MATEMÁTICA 4º ESO — 02/06/2014

TEMAS 4 ECUACIÓNS E SISTEMAS
5 INECUACIÓNS

TOTAL	SUMA	NOTA
10		

NOME	GRUPO B

3	

1. Resolver as seguintes ecuacións e comprobar as solucións:

i. $(x-1)^2+x^4=5-2x\cdot(x+1)$ ii. $\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{3\cdot(x-2)}{x^2-1}=\dfrac{x+2}{2}$ iii. $7-\sqrt{x+5}=x$

i. $(x-1)^2+x^4=5-2x\cdot(x+1) \Leftrightarrow x^2-2x+1+x^4=5-2x^2-2x \Leftrightarrow x^4+3x^2-4=0$

Identificando $t=x^2$ e $t^2=x^4$ resulta a ecuación $t^2+3t-4=0$.

$$t^2+3t-4=0 \Leftrightarrow t=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot(-4)}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{-3\pm 5}{2}$$

Logo obtemos $t_1=\dfrac{-3+5}{2}=1$ e $t_2=\dfrac{-3-5}{2}=-4$, e polo tanto as solucións son $x=\pm\sqrt{1}=\pm 1$ e $x=\pm\sqrt{-4}\notin\mathbb{R}$.

Proba para $x=1$: $(1-1)^2+1^4=1$ e $5-2\cdot 1\cdot(1+1)=5-4=1$

Proba para $x=-1$: $(-1-1)^2+(-1)^4=(-2)^2+1=4+1=5$ e $5-2\cdot(-1)\cdot(-1+1)=5$

Logo ambas solucións reais son correctas.

ii. Multiplica-se toda e expresión polo mínimo común múltiplo dos denominadores.

$x^2-1=(x+1)\cdot(x-1)$, e polo tanto $mcm(x-1, x^2-1, 2)=2\cdot(x+1)\cdot(x-1)$; logo:

$$\frac{x+1}{x-1}-\frac{3\cdot(x-2)}{x^2-1}=\frac{x+2}{2} \Rightarrow 2\cdot(x+1)^2-3\cdot(x-2)=(x+2)\cdot(x+1)\cdot(x-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+4x+2-3x+6=(x+2)\cdot(x^2-1) \Leftrightarrow 2x^2+x+8=x^3+2x^2-x-2 \Leftrightarrow x^3-2x-10=0$$

Esta ecuación non ten raíces inteiras, polo que non se pode proseguir a resolución por nengún dos métodos coñecidos.

iii. $7-\sqrt{x+5}=x \Leftrightarrow 7-x=\sqrt{x+5} \Rightarrow 49-14x+x^2=x+5 \Leftrightarrow x^2-15x+44=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=\frac{15\pm\sqrt{15^2-4\cdot 44}}{2}=\frac{15\pm\sqrt{225-176}}{2}=\frac{15\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{15\pm 7}{2}$$

Logo hai duas solucións posíbeis: $x_1=\frac{15+7}{2}=11$ e $x_2=\frac{15-7}{2}=4$

Proba para $x=11$: $7-\sqrt{11+5}=7-\sqrt{16}=7-4=3\neq 11$

Proba para $x=4$: $7-\sqrt{4+5}=7-\sqrt{9}=7-3=4$

Logo admite-se a solución $x=4$ e rexeita-se $x=11$.

1 2. i.Explicar que se entende por sistema non linear e pór algún exemplo. Indicar que diferenzas existen entre un sistema linear e outro non linear á hora da sua representación gráfica.

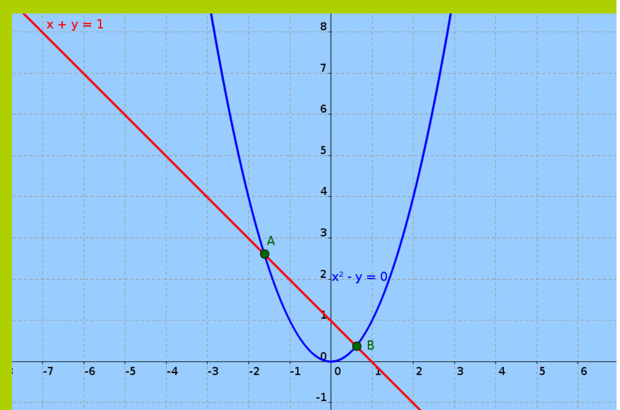
1 ii.Resolver o sistema $\begin{cases} 2x=3-y \\ x^2-3y^2=1 \end{cases}$.

i.Un sistema non linear é aquel que contén algún monómio ou termo de grau distinto de 0 (termo independente) ou 1 .

Exemplo

O sistema $\begin{cases} x^2-y=0 \\ x+y=1 \end{cases}$ é non linear, xá que contén o monómio x^2 , que é de grau 2 .

A principal diferenza cos sistemas lineares é que a representación gráfica dun sistema linear consiste en duas rectas, mentres que nun sistema non linear polo menos unha das gráficas non é unha recta.



ii. $2x=3-y \Leftrightarrow y=3-2x$, e substituíndo na segunda ecuación obtemos:

$$x^2-3\cdot(3-2x)^2=1 \Leftrightarrow x^2-3\cdot(9-12x+4x^2)=1 \Leftrightarrow x^2-27+36x-12x^2=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -11x^2+36x-28=0 \Leftrightarrow 11x^2-36x+28=0 \Leftrightarrow x=\frac{36\pm\sqrt{36^2-4\cdot 11\cdot 28}}{22}=$$

$$=\frac{36\pm\sqrt{1.296-1.232}}{22}=\frac{36\pm\sqrt{64}}{22}=\frac{36\pm 8}{22}$$; logo $x_1=\frac{36+8}{22}=\frac{44}{22}=2$ e $x_2=\frac{36-8}{22}=\frac{28}{22}=\frac{14}{11}$.

Para $x=2$ obtemos $y=3-2\cdot 2=-1$ e para $x=\frac{14}{11}$ resulta $y=3-2\cdot\frac{14}{11}=3-\frac{28}{11}=\frac{5}{11}$.

As duas solucións son $x=2$, $y=-1$ e $x=\frac{14}{11}$, $y=\frac{5}{11}$, ou tamén $(2,-1)$ e $\left(\frac{14}{11},\frac{5}{11}\right)$.

1	

3. Calcular as dimensións dun terreo rectangular de área $224\ m^2$ e perímetro $60\ m$.

Se chamamos x e y a cada unha das duas dimensións do rectángulo, a área é $S=xy$ e o perímetro é $P=2x+2y$; logo temos o sistema non linear:

$\begin{cases} xy=224 \\ 2x+2y=60 \end{cases}$, equivalente a $\begin{cases} xy=224 \\ x+y=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=224 \\ y=30-x \end{cases}$.

Substituíndo a expresión de y na primeira ecuación fica $x\cdot(30-x)=224$.

$$x\cdot(30-x)=224 \Leftrightarrow 30x-x^2=224 \Leftrightarrow -x^2+30x-224=0 \Leftrightarrow x^2-30x+224=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{30\pm\sqrt{30^2-4\cdot224}}{2}=\frac{30\pm\sqrt{900-896}}{2}=\frac{30\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{30\pm2}{2}$$

Logo hai duas solucións: $x_1=\frac{30+2}{2}=16$ e $x_2=\frac{30-2}{2}=14$.

No primeiro caso $y=30-16=14$ e no segundo caso $y=30-14=16$; logo as dimensións do terreo son $16\ m$ e $14\ m$.

Nota: debe-se considerar que as duas solucións $x=16$, $y=14$ e $x=14$, $y=16$ son en realidade a mesma figura desde o ponto de vista xeométrico.

2	

4. Resolver analiticamente as inecuacións expresando a solución en forma de intervalos:

i. $|2x-5|>13$ ii. $x^2-5x+4\leqslant 0$

i. Elevando ambos membros ao cuadrado obtemos:

$$|2x-5|>13 \Rightarrow (2x-5)^2>169 \Leftrightarrow 4x^2-20x+25>169 \Leftrightarrow 4x^2-20x-144>0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x^2-5x-36>0$ [1], e resolvendo a ecuación de 2º grau resulta:

$$x^2-5x-36=0 \Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{5^2+4\cdot 36}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{25+144}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{169}}{2}=\frac{5\pm 13}{2}$$

Logo $x_1=\frac{5+13}{2}=9$ e $x_2=\frac{5-13}{2}=-4$, e asi a inecuación [1] fica factorizada do xeito:

$(x-9)\cdot(x+4)>0$; de aqui obtemos dous posíbeis sistemas:

Caso 1: $\begin{cases} x-9>0 \\ x+4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>9 \\ x>-4 \end{cases} \Rightarrow x\in(9,+\infty)$

Caso 2: $\begin{cases} x-9<0 \\ x+4<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<9 \\ x<-4 \end{cases} \Rightarrow x\in(-\infty,-4)$

Polo tanto a solución é $(-\infty,-4)\cup(9,+\infty)$

ii. Resolvendo a ecuación de 2º grau resulta:

$$x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 4}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{5\pm 3}{2}$$

Logo $x_1=\frac{5+3}{2}=4$ e $x_2=\frac{5-3}{2}=1$, e asi a inecuación fica factorizada do xeito:

$(x-4)\cdot(x-1)\leqslant 0$; de aqui obtemos dous posíbeis sistemas:

Caso 1: $\begin{cases} x-4>0 \\ x-1<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>4 \\ x<1 \end{cases}$, de onde non obtemos solución algunha.

Caso 2: $\begin{cases} x-4<0 \\ x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<4 \\ x>1 \end{cases} \Rightarrow x\in(1,4)$

Como a inecuación admite a igualdade, a solución é $[1,4]$

2	

5. Resolver graficamente o sistema de inecuacións lineares $\begin{cases} 3x+y<6 \\ 3x+4y\geqslant -3 \end{cases}$.

Representaremos as duas rectas resolvendo y en ambas as ecuacións, antes de obter a tabela de valores: $\begin{cases} 3x+y=6 \\ 3x+4y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6-3x \\ y=\dfrac{-3-3x}{4} \end{cases}$.

Dando valores na primeira ecuación resulta: $x=0 \Rightarrow y=6$ e $x=1 \Rightarrow y=3$, logo $(0,6)$ e $(1,3)$ son pontos da primeira das rectas.

Na segunda ecuación: $x=-1 \Rightarrow y=0$ e $x=3 \Rightarrow y=-3$, logo os pontos $(-1,0)$ e $(3,-3)$ pertencen á segunda recta.

As tabelas de valores son:

Ecuación $3x+y=6$

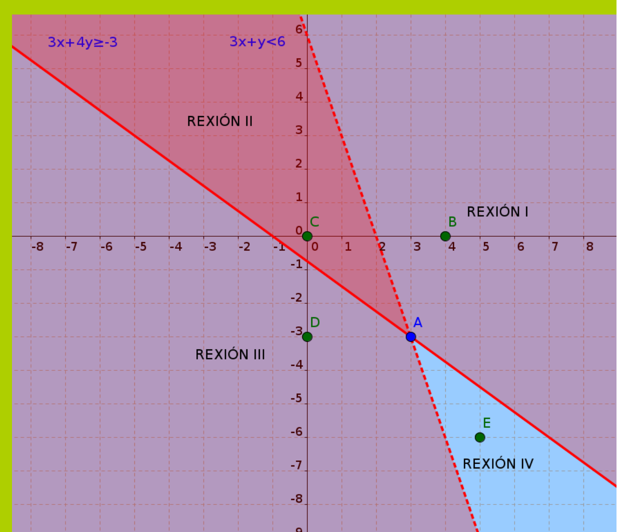
x	y
0	6
1	3

Ecuación $3x+4y=-3$

x	y
-1	0
3	-3

As rectas cortan-se no ponto $A(3,-3)$ que é a solución do sistema $\begin{cases} 3x+y=6 \\ 3x+4y=-3 \end{cases}$.

Tomando pontos de cada unha das rexións en que se divide o plano temos:



i. rexión I: ponto $B(4,0)$
$3\cdot4+0=12>6$ e $3\cdot4+4\cdot0=12\geqslant-3$, logo non cumpre a primeira inecuación;

ii. rexión II: ponto $C(0,0)$
$3\cdot0+0=0<6$ e $3\cdot0+4\cdot0=0\geqslant-3$, logo cumpre ambas as inecuacións;

iii. rexión III: ponto $D(0,-3)$
$3\cdot0-3=-3<6$ e $3\cdot0+4\cdot(-3)=-12<-3$, logo non cumpre a segunda inecuación;

iv. rexión IV: ponto $E(5,-6)$
$3\cdot5-6=9>6$ e $3\cdot5+4\cdot(-6)=-9<-3$, logo incumpre ambas as inecuacións.

Asi que a solución é a segunda das rexións, na que debemos incluir a fronteira correspondente á inecuación $3x+4y\geqslant-3$ e excluir a correspondente a $3x+y<6$, asi como o vértice $A(3,-3)$.

Nota: ao ser a rexión segunda a solución, non temos por que seguir estudando as demais.