y = m_1x + n_1; \quad r_2: y = m_2x + n_2$$

Se  $m_1 = m_2$  son **paralelas** ou **coincidentes** no caso contrario son **secantes**.

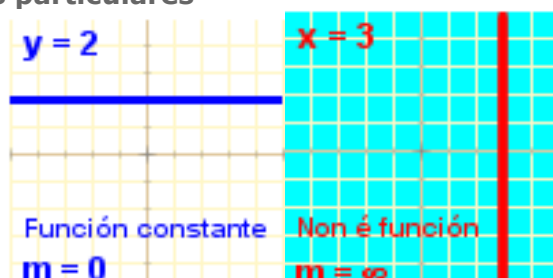
$$r_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$r_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

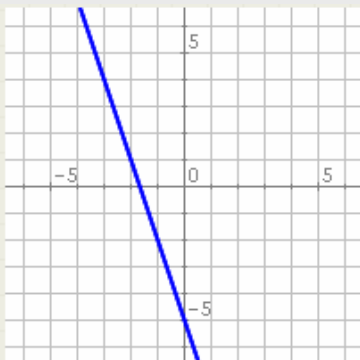
Se  $A_1B_2 = A_2B_1$  son **paralelas** ou **coincidentes** no caso contrario son **secantes**.

Se son secantes as coordenadas do punto de intersección calcúlanse resolvendo o sistema.

### Casos particulares



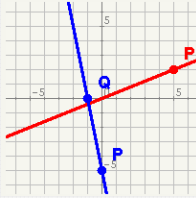
## Autoavaliación



1. Escribe a pendente e a ordenada na orixe da recta da imaxe.
2. Calcula a ordenada na orixe da recta que pasa polo punto  $(-4, -1)$  e cuxa pendente é  $-3$ .
3. Calcula a ordenada na orixe da recta de ecuación  $-3x - 3y + 2 = 0$
4. Calcula a pendente da recta do exercicio anterior.
5. Calcula a pendente da recta que pasa polos puntos  $P(-5, -4)$  e  $Q(-4, -2)$ .
6. Determina a posición relativa das rectas de ecuacións  $y = -3x - 5$  e  $y = 2x - 2$ .
7. Determina a posición relativa das rectas de ecuacións  $4x - 3y + 5 = 0$  e  $-8x + 6y + 1 = 0$ .
8. Acha as coordenadas do punto de corte das rectas de ecuacións  $y = -x + 5$  e  $y = 2x - 7$ .
9. Estuda se os puntos  $A(-3, -1)$ ,  $B(0, -1)$  e  $C(6, -4)$  están aliñados.
10. Acha a ecuación da recta paralela a  $y = -x + 5$  que pasa polo punto  $(4, -2)$ .

## Solucións dos exercicios para practicar

1.



2.  $y = \frac{13}{5}x - 2$

3.  $2x + y - 4 = 0$

4.  $x + 5y + 7 = 0$

5.  $m = -3/2, n = 1$

6. Son secantes e córtanse no punto  $(0, -2)$

7. Si están aliñados. (Acha a ecuación da recta que pasa por A e por B e comproba que tamén pasa por C).

8.  $y = 3x - 1$

9. O primeiro obtén beneficios a partir de 4,43 ha. O segundo a partir de 3,58 ha. O primeiro gaña máis que o segundo a partir de 5,13 ha.

10. 40,2 segundos.

11.  $y = 2x + 3$

12.  $y = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 2x - 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

13. Está a tres km de min e afástase 1 km/h.

## Solucións AUTOAVALIACIÓN

1.  $m = -3, n = -5$

2.  $n = -13$

3.  $n = 2/3 \approx 0,66$

4.  $m = -1$

5.  $m = 2$

6. Son secantes porque as súas pendentes son diferentes.

7. Son paralelas porque  $A_1 \cdot B_2 = A_2 \cdot B_1$

8.  $x = 4, y = 1$

9. Non están aliñados.

10.  $y = -x + 2$

Non esquezas enviar as actividades ao titor ►