Matemática 4º ESO 04/06/2015

Temas 3 Polinómios e Fracións Alxébricas
4 Ecuacións
5 Inecuacións e Sistemas de Inecuacións

TOTAL	SUMA	EE/EM	NOTA
12			

Nome	Grupo 4º ESO

0. Expresión escrita / expresión matemática / presentación

0.5 / 0.5

1. i. Enunciado do Teorema do Factor.
   ii. Explicar mediante algún exemplo a relación existente entre as raíces dun polinómio e os factores da sua descomposición factorial.

i. O Teorema do Factor afirma que:
Dado un polinómio $p(x)$ e un número real $a \in \mathbb{R}$, a é unha raíz de $p(x)$ $\Leftrightarrow$ $x-a$ é un factor de $p(x)$.
Outra forma de dicer o mesmo é: a división de $p(x)$ entre $x-a$ é exacta $\Leftrightarrow$ $p(a)=0$.

ii. Dado o polinómio $p(x)=x^3-1$, ao dividirmos $p(x)$ entre $x-1$ obtemos resto 0, é dicer, a división é exacta, que equivale a dicer que $x-1$ é un factor de x^3-1. Simultaneamente, 1 é unha raíz do polinómio, ou sexa, $p(1)=0$.

1

2. Factorizar o polinómio $p(x)=3x^6-24x^4+48x^2$ explicando os métodos utilizados.

Extraendo factor común a plicando as identidades notábeis resulta:

$$3x^6-24x^4+48x^2=3x^2\cdot(x^4-8x^2+16)=3x^2\cdot(x^2-4)^2$$

Ademais, utilizando as identidades notábeis temos que:

$$(x^2-4)^2=[(x-2)\cdot(x+2)]^2=(x-2)^2\cdot(x+2)^2$$

Logo finalmente a factorización é: $3x^6-24x^4+48x^2=3x^2\cdot(x^4-8x^2+16)=3x^2\cdot(x-2)^2\cdot(x+2)^2$.

2

3. Reducir a expresión racional $\left(\frac{x+1}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}\right):\left(\frac{1}{x+1}-1\right)$ a unha única fración irreducíbel.

$$\left(\frac{x+1}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}\right):\left(\frac{1}{x+1}-1\right)=\frac{(x+1)^2-1}{x^2-1}:\frac{1-(x+1)}{x+1}=\frac{x^2+2x+1-1}{x^2-1}:\frac{-x}{x+1}=$$

$$=\frac{x^2+2x}{x^2-1}:\frac{-x}{x+1}=-\frac{(x^2+2x)\cdot(x+1)}{(x^2-1)\cdot x}=-\frac{x\cdot(x+2)\cdot(x+1)}{(x+1)\cdot(x-1)\cdot x}=-\frac{x+2}{x-1}$$

2	

4. Resolver a ecuación $5-\sqrt{x+5}=x-2$ e comprobar as solucións.

$$5-\sqrt{x+5}=x-2 \Leftrightarrow 7-x=\sqrt{x+5} \Rightarrow 49-14x+x^2=x+5 \Leftrightarrow x^2-15x+44=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{15\pm\sqrt{15^2-4\cdot 44}}{2}=\frac{15\pm\sqrt{225-176}}{2}=\frac{15\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{15\pm 7}{2}$$

Logo hai duas solucións posíbeis: $x_1=\frac{15+7}{2}=11$ e $x_2=\frac{15-7}{2}=4$

Para $x=11$ temos:

1º membro: $5-\sqrt{11+5}=5-\sqrt{16}=5-4=1$; 2º membro: $11-2=9$

$1\neq 9 \Rightarrow x=11$ debe rexeitar-se.

Para $x=4$ temos:

1º membro: $5-\sqrt{4+5}=5-\sqrt{9}=5-3=2$; 2º membro: $4-2=2$

Admite-se polo tanto a solución $x=4$ e rexeita-se $x=11$.

2	

5. Resolver o sistema $\begin{cases} 5xy=2 \\ 10x-3y=-4 \end{cases}$.

$10x-3y=-4 \Leftrightarrow y=\frac{10x+4}{3}$, e substituíndo na primeira ecuación obtemos:

$$5x\cdot\frac{10x+4}{3}=2 \Leftrightarrow 5x\cdot(10x+4)=6 \Leftrightarrow 50x^2+20x-6=0 \Leftrightarrow 25x^2+10x-3=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-10\pm\sqrt{10^2+4\cdot 25\cdot 3}}{50}=\frac{-10\pm\sqrt{100+300}}{50}=\frac{-10\pm\sqrt{400}}{50}=\frac{-10\pm 20}{50}$$

Logo $x_1=\frac{-10+20}{50}=\frac{10}{50}=\frac{1}{5}$ e $x_2=\frac{-10-20}{50}=-\frac{30}{50}=-\frac{3}{5}$.

Para $x=\frac{1}{5}$ obtemos $y=\frac{10\cdot\frac{1}{5}+4}{3}=\frac{2+4}{3}=2$.

E para $x=-\frac{3}{5}$ obtemos $y=\frac{10\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)+4}{3}=-\frac{2}{3}$.

As duas solucións son $x=\frac{1}{5}$, $y=2$ e $x=-\frac{3}{5}$, $y=-\frac{2}{3}$, que tamén se poden expresar da forma $\left(\frac{1}{5},2\right)$ e $\left(-\frac{3}{5},-\frac{2}{3}\right)$.

2	

6. Resolver analiticamente a inecuación $x^2+16 \geqslant 10x$ expresando a solución en forma de intervalos.

Resolvendo a ecuación de 2º grau resulta: $x^2+16=10x \Leftrightarrow x^2-10x+16=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=\frac{10\pm\sqrt{10^2-4\cdot 16}}{2}=\frac{10\pm\sqrt{100-64}}{2}=\frac{10\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{10\pm 6}{2}$$

Logo a ecuación ten solucións $x_1=\frac{10+6}{2}=8$ e $x_2=\frac{10-6}{2}=2$.

Asi que temos a recta real dividida en trés intervalos, que son $(-\infty, 2)$, $(2, 8)$ e $(8, +\infty)$.

Podemos tomar un elemento de cada un dos intervalos e comprobar se cumpre a inecuación.

Tomando $0 \in (-\infty, 2)$: $0^2+16>10\cdot 0$, logo cumpre-se a desigualdade.

Tomando $3 \in (2, 8)$: $3^2+16<10\cdot 3$, logo non se cumpre a desigualdade.

E tomando $10 \in (8, +\infty)$: $10^2+16>10\cdot 10$, logo volve-se cumprir a desigualdade.

Polo tanto a desigualdade cumpre-se nos intervalos $(-\infty, 2)$ e $(8, +\infty)$, ao que haberá que engadir os próprios valores $x=2$ e $x=8$; polo que finalmente a solución será $(-\infty, 2] \cup [8, +\infty)$.

Outra forma de resolver a inecuación consiste en factorizá-la:

$(x-2)\cdot(x-8) \geqslant 0$; de aqui obtemos dous posíbeis sistemas:

Caso 1: $\begin{cases} x-2>0 \\ x-8>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x>8 \end{cases}$, de onde obtemos $x>8$.

Caso 2: $\begin{cases} x-2<0 \\ x-8<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \\ x<8 \end{cases}$, de onde obtemos $x<2$.

Como a inecuación admite a igualdade, a solución é $(-\infty, 2] \cup [8, +\infty)$.

2		7. Resolver graficamente o sistema de inecuacións lineares $\begin{cases} 2x-y>5 \\ x+3y\leq 6 \end{cases}$.

Representaremos as duas rectas resolvendo y en ambas as ecuacións, antes de obter a tabela de valores: $\begin{cases} 2x-y=5 \\ x+3y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-5 \\ y=\dfrac{6-x}{3} \end{cases}$.

Dando valores na primeira ecuación resulta: $x=0 \Rightarrow y=-5$ e $x=2 \Rightarrow y=-1$, logo $(0,-5)$ e $(2,-1)$ son pontos da primeira das rectas.

Na segunda ecuación: $x=0 \Rightarrow y=2$ e $x=3 \Rightarrow y=1$, logo os pontos $(0,2)$ e $(3,1)$ pertencen á segunda recta.

As tabelas de valores son:

Ecuación $2x-y=5$

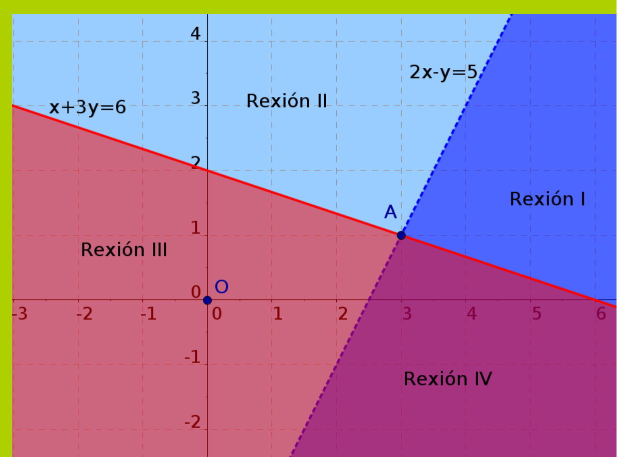
x	y
0	-5
2	-1

Ecuación $x+3y=6$

x	y
0	2
3	1

As rectas cortan-se no ponto $A(3,1)$ que é a solución do sistema $\begin{cases} 2x-y=5 \\ x+3y=6 \end{cases}$.

Volvendo ás inecuacións, o ponto $O(0,0)$ non cumpre a primeira das inecuacións do sistema, mas si cumpre a segunda, polo que a rexión solución será a que contén a este ponto O en relación á segunda recta e contrária e el a respeito da primeira. A solución polo tanto é a rexión IV, incluíndo a fronteira correspondente á segundarecta e excluíndo a fronteira correspondente á primeira recta mais o próprio vértice $A(3,1)$.



Nota: outra forma de determinar a rexión solución consiste en ir comprobando as duas inecuacións para algún ponto de cada unha das catro rexións, até atopar aquela na que se cumpren ambas inecuacións.