7

Movementos no plano

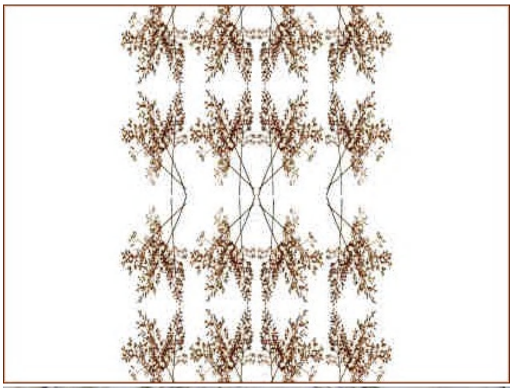
Obxectivos

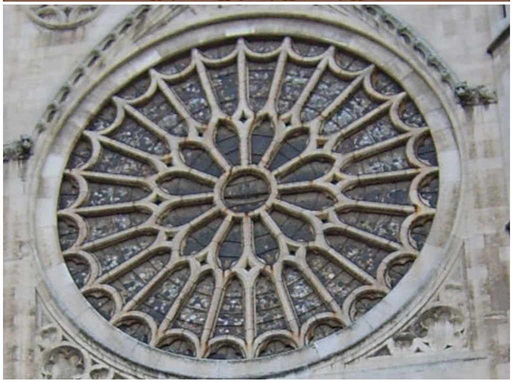
Nesta quincena aprenderás a:

- Manexar o concepto de vector como elemento direccional do plano.
- Recoñecer os movementos principais no plano: translacións, xiros e simetrías.
- Aplicar un ou máis movementos a unha figura xeométrica.
- Recoñecer movementos xeométricos na arte, a natureza, etc..

Antes de empezar





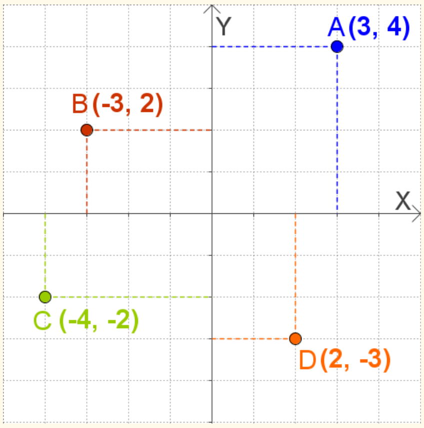



Na natureza, na arte, en moitos obxectos cotiás, atoparás mostras das formas xeométricas que vas estudar aquí. Mira ao teu redor e observa

Lembra

Nun sistema de eixes cartesianos cada punto exprésase mediante dúas coordenadas (x,y).

A primeira ou abscisa indica a posición sobre o eixe horizontal, positiva á dereita da orixe, negativa á esquerda. A segunda ou ordenada a posición sobre o eixe vertical, positiva cara arriba, negativa cara abaixo.



1. Vectores

Concepto de vector. Coordenadas

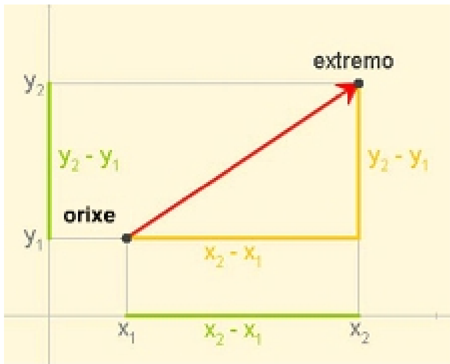
Un vector $\overrightarrow{AB}$ está determinado por dous puntos do plano, $A(x_1,y_1)$ que é a súa **orixe** e $B(x_2,y_2)$ que é o seu **extremo**.

As coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ son as de B menos as de A:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1\ ,\ y_2 - y_1).$$

Un vector tee **módulo**, **dirección** e **sentido**:

- **Módulo**, é a distancia entre a orixe e o extremo,
- **Dirección**, é a recta que pasa pola orixe e extremo ou calquera recta paralela a ela e
- **Sentido** é o que vai desde a orixe cara o extremo e márcao a frecha.

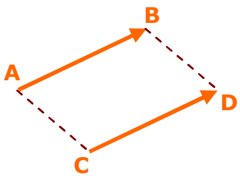


Para calcular o módulo basta utilizar o Teorema de Pitágoras:

$$\overrightarrow{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Vectores equipolentes

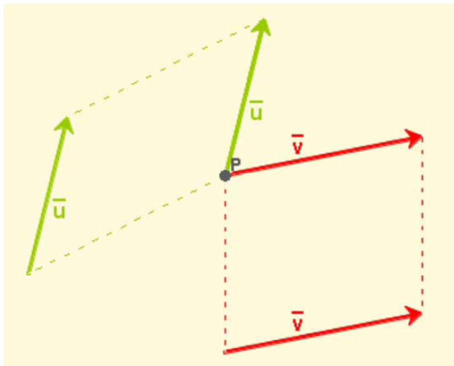
Dous vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ dinse **equipolentes** se teñen o **mesmo módulo**, a **mesma dirección** e o **mesmo sentido**.



Observa que parece que o vector $\overrightarrow{AB}$ se trasladou paralelamente a si mesmo ata ocupar a posición do vector $\overrightarrow{CD}$.

ABCD é un paralelogramo.

- Dous vectores equipolentes son representantes do mesmo vector libre.



A importancia dos vectores equipolentes reside en que se poden trasladar a calquera punto.

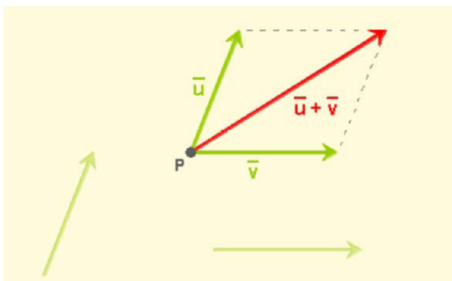
Suma de vectores

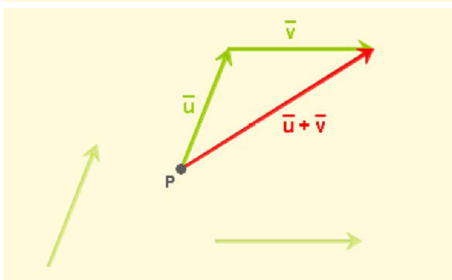
A suma de dous vectores, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, é outro vector, $\vec{u}+\vec{v}$, que podemos construír de dúas formas:

- Situando os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ con orixe no mesmo punto. O vector $\vec{u}+\vec{v}$ queda entón sobre a diagonal maior do paralelogramo construído sobre os vectores sumandos.

- Facendo coincidir a orixe do vector $\vec{v}$ co extremo de $\vec{u}$. O vector $\vec{u}+\vec{v}$ ten coma orixe a orixe de $\vec{u}$ e como extremo o de $\vec{v}$.

En coordenadas, a suma de $\vec{u}=(u_1,u_2)$ e $\vec{v}=(v_1,v_2)$ é: $\vec{u}+\vec{v}=(u_1+v_1,\ u_2+v_2)$



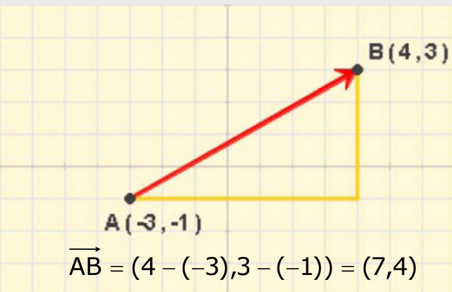


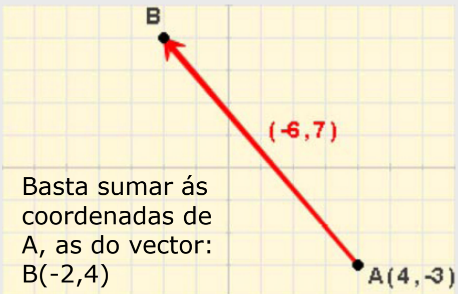
EXERCICIOS resoltos

1. As coordenadas do vector $\overrightarrow{AB}$ son as de B menos as de A. Calcula:

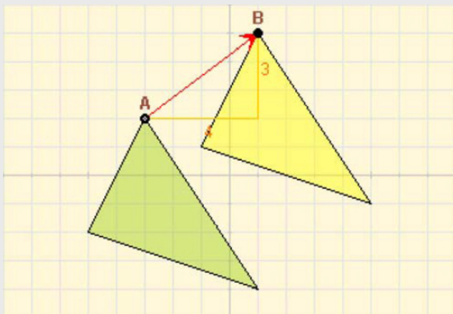
a) As coordenadas do vector $\overrightarrow{AB}$

b) As coordenadas do punto B.



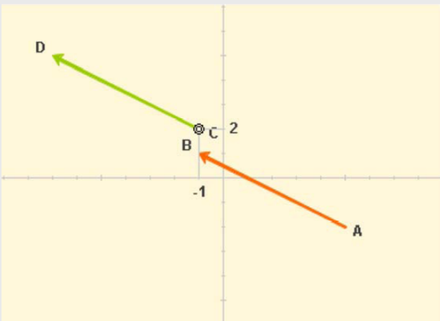


2. As triángulos amarelo e verde son iguais, que distancia hai entre os puntos homólogos, A(-3,2) e B(1,5)?



A distancia entre A e B é o módulo do vector $\overrightarrow{AB}$=(4,3)
Aplicando o Teorema de Pitágoras:
$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$

3. Os vectores equipolentes teñen as mesmas coordenadas, dados o punto A(5,-2) e B(-1,1), cales son as coordenadas do punto D?

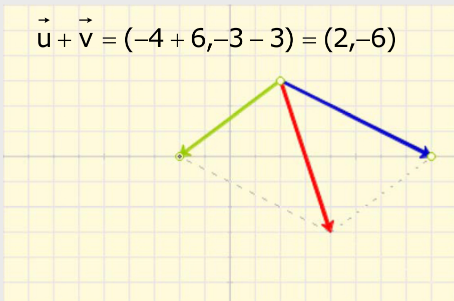


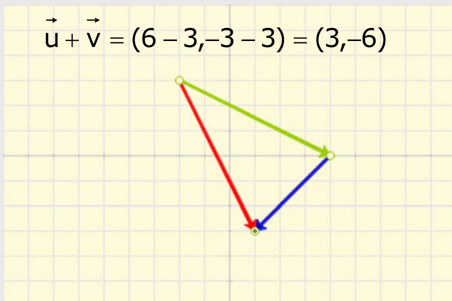
O vector $\overrightarrow{AB}$=(-1-5,1+2) = (-6,3)
O vector $\overrightarrow{CD}$ ten as mesmas coordenadas.
As do punto D son: (-1-6, 2+3)
D(-7,5)

4. Suma en cada caso gráfica e analiticamente, os vectores verde $\vec{u}$, e azul, $\vec{v}$.

a) $\vec{u}$=(-4,-3) $\vec{v}$=(6,-3)

b) $\vec{u}$=(6,-3) $\vec{v}$=(-3,-3)

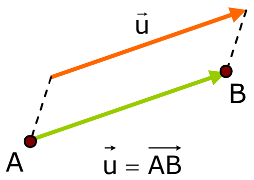




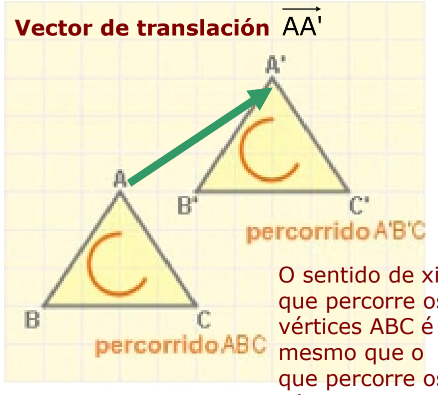
2. Translacións

Translación segundo un vector

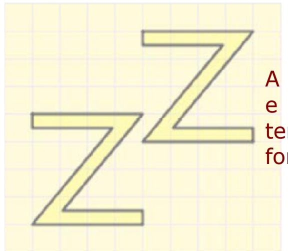
Unha translación de vector $\vec{u}$ é un movemento que transforma cada punto **A** do plano, noutro punto **B** de xeito que o vector $\overrightarrow{AB}$ é igual ao vector $\vec{u}$



- Unha translación é un **movemento directo**, é dicir que conserva a orientación, e **isomorfo**, non cambia a forma das figuras.



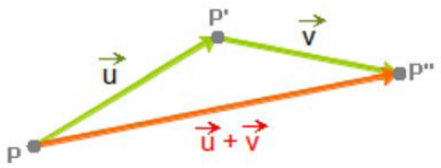
O sentido de xiro que percorre os vértices ABC é o mesmo que o que percorre os vértices A'B'C'.



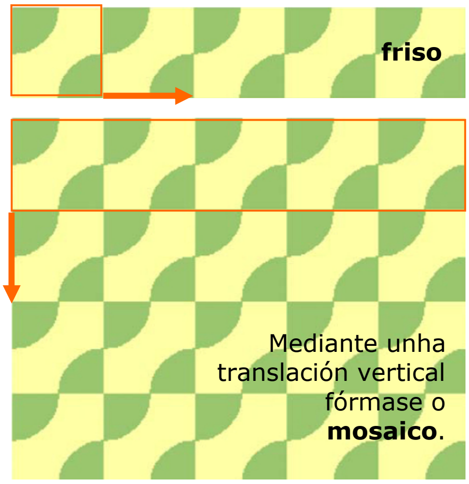
A figura orixinal e a trasladada teñen a mesma forma

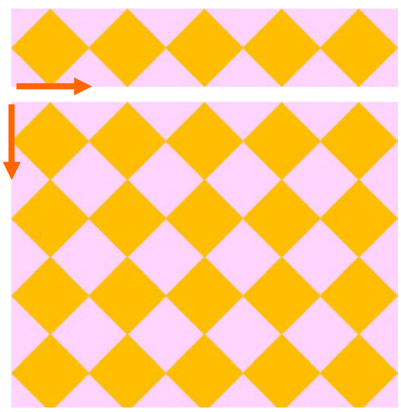
Composición de translacións

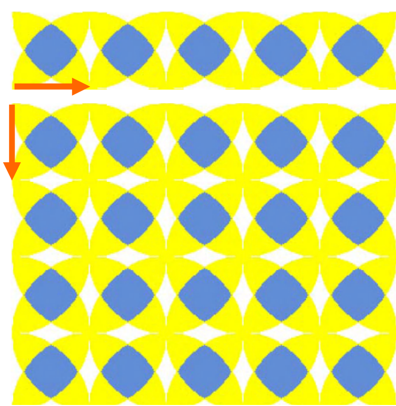
Dúas translacións, de vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, pódense compoñer para formar unha translación de vector $\vec{u}+\vec{v}$

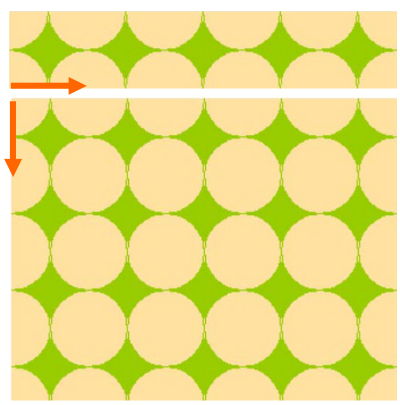


Mediante a composición de translacións é posible compoñer interesantes **frisos** ou **cenefas**, que se poden ampliar a **mosaicos**, como podes apreciar nas imaxes.



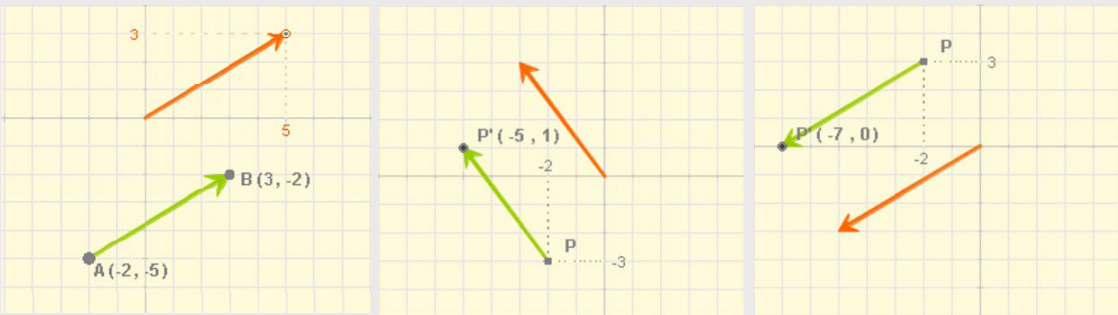






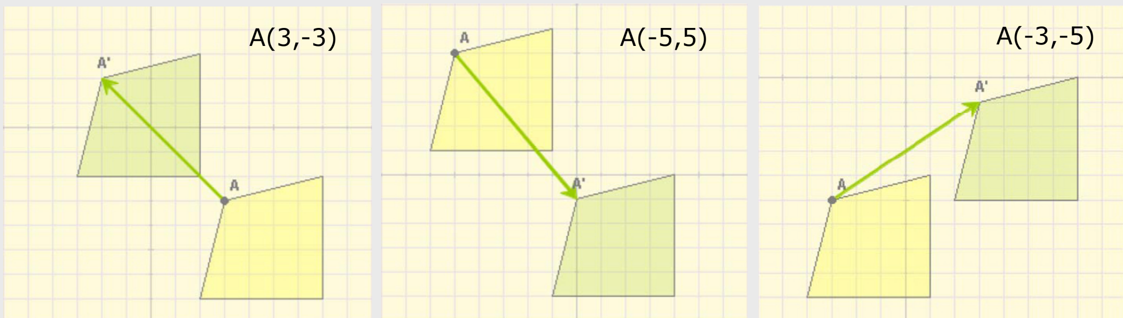
EXERCICIOS resoltos

1. Ao trasladarse as coordenadas dun punto vense incrementadas polas do vector de translación. Compróbao nos seguintes casos:



2. O cuadrilátero verde é o trasladado do amarelo en cada caso. Calcula as coordenadas do punto A.

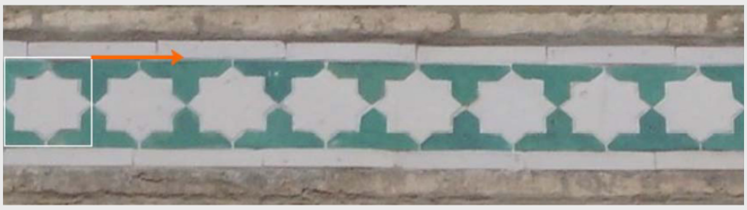
a) $\vec{v}=(-5,5)$ A'(-2,2) b) $\vec{v}=(5,-6)$ A'(0,-1) c) $\vec{v}=(6,4)$ A'(3,-1)



3. A arte mostra translacións como podes apreciar nos exemplos seguintes:

Motivo que pode apreciarse en moitas igrexas románicas, este é da igrexa de San Xoán Bautista de León.

Figura presente na ornamentación mudéxar, Catedral da Seo de Zaragoza

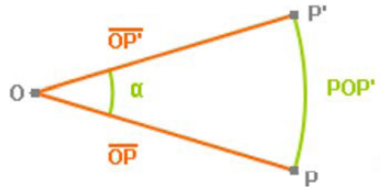


Mosaico romano

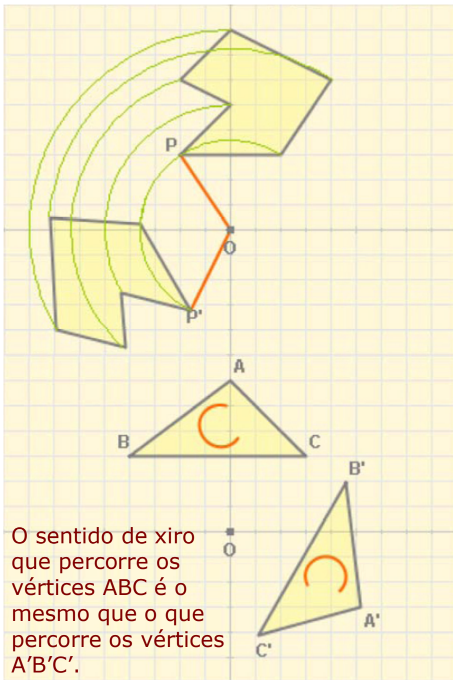
3. Xiros

Xiro de centro O e ángulo α

Un xiro, de centro un punto **O** e amplitude un ángulo α, transforma cada punto **P** do plano noutro punto **P’** de modo que o ángulo **POP'** é igual a α e as distancias **OP** e **OP'** son iguais.



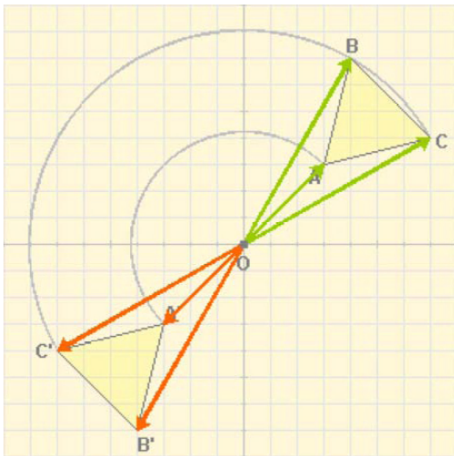
Debes ter en conta que un xiro pode ter **orientación positiva** (contraria ás agullas do reloxo) ou **negativa**.



O sentido de xiro que percorre os vértices ABC é o mesmo que o que percorre os vértices A’B’C’.

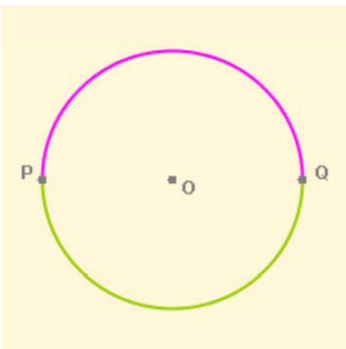
Simetría respecto a un punto

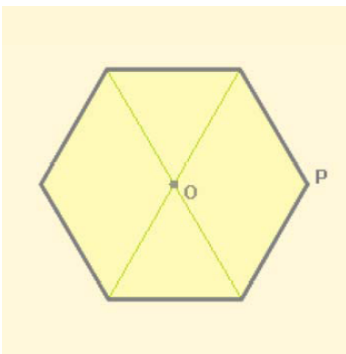
Unha **simetría central**, ou simetría respecto a un punto O, é un **xiro** de centro O e amplitude 180º. Transforma pois, cada punto **P** noutro punto **P'** de xeito que o ángulo **POP'** é igual a 180º e as distancias **OP** e **OP'** son iguais.

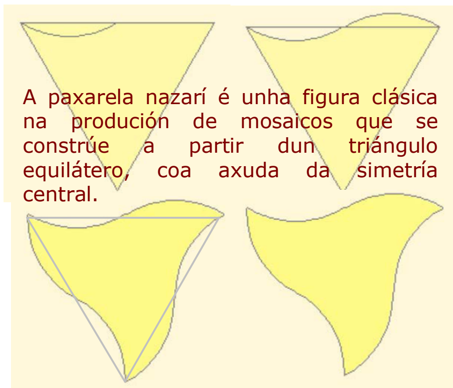


Se ao aplicar a unha figura unha simetría de centro O a figura non varía, O dise que é o seu **centro de simetría**.

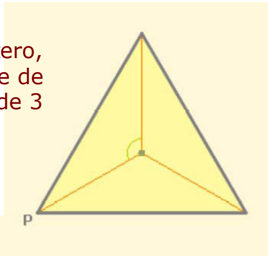
Exemplos de figuras con centro de simetría:



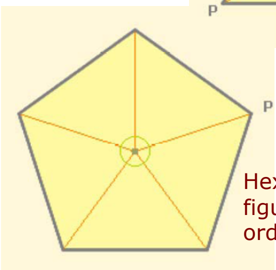




A paxarela nazarí é unha figura clásica na produción de mosaicos que se constrúe a partir dun triángulo equilátero, coa axuda da simetría central.



Triángulo equilátero, figura invariante de orde 3



Hexágono regular, figura invariante de orde 6

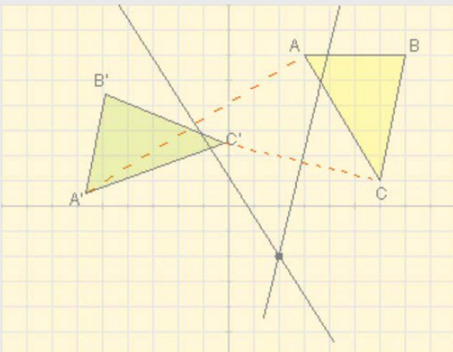
Figuras invariantes de orde n

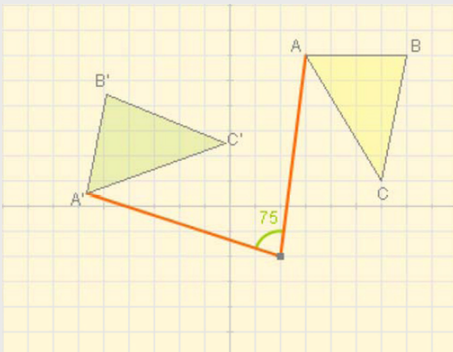
Se ao xirar unha figura con centro nun punto O e segundo un ángulo menor que 360º, coincide con si mesma, o punto **O** dise que é **centro de xiro** da figura.

Se ao aplicar a unha figura un xiro de 360º ao redor do seu centro de xiro prodúcense **n** coincidencias, dito centro dise de **orde n** e a figura **invariante de orde n**.

EXERCICIOS resoltos

5. Cal é o centro do xiro que transforma o triángulo amarelo no verde?

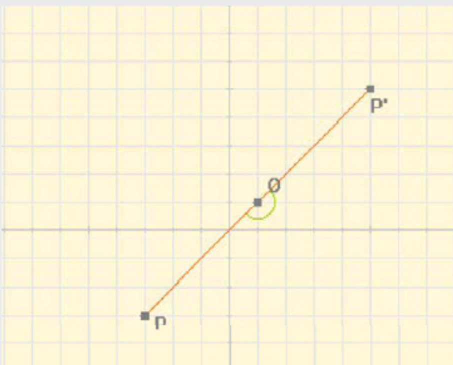


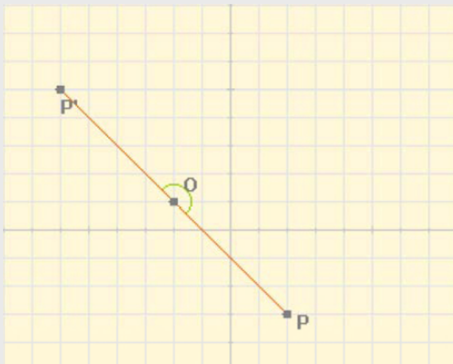


Trázase o segmento que une dous puntos homólogos, por exemplo A e A', e debuxamos a mediatriz. Facemos o mesmo con outros dous puntos, C e C' na figura. O punto no que se cortan as mediatrices é o centro de xiro.
Co transportador podemos medir o ángulo, neste exemplo 75º.

6. Cales son as coordenadas do punto P', simétrico do P na simetría de centro o punto O?

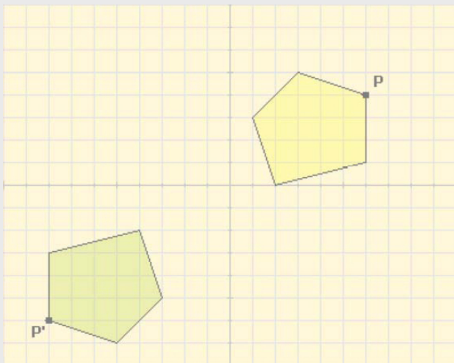
a) O(1,1) P(-3,-3) → P'(5,5) b) O(-2,1) P(2,-3) → P'(6,5)

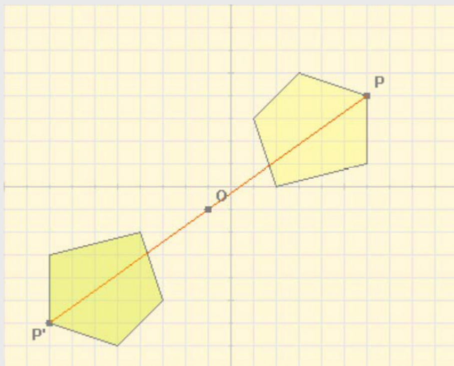




EXERCICIOS resoltos

4. Na imaxe móstrase un polígono (cor amarelo) e o seu simétrico (cor verde) respecto ao punto O, cales son as coordenadas de O?

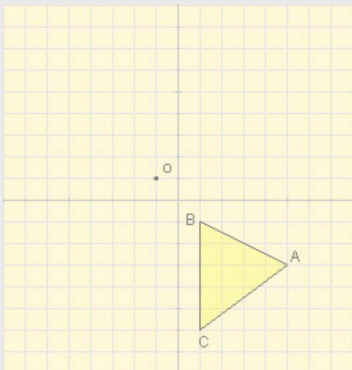


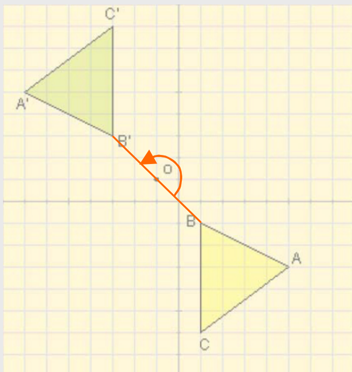


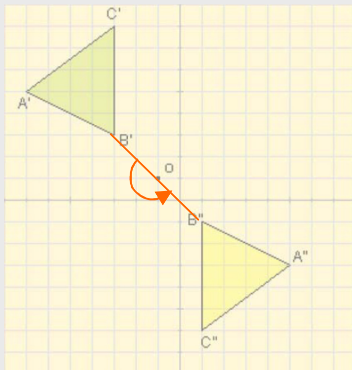
O centro de simetría é o punto medio do segmento que une P(6,4) e P'(-8,-6), O(-1,-1), para calculalas basta facer a semisuma correspondente (6-8)/2=-1, (4-6)/2=-1

5. Ao triángulo amarelo aplicámoslle sucesivamente dúas simetrías centrais respecto ao mesmo punto, O, cal é o resultado?

Ao aplicarlle a simetría de centro O resulta o triángulo verde, cando a este se lle aplica de novo unha simetría do mesmo centro volve á posición inicial.

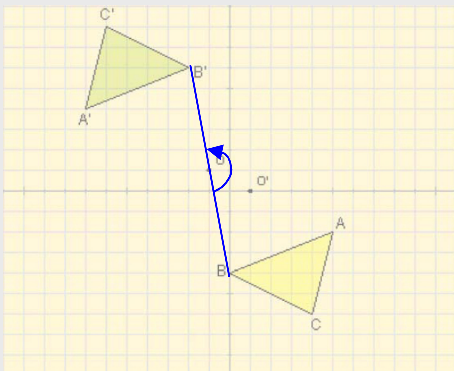


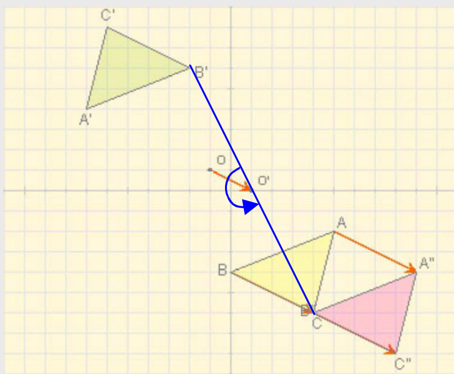




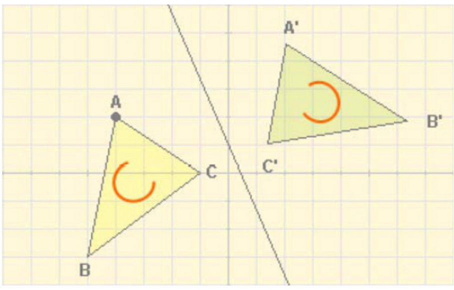
6. Aplícase ao triángulo amarelo unha simetría de centro O, e despois outra de centro O', cal é o resultado?

Ao aplicarlle a simetría de centro O resulta o triángulo de cor verde, a este aplícaselle a simetría de centro O' resultando o de cor rosa, o mesmo que se o triángulo inicial (amarelo) se traslada polo vector $2\cdot\overline{OO'}$





4. Simetrías



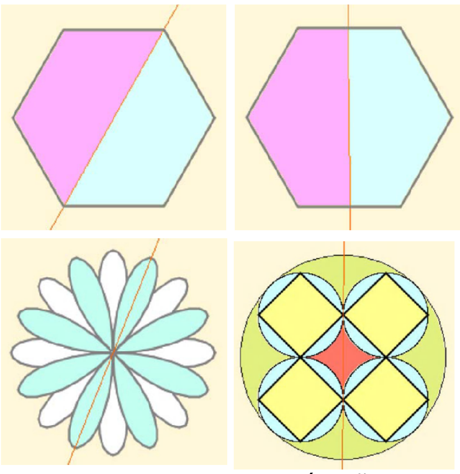
Simetría de eixe e

Unha simetría respecto a un eixe ***e*** é un movemento que transforma cada punto **P** do plano noutro **P'** de xeito que a recta ***e*** é mediatriz do segmento de extremos **P** e **P'**.

Segundo esta definición, debe cumprirse que:

- A recta ***e*** debe ser perpendicular ao segmento **PP'**
- A distancia de **P** á recta ***e*** será igual que a distancia de **P'** a dita recta

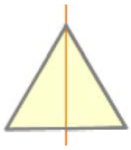
Unha simetría axial é un **movemento inverso**. Observa na figura como se modifica o sentido de xiro dos vértices do triángulo.



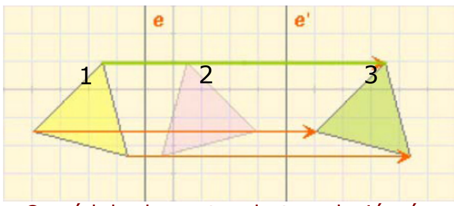
Cantos eixes de simetría teñen?

Figuras con eixe de simetría

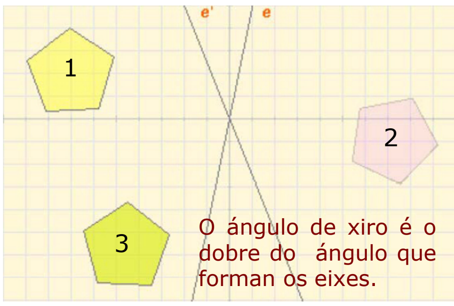
Hai figuras que son **invariantes** (non se modifican) ao aplicarlles unha simetría axial. Nese caso, o eixe da mesma chámase **eixe de simetría** da figura.



Unha figura pode ter varios eixes de simetría. Observa o hexágono da esquerda e dous dos seus seis eixes de simetría.



O módulo do vector de translación é o dobre da distancia entre os eixes.



Composición de simetrías axiais

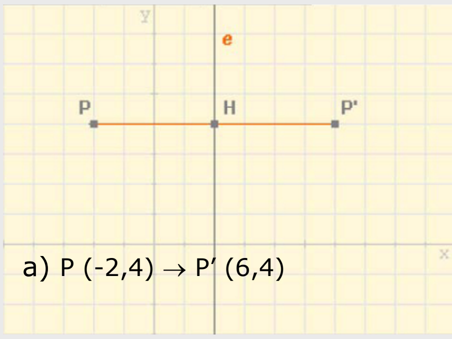
A aplicación consecutiva de dúas simetrías axiais, de eixes ***e*** e ***e'***, dá lugar a un novo movemento que depende da situación relativa dos eixes ***e*** e ***e'***:

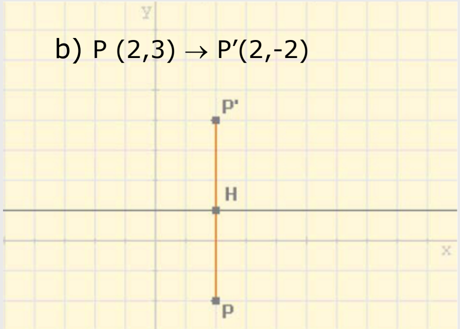
- Se os eixes ***e*** e ***e'*** son paralelos, o resultado é unha translación.
- Se os eixes ***e*** e ***e'*** córtanse nun punto, a composición dá lugar a un xiro ao redor de dito punto.

Como tanto unha translación como un xiro son movementos directos, o resultado de **compoñer dúas simetrías axiais** é un **movemento directo**.

EXERCICIOS resoltos

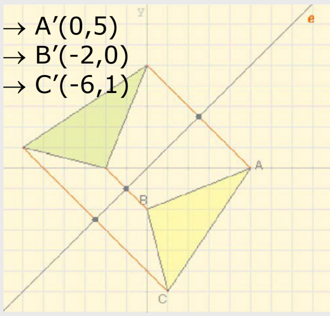
7. Calcula as coordenadas do punto P', simétrico do P respecto ao eixe da figura.



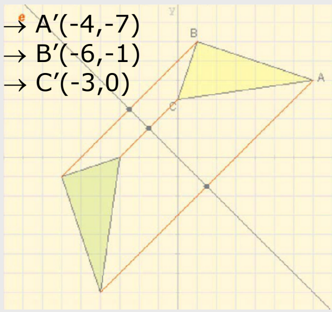


8. En cada caso debuxa o triángulo simétrico respecto do eixe e, do de cor amarelo e indica as coordenadas dos vértices do transformado.

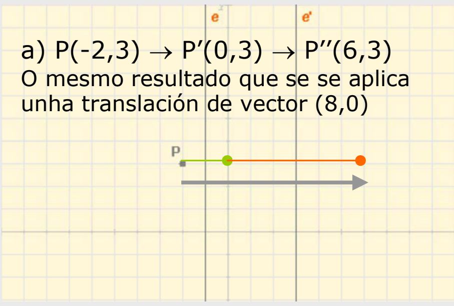
a) A(5,0) → A'(0,5)
B(0,-2) → B'(-2,0)
C(1,-6) → C'(-6,1)

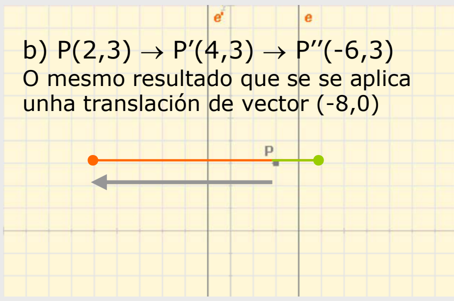


b) A(7,4) → A'(-4,-7)
B(1,6) → B'(-6,-1)
C(0,3) → C'(-3,0)

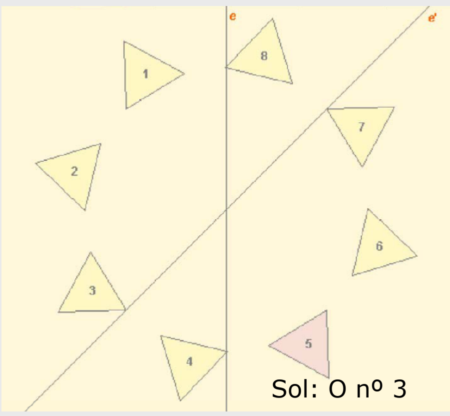


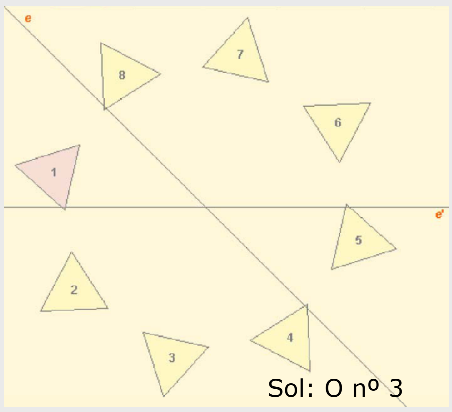
9. Calcula as coordenadas do punto que resulta ao aplicarlle a P primeiro unha simetría de eixe *e* e despois outra de eixe *e'*.





10. Cal é o transformado do triángulo de cor morado respecto á composición de simetrías de eixes *e* e *e'*?

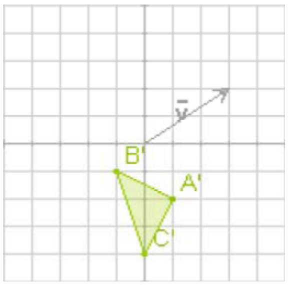




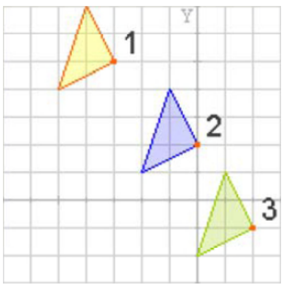
Para practicar

1. Determina as coordenadas e o módulo do vector da translación que transforma o punto A no punto B

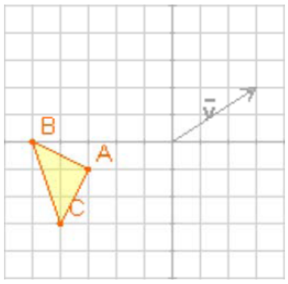
2. Acha o triángulo que deu lugar ao da figura, ao aplicarlle unha translación de vector (3,2).



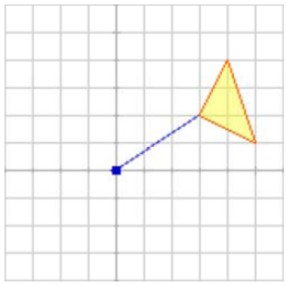
3. O triángulo da figura trasladouse primeiro da posición 1 á 2, mediante unha translación de vector (3,-3), e despois á 3 por unha translación de vector (2,-3). Cal é o vector da translación que pasa directamente de 1 a 3?.



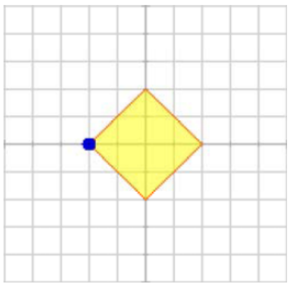
4. Calcula os vértices do triángulo que resulta ao aplicar ao da figura unha translación de vector $\vec{v}=(3,2)$.



5. O triángulo ABC da figura xira 90º en torno á orixe de coordenadas, en que triángulo se transforma?.



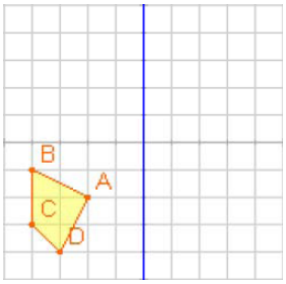
6. O cadrado da figura xira 45º no sentido contrario ás agullas do reloxo, en torno ao vértice sinalado, cales son os vértices do cadrado transformado?.



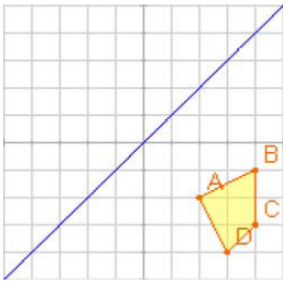
7. Acha a figura transformada do cuadrilátero ABCD por unha simetría:

a) de eixe o de ordenadas

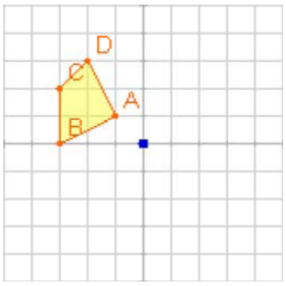
b) o de abscisas.



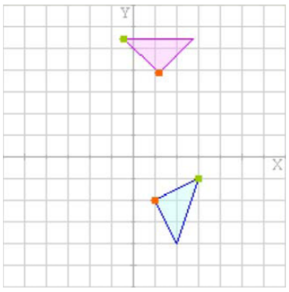
8. Acha a figura transformada do cuadrilátero ABCD por unha simetría de eixe o da figura.



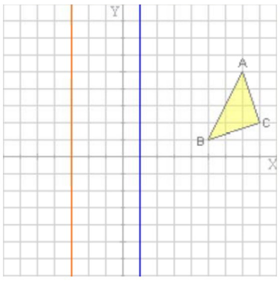
9. Acha a figura transformada do cuadrilátero ABCD por unha simetría central, de centro a orixe de coordenadas.



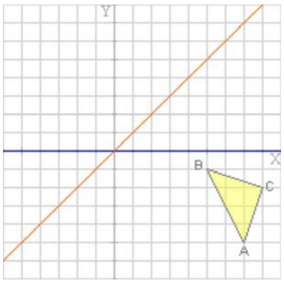
10. O triángulo azul transfórmase no morado tras un xiro de centro O, debúxao e calcula o centro de xiro.



11. Acha a figura transformada do triángulo ABC por unha composición de simetrías, primeiro a de eixe azul e despois a de eixe vermello.



12. Acha a figura transformada do triángulo ABC por unha composición de simetrías, primeiro a de eixe azul e despois a de eixe vermello.

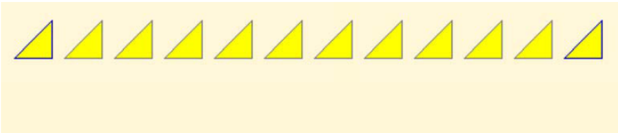


Para saber máis

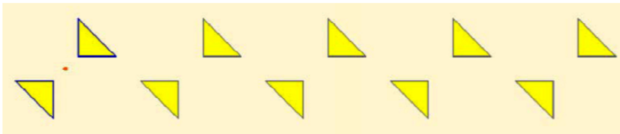
Os sete tipos distintos de frisos

Aínda que poden construírse infinitos tipos de frisos mediante translacións, en realidade todos eles poden clasificarse en só **sete tipos distintos** segundo que movementos existan no motivo que se traslada infinitamente.

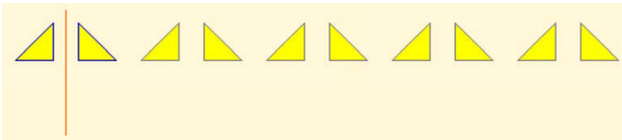
✓ **Tipo 1** O motivo que se traslada non presenta ningún movemento.



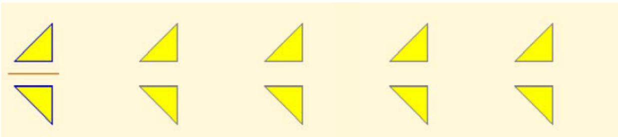

✓ **Tipo 2** O motivo que se traslada presenta unha simetría central.

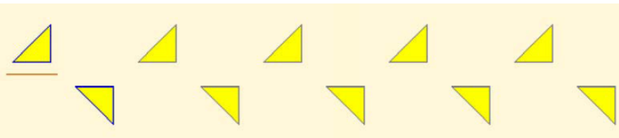
✓ **Tipo 3** O motivo que se traslada presenta unha simetría axial.

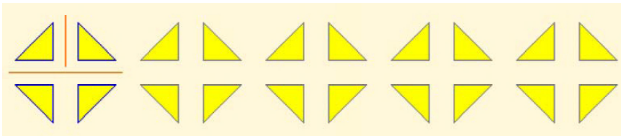
✓ **Tipo 4** O motivo que se traslada presenta unha simetría axial horizontal.




✓ **Tipo 5** O motivo que se traslada presenta unha simetría axial e unha translación.




✓ **Tipo 6** O motivo que se traslada presenta unha simetría axial vertical e outra horizontal.

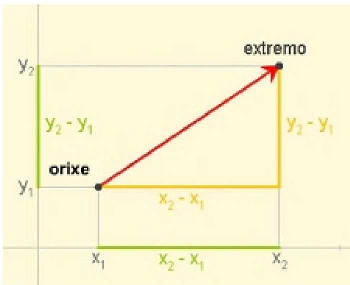



✓ **Tipo 7** O motivo que se traslada presenta unha translación seguida dunha simetría horizontal quedando como resultado unha simetría axial vertical.

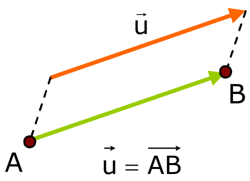

Fotografías de reixas de balcóns na rúa Manifestación de Zaragoza, onde se poden atopar exemplos destes sete tipos.

Lembra o máis importante

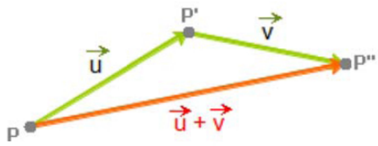
Un vector ten **MÓDULO** que é a distancia entre a orixe e o extremo, **DIRECCIÓN** que é a recta que pasa pola orixe e o extremo ou calquera recta paralela a ela, e **SENTIDO** que é o que vai desde a orixe cara o extremo e márcao a frecha.



Translacións



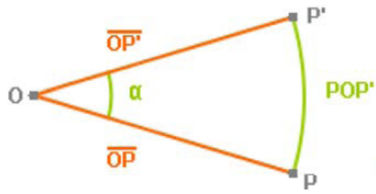
✓ Unha translación de vector $\vec{u}$ é un movemento que transforma cada punto **A** do plano, noutro punto **B** de xeito que o vector $\overrightarrow{AB}$ é igual ao vector $\vec{u}$

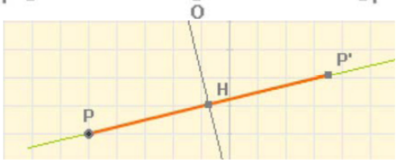


Xiros

✓ Un **xiro**, de centro un punto **O** e amplitude un ángulo α, transforma cada punto **P** do plano noutro punto **P’** de xeito que o ángulo **POP'** é igual a α e as distancias **OP** e **OP'** son iguais.

✓ Se ao xirar unha figura con centro nun punto O e segundo un ángulo menor que 360º, coincide con si mesma, o punto **O** dise que é **centro de xiro** da figura.

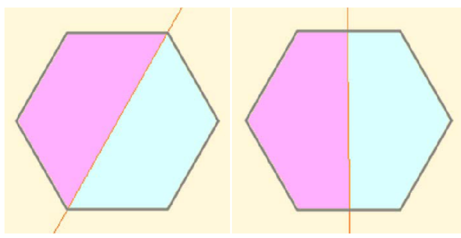




Simetrías

✓ Unha **simetría central**, ou simetría respecto a un punto O, é un **xiro** de centro O e amplitude 180º. Transforma pois, cada punto **P** noutro punto **P**' de xeito que o ángulo **POP'** é igual a 180º e as distancias **OP** e **OP'** son iguais.

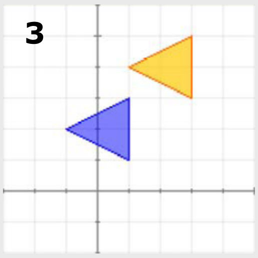
✓ Unha **simetría axial** respecto a un eixe ***e*** é un movemento que transforma cada punto **P** do plano noutro **P'** de xeito que a recta ***e*** é mediatriz do segmento de extremos **P** e **P'**.



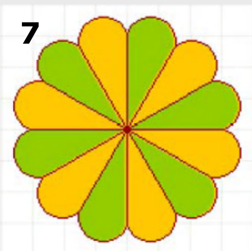
Figuras con eixe de simetría

Autoavaliación

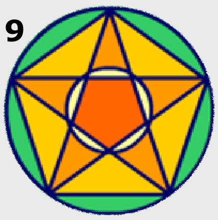
3



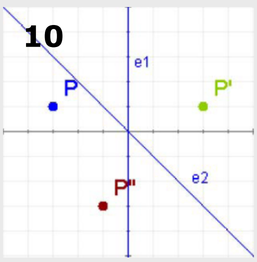
7



9



10



1. Dados os puntos A(-2,2) e B(3,-4), escribe as coordenadas do vector $\overrightarrow{AB}$

2. Que punto se obtén ao trasladar o punto P(-1,4) mediante o vector $\vec{v}$ =(4,-1)?

3. Acha as coordenadas do vector da translación que transforma o triángulo azul no laranxa.

4. O punto B(4,2) é o resultado de trasladar o punto A(-4,6) mediante unha translación de vector $\vec{v}$. Que distancia hai entre A e B?.

5. Que punto resulta ao xirar P(4,1) ao redor da orixe de coordenadas, un ángulo de 90º no sentido contrario ás agullas do reloxo?

6. Cal é o centro da simetría que transforma o punto P(4,-2) no P'(-2,0)?.

7. A figura da esquerda ten centro de simetría, cal é o menor ángulo que ten que xirar para quedar invariante?

8. Cales son as coordenadas do punto simétrico do P(4,-2) na simetría de eixe a bisectriz do primeiro cuadrante?

9. Cantos eixes de simetría ten a figura da esquerda?

10. Ao aplicar ao punto P primeiro unha simetría de eixe e1 e despois unha simetría de eixe e2, resulta o punto P''. Cal é o ángulo do xiro que transforma directamente P en P''?

Solucións dos exercicios para practicar

1. (6,-4), módulo= $\sqrt{52}$ = 7,4

2. A(-2,-4) B(-4,-3) C(-3,-6)

3. $\vec{v}$ =(5,-6)

4. A′(0,1) B′(-2,2) C′(-1,-1)

5. A′(-2,3) B′(-4,4) C′(-1,5)

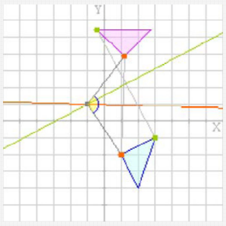
6. Polo T. de Pitágoras o lado do cadrado mide $\sqrt{8}$ =2,82
Vértices: (0,82, 2,82) (-2, 2,82) (-2, 0) (0,82, 0)

7. a) A′(2,-2) B′(4,-1) C′(4,-3) D′(3,-4)
b) A′(-2,2) B′(-4,1) C′(-4,3) D′(-3,4)

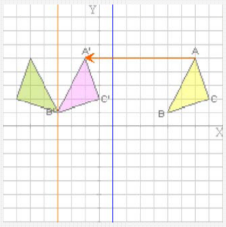
8. A′(-2,2) B′(-1,4) C′(-3,4) D′(-4,3)

9. A′(1,-1) B′(3,0) C′(3,-2) D′(2,-3)

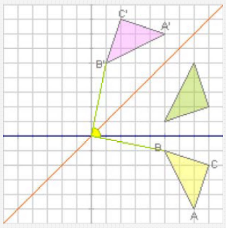
10. Centro (-1,0)



11. A′(-1,5)
B′(-3,1)
C′(0,2)



12. Equivale a un xiro de 90º en sentido positivo.



Solucións AUTOAVALUACIÓN

1. (5,-6)

2. P′(3,3)

3. (2,2)

4. $|\vec{v}|$=10

5. (-1,4)

6. (1,-1)

7. 60º

8. (-2,4)

9. 5

10. 90º

Non esquezas enviar as actividades ao titor ▶