MATEMÁTICA 4º ESO 20/11/2014

TEMAS 6 SEMELLANZA
7 TRIGONOMETRIA

TOTAL	SUMA	EE/EM	NOTA
11			

NOME	GRUPO 4º ESO

0. Expresión escrita / expresión matemática / presentación

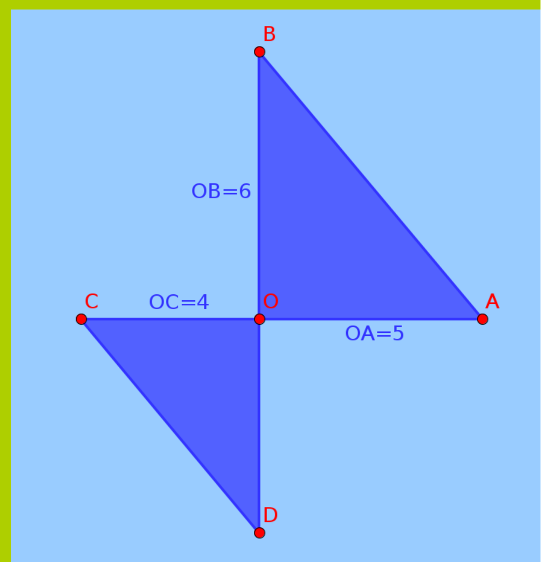
1	

1. Explicar de xeito razoado se os triángulos $\overset{\triangle}{OAB}$ e $\overset{\triangle}{OCD}$ son semellantes e calcular o lado $\overline{OD}$.

Os ángulos $\widehat{AOB}$ e $\widehat{COD}$ son iguais por opostos polo vértice e os $\widehat{OAB}$ e $\widehat{OCD}$ son rectos; polo tanto os triángulos teñen iguais os seus ángulos homólogos asi que son semellantes.

Polo Teorema de Tales, temos que:

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \overline{OD}=\frac{\overline{OB}\cdot\overline{OC}}{\overline{OA}}=\frac{6\cdot 4}{5}=4,8$$



1	

2. Unha vivenda ocupa no plano un rectángulo de $80\ cm$ por $150\ cm$ e na realidade a planta ocupará unha superfície de $270\ m^2$. Calcular a escala do plano e as dimensións reais da planta da vivenda.

A área no plano é $A_1=80\cdot 150=12.000\ cm^2=1,2\ m^2$.

Como a superfície real é de $A_2=270\ m^2$, a razón das áreas é $r^2=\frac{270}{1,2}=2,25 \Rightarrow r=\sqrt{225}=15$.

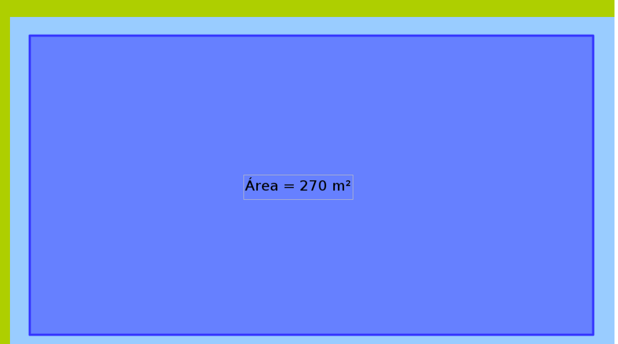
Asi que o plano está feito a escala $1:15$.

Logo:

$80\cdot r=80\cdot 15=1.200\ cm=12\ m$

$150\cdot r=150\cdot 15=2.250\ cm=22,5\ m$

Polo tanto a planta da vivenda terá dimensións $12\ m \times 22,5\ m$.



2	

3. Calcular o raio e o perímetro dun octógono regular sabendo que a sua apotema é $a=9\ cm$.

Notas: [1] Obter as razóns trigonométricas con 4 cifras decimais. [2] Arredondar os cálculos a 2 cifras decimais significativas.]

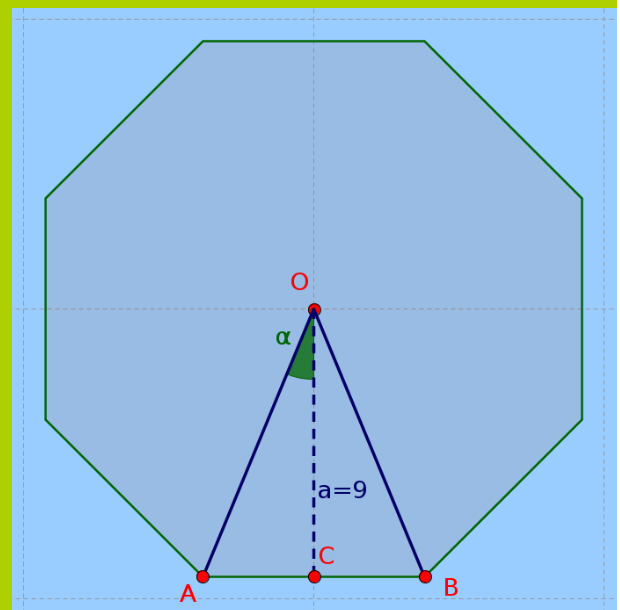
O octógono pode dividir-se en 8 triángulos iguais, polo que a circunferéncia circunscrita fica tamén dividida en 8 sectores de $\frac{360}{8}=45°$ de amplitude cada un. Dividindo cada triángulo pola apotema obtemos dous triángulos rectángulos, onde $a=9 cm$ e $\alpha=22{,}5°$.

No triángulo $\overset{\triangle}{ACO}$ temos que:

$$tg\ 22{,}5°=\frac{\overline{AC}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{AC}}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}=9\cdot tg\ 22{,}5°\approx 9\cdot 0{,}4142\approx 3{,}73\ cm$$

Polo tanto o perímetro será $P=16\cdot 3{,}73\approx 59{,}65\ cm$.



E o raio pode obter-se utillizando o Teorema de Pitágoras:

$$\overline{OA}^2=\overline{OC}^2+\overline{AC}^2=9^2+3{,}73^2\approx 94{,}90 \Leftrightarrow r=\overline{OA}=\sqrt{94{,}90}\approx 9{,}74\ cm$$

1	
0.5	
0.5	

4. i. Explicar brevemente que é un radián e a sua equivaléncia en graus. Apoiar a explicación con un gráfico.
   ii. Calcular a equivaléncia en radiáns do ángulo de 210^o .
   iii. Calcular a equivaléncia en graus do ángulo de $3{,}5\ rad$.

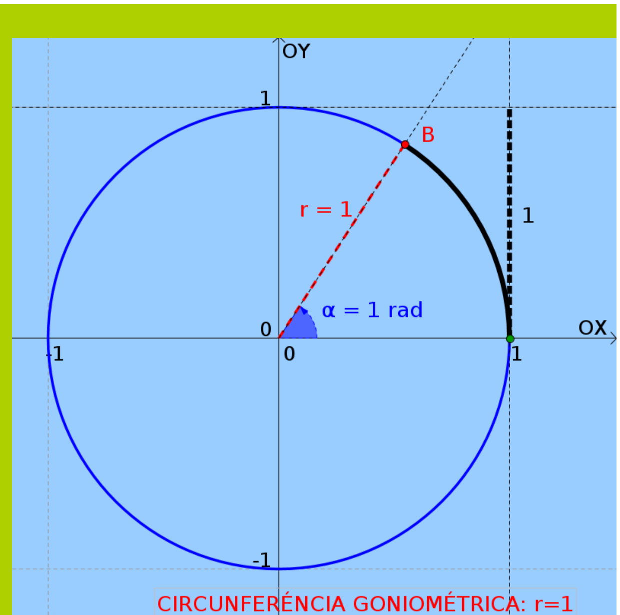
i. Define-se o radián como o ángulo que determina na circunferéncia un arco de igual lonxitude que o raio da própria circunferéncia.

Sabe-se que a circunferéncia mide 360^o e que a sua lonxitude é 2π veces o raio; logo 360^o equivale a $2\pi\ rad$.

ii. Da equivaléncia anterior podemos estabelecer a seguinte proporción:

$$\begin{matrix} 360° & \rightarrow & 2\pi & rad \\ 210° & \rightarrow & x & rad \end{matrix}$$, e polo tanto:

$$x=\frac{2\pi\cdot 210°}{360°}=\frac{420\pi}{360}=\frac{7\pi}{6}\approx 3{,}67\ rad .$$



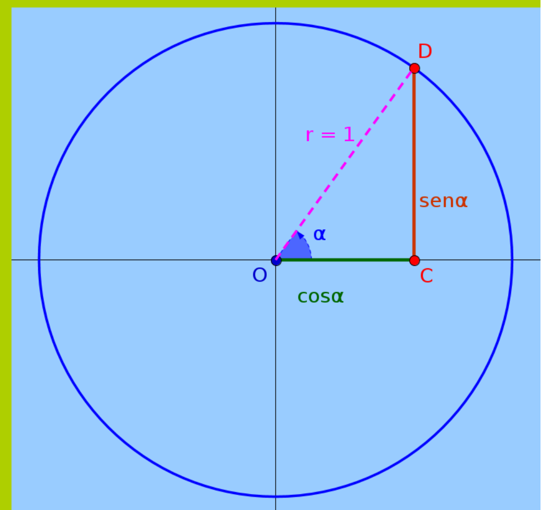
iii. $\begin{matrix} 2\pi & rad & \rightarrow & 360° \\ 3{,}5 & rad & \rightarrow & x \end{matrix}$, logo $x=\frac{3{,}5\cdot 360°}{2\pi}=\frac{1.260°}{2\pi}=\frac{630°}{\pi}\approx 200{,}54°$.

1 — 5. i. Explicar de forma razoada a partir das definicións do seno e do coseno, e utilizando a circunferéncia goniométrica, a identidade $sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$.

1 — ii. Obter de xeito razoado as razóns trigonométricas (seno, coseno e tanxente) do ángulo de $53°$ sabendo que $cos\ 37° = 0{,}8$.

1 — iii. Estudar de xeito razoado a relación entre as razóns trigonométricas (seno e coseno) dos ángulos de $290°$ e de $20°$.

i. Dado un ángulo α e o seu triángulo característico $\overset{\triangle}{OCD}$, definen-se o seno e o coseno do ángulo como os cocientes: $sen\ \alpha := \dfrac{\overline{CD}}{\overline{OD}}$ e $cos\ \alpha := \dfrac{\overline{OC}}{\overline{OD}}$.



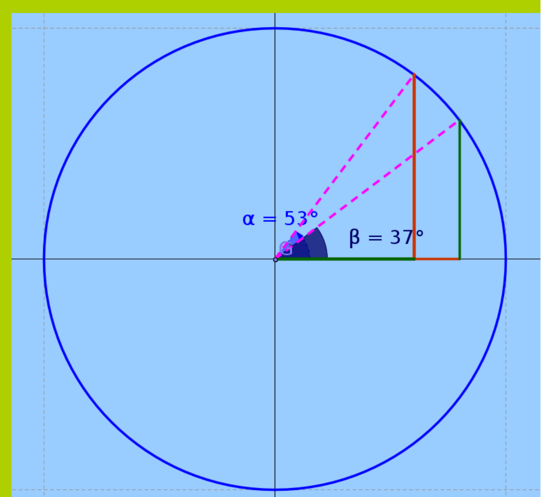
Se traballamos na circunferéncia goniométrica, $\overline{OD} = 1$ e polo tanto neste caso resulta:

$$sen\ \alpha := \frac{\overline{CD}}{1} = \overline{CD} \quad e \quad cos\ \alpha := \frac{\overline{OC}}{1} = \overline{OC}$$

E polo Teorema de Pitágoras temos de xeito imediato que no triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{OCD}$ cumpre-se a relación:

$\overline{OD}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{OC}^2 \iff 1 = sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha$, co que fica probada a identidade.

ii. Os triángulos característicos de ambos ángulos son iguais e polo tanto: $sen\ 53° = cos\ 37° = 0{,}8$



E pola identidade fundamental:

$$cos\ 53° = \sqrt{1 - sen^2\ 53°} = \sqrt{1 - 0{,}8^2} =$$

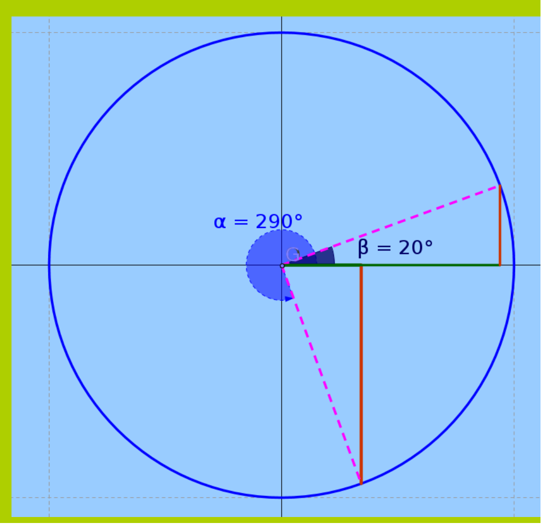
$$= \sqrt{1 - 0{,}64} = \sqrt{0{,}36} = \pm 0{,}6$$

Como o ángulo pertence ao primeiro cuadrante, o coseno é positivo, asi que resulta $cos\ 53° = 0{,}6$.

E finalmente: $tg\ 53° = \dfrac{sen\ 53°}{cos\ 53°} = \dfrac{0{,}8}{0{,}6} = \dfrac{4}{3} = 1{,}\hat{3}$

iii. Os triángulos característicos de ambos ángulos son iguais e polo tanto:

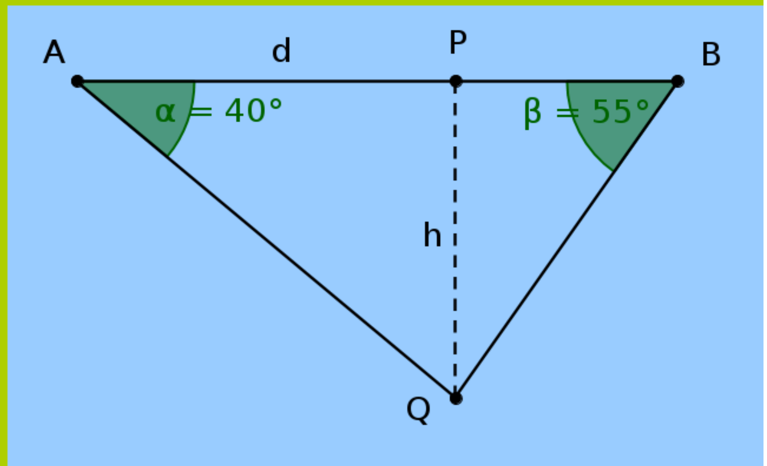
$$cos\ 290° = sen\ 20° \quad e \quad sen\ 290° = -cos\ 20°$$



2	

6. Duas persoas situadas nos extremos dunha ponte sobre o rio observan un bote que pasa por debaixo con ángulos de 40^o e 55^o respectivamente. Calcular a altura da ponte sabendo que a sua lonxitude é de $100\ m$.

Se chamamos A e B ás posicións das duas observadoras, P ao punto da ponte situado sobre o bote e Q á posición do bote, resultan dous triángulos rectángulos $\overset{\triangle}{APQ}$ e $\overset{\triangle}{BPQ}$.



Chamando d á distáncia $\overline{AP}$, resulta que $\overline{AB}=100$ e $\overline{BP}=100-d$.

E chamando h á altura da ponte temos o que segue.

No triángulo $\overset{\triangle}{APQ}$: $tg\ 40^o=\frac{h}{d} \Leftrightarrow h=tg\ 40^o \cdot d$ [1]

E no triángulo $\overset{\triangle}{BPQ}$: $tg\ 55^o=\frac{h}{100-d} \Leftrightarrow h=tg\ 55^o \cdot (100-d)$

Igualando obtemos: $tg\ 40^o \cdot d=tg\ 55^o \cdot (100-d) \Leftrightarrow tg\ 40^o \cdot d=tg\ 55^o \cdot 100-tg\ 55^o \cdot d \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (tg\ 40^o+tg\ 55^o) \cdot d=tg\ 55^o \cdot 100 \Leftrightarrow d=\frac{tg\ 55^o \cdot 100}{tg\ 40^o+tg\ 55^o}$$

Substituíndo na ecuación [1] resulta:

$h=tg\ 40^o \cdot d=\frac{tg\ 40^o \cdot tg\ 55^o \cdot 100}{tg\ 40^o+tg\ 55^o} \approx 52,86\ m$, que é a altura da ponte.