MATEMÁTICA 4º ESO | 03/06/2014

TEMAS 4 ECUACIÓNS E SISTEMAS
5 INECUACIÓNS

TOTAL	SUMA	NOTA
10		

NOME	GRUPO 4º ESO A

3	

1. Resolver as seguintes ecuacións e comprobar as solucións:

i. $3-(2-x)^2=2x\cdot(2-x^3)$ ii. $\frac{x-1}{x+1}=1-\frac{3\cdot(x-2)}{x^2-1}$ iii. $x-\sqrt{x-5}=7$

i. $3-(2-x)^2=2x\cdot(2-x^3) \Leftrightarrow 3-(4-4x+x^2)=4x-2x^4 \Leftrightarrow -1+4x-x^2=4x-2x^4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^4-x^2-1=0$, e identificando $t=x^2$ e $t^2=x^4$ resulta a ecuación $2t^2-t-1=0$.

$$2t^2-t-1=0 \Leftrightarrow t=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 2\cdot(-1)}}{2}\cdot 2=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{4}=\frac{1\pm 3}{4}$$

Logo obtemos $t_1=\frac{1+3}{4}=1$ e $t_2=\frac{1-3}{4}=-\frac{1}{2}$, e polo tanto as solucións son $x=\pm\sqrt{1}=\pm 1$ e $x=\pm\sqrt{-\frac{1}{2}}\notin \mathbb{R}$.

Proba para $x=1$: $3-(2-1)^2=3-1=2$ e $2\cdot 1\cdot(2-1^3)=2\cdot 1=2$

Proba para $x=-1$: $3-(2+1)^2=3-9=-6$ e $2\cdot(-1)\cdot(2-(-1)^3)=-2\cdot 3=-6$

Logo ambas solucións reais son correctas.

ii. Multiplica-se toda e expresión polo mínimo común múltiplo dos denominadores.

$x^2-1=(x+1)\cdot(x-1)$, e polo tanto $mcm(x-1, x^2-1)=(x+1)\cdot(x-1)$; logo:

$$\frac{x-1}{x+1}=1-\frac{3\cdot(x-2)}{x^2-1} \Rightarrow (x-1)^2=x^2-1-3\cdot(x-2) \Leftrightarrow x^2-2x+1=x^2-3x+5 \Leftrightarrow x=4$$

Proba para $x=4$: $\frac{4-1}{4+1}=\frac{3}{5}$ e $1-\frac{3\cdot(4-2)}{4^2-1}=1-\frac{6}{15}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$, logo a solución é admisíbel.

iii. $x-\sqrt{x-5}=7 \Leftrightarrow x-7=\sqrt{x-5} \Rightarrow (x-7)^2=x-5 \Leftrightarrow x^2-14x+49=x-5 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2-15x+54=0 \Leftrightarrow x=\frac{15\pm\sqrt{15^2-4\cdot 54}}{2}=\frac{15\pm\sqrt{225-216}}{2}=\frac{15\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{15\pm 3}{2}$$

Logo hai duas solucións posíbeis: $x_1=\frac{15+3}{2}=9$ e $x_2=\frac{15-3}{2}=6$

Proba para $x=9$: $9-\sqrt{9-5}=9-\sqrt{4}=9-2=7$

Proba para $x=6$: $4-\sqrt{4-5}=4-\sqrt{-1}\notin \mathbb{R}$

Logo admite-se a solución $x=9$ e rexeita-se $x=6$.

1 2. i.Explicar que se entende por sistema non linear. É posíbel que un sistema linear teña exactamente duas solucións? E se o sistema fose non linear? Razoar a resposta e pór algún exemplo.

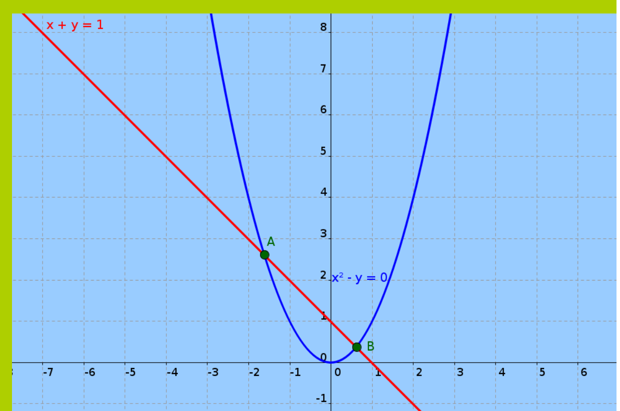
1 ii.Resolver o sistema $\begin{cases} xy=-4 \\ 3x+2y=-5 \end{cases}$.

i.Un sistema non linear é aquel que contén algún monómio ou termo de grau distinto de 0 (termo independente) ou 1 .

Exemplo

Un sistema linear está formado por duas rectas. É imposíbel que teña exactamente duas solucións porque duas rectas que non sexan idénticas nen paralelas cortan-se nun único ponto.

Un sistema non linear pode ter duas solucións; é o caso, por exemplo, dun sistema formado por unha parábola e unha recta: $\begin{cases} x^2-y=0 \\ x+y=1 \end{cases}$.



ii. $3x+2y=-5 \Leftrightarrow y=-\frac{5+3x}{2}$, e substituíndo na primeira ecuación obtemos:

$$x\cdot\left(-\frac{5+3x}{2}\right)=-4 \Leftrightarrow 5x+3x^2=8 \Leftrightarrow 3x^2+5x-8=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 3\cdot(-8)}}{6}=\frac{-5\pm\sqrt{25+96}}{6}=\frac{-5\pm\sqrt{121}}{6}=\frac{-5\pm 11}{6}$$

Logo $x_1=\frac{-5+11}{6}=1$ e $x_2=\frac{-5-11}{6}=-\frac{16}{6}=-\frac{8}{3}$.

Para $x=1$ obtemos $y=-\frac{5+3}{2}=-4$ e para $x=-\frac{8}{3}$ resulta $y=-\frac{5+3\cdot\left(-\frac{8}{3}\right)}{2}=-\frac{5-8}{2}=\frac{3}{2}$.

As duas solucións son $x=1$, $y=-4$ e $x=-\frac{8}{3}$, $y=\frac{3}{2}$, ou tamén $(1,-4)$ e $\left(-\frac{8}{3},\frac{3}{2}\right)$.

3. Calcular as dimensións dun terreo rectangular de área $224\ m^2$ sabendo que a anchura é a cuarta parte da lonxitude.

1	

Se chamamos x á anchura e y á lonxitude, a área é $S=xy$ e ademais $y=4x$; logo temos o sistema non linear:

$$\begin{cases} xy=224 \\ y=4x \end{cases}$$

Substituíndo a expresión de y na primeira ecuación fica $x\cdot(4x)=224$.

$$x\cdot(4x)=224 \Leftrightarrow 4x^2=224 \Leftrightarrow x^2=56 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{56}=\pm2\sqrt{14}$$

Logo hai duas solucións: $x_1=2\sqrt{14}$ e $x_2=-2\sqrt{14}$.

Debemos rexeitar a segunda das solucións por non ter sentido unha lonxitude negativa.

A solución será polo tanto $x=2\sqrt{14}\ m$ e $y=4\cdot2\sqrt{14}=8\sqrt{14}\ m$.

2	

4. Resolver analiticamente as inecuacións expresando a solución en forma de intervalos:

i. $|3+4x| \leqslant 11$ ii. $x^2+5>6x$

i.Elevando ambos membros ao cuadrado obtemos:

$$|3+4x| \leqslant 11 \;\Rightarrow\; (3+4x)^2 \leqslant 121 \;\Leftrightarrow\; 9+24x+16x^2 \leqslant 121 \;\Leftrightarrow\; 16x^2+24x-112 \leqslant 0 \;\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\; 2x^2+3x-14 \leqslant 0$ [1], e resolvendo a ecuación de 2º grau resulta:

$$2x^2+3x-14=0 \;\Leftrightarrow\; x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2+4\cdot 2\cdot 14}}{2\cdot 2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+112}}{4}=\frac{-3\pm\sqrt{121}}{4}=\frac{-3\pm 11}{4}$$

Logo $x_1=\frac{-3+11}{4}=2$ e $x_2=\frac{-3-11}{4}=-\frac{7}{2}$, e asi a inecuación [1] fica factorizada do xeito:

$(x-2)\cdot\left(x+\frac{7}{2}\right) \leqslant 0$; de aqui obtemos dous posíbeis sistemas:

Caso 1: $\begin{cases} x-2>0 \\ x+\frac{7}{2}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x<-\frac{7}{2} \end{cases}$, de onde non obtemos solución.

Caso 2: $\begin{cases} x-2<0 \\ x+\frac{7}{2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \\ x>-\frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow x \in \left(-\frac{7}{2}, 2\right)$

Polo tanto a solución é $\left[-\frac{7}{2}, 2\right]$, debido a que a inecuación admite a igualdade.

ii.Resolvendo a ecuación de 2º grau resulta:

$$x^2+5=6x \;\Leftrightarrow\; x^2-6x+5=0 \;\Leftrightarrow\; x=\frac{6\pm\sqrt{6^2-4\cdot 5}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{36-20}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{6\pm 4}{2}$$

Logo $x_1=\frac{6+4}{2}=5$ e $x_2=\frac{6-4}{2}=1$, e asi a inecuación fica factorizada do xeito:

$(x-5)\cdot(x-1)>0$; de aqui obtemos dous posíbeis sistemas:

Caso 1: $\begin{cases} x-5>0 \\ x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>5 \\ x>1 \end{cases} \Rightarrow x \in (5, +\infty)$

Caso 2: $\begin{cases} x-5<0 \\ x-1<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<5 \\ x<1 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty, 1)$

Logo a solución será a unión de ambos intervalos: $(-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$.

2 5. Resolver graficamente o sistema de inecuacións lineares $\begin{cases} 3x \leqslant 6-y \\ 3x-2y>15 \end{cases}$.

Representaremos as duas rectas resolvendo y en ambas as ecuacións, antes de obter a tabela de valores: $\begin{cases} 3x=6-y \\ 3x-2y=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6-3x \\ y=\dfrac{3x-15}{2} \end{cases}$.

Dando valores na primeira ecuación resulta: $x=0 \Rightarrow y=6$ e $x=1 \Rightarrow y=3$, logo $(0,6)$ e $(1,3)$ son pontos da primeira das rectas.

Na segunda ecuación: $x=1 \Rightarrow y=-6$ e $x=3 \Rightarrow y=-3$, logo os pontos $(1,-6)$ e $(3,-3)$ pertencen á segunda recta.

As tabelas de valores son:

Ecuación $3x=6-y$

x	y
0	6
1	3

Ecuación $3x-2y=15$

x	y
1	-6
3	-3

As rectas cortan-se no ponto $A(3,-3)$ que é a solución do sistema $\begin{cases} 3x=6-y \\ 3x-2y=15 \end{cases}$.

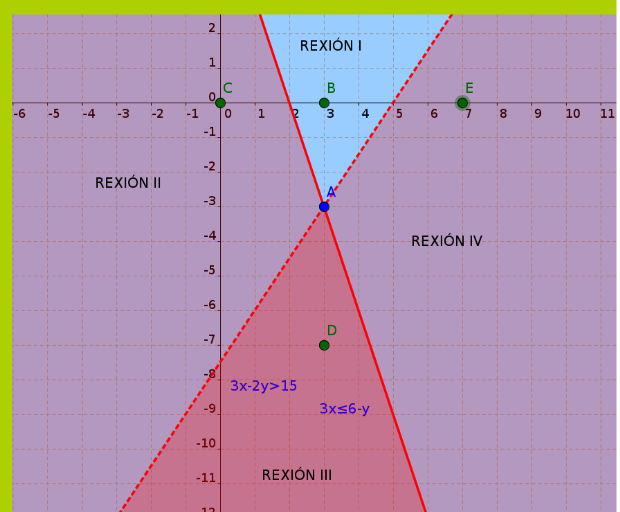
Tomando pontos de cada unha das rexións en que se divide o plano temos:

i. rexión I: ponto $B(3,0)$
$3 \cdot 3 > 6-0$ e $3 \cdot 3 - 2 \cdot 0 = 9 < 15$, logo incumpre ambas as inecuacións;

ii. rexión II: ponto $C(0,0)$
$3 \cdot 0 < 6-0$ e $3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0 < 15$, logo non cumpre a segunda inecuación;

iii. rexión III: ponto $D(3,-7)$
$3 \cdot 3 < 6-(-7)$ e $3 \cdot 3 - 2 \cdot (-7) = 23 > 15$, logo cumpre as duas inecuacións;

iv. rexión IV: ponto $E(7,0)$
$3 \cdot 7 > 6-7$ e $3 \cdot 7 - 2 \cdot 0 = 21 > 15$, logo incumpre a primeira inecuación.



Asi que a solución é a terceira rexión, na que debemos incluir a fronteira correspondente á inecuación $3x \leqslant 6-y$ e excluir a correspondente a $3x-2y>15$, asi como o vértice $A(3,-3)$.

Nota: ao ser a terceira rexión a solución, non temos por que seguir estudando as demais.