MATEMÁTICA 4º ESO 14/05/2014

REC 1º & 2º TRIMESTRES

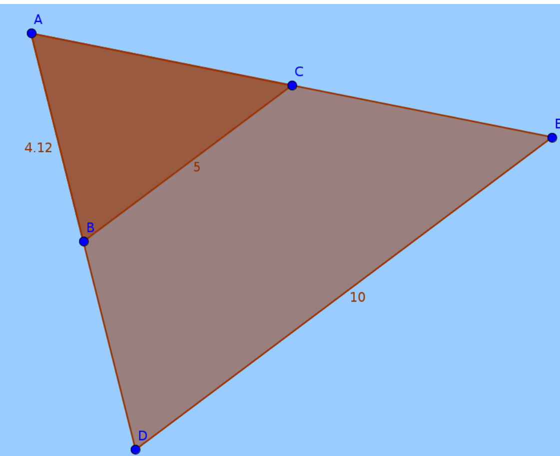
TOTAL	SUMA	NOTA

NOME	GRUPO

REC
- □ TODO ....EXS 2, 5, 6, 7, 9, 10, 11i, 13, 14ii .... TOTAL 12 PTOS.
- □ 1º TRIMESTRE ....EXS 1-6 .... TOTAL 9 PTOS.
- □ 2º TRIMESTRE....................................EXS 7-14 .... TOTAL 11 PTOS.
- □ SÓ TEMA 3 ....EXS 10-14 .... TOTAL 8 PTOS.
- □ 1º TRIMESTRE & TEMA 3 ....EXS 2, 5, 6, 10, 11i, 12, 13, 14ii .... TOTAL 11 PTOS.

| 1 | |

1. Na figura adxunta, indicar de xeito razoado por que os dous triángulos ABC e ADE son semellantes e calcular o lado $\overline{AD}$.

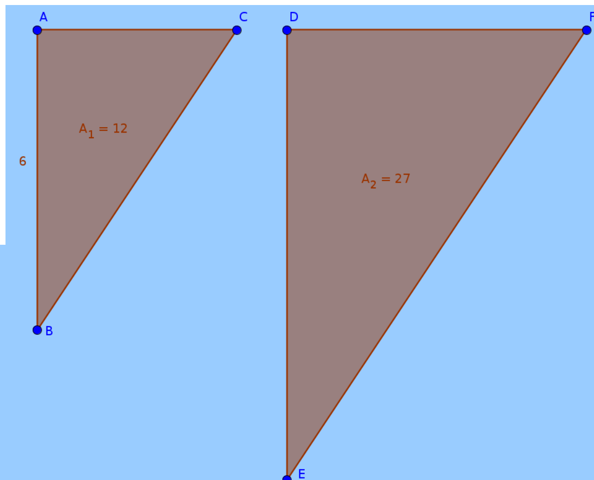


Os triángulos ABC e ADE son semellantes porque comparten o ángulo $\hat{A}$ e os seus lados opostos $\overline{BC}$ e $\overline{DE}$ son paralelos.

Logo por semellanza $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$, asi que $\frac{\overline{AD}}{4,12}=\frac{10}{5} \Leftrightarrow \overline{AB}=\frac{4,12\cdot 10}{5}=8,24$.

| 1 | |

2. Dous terreos teñen forma de triángulo rectángulo e son semellantes; e as suas áreas son $A_1=12\ hm^2$ e $A_2=27\ hm^2$ respectivamente. Calcular a anchura do segundo sabendo que a lonxitude do primeiro é de $6\ hm$.



Se chamamos r á razón de semellanza, a razón das áreas é r^2, logo $r^2=\frac{A_2}{A_1}=\frac{27}{12}=\frac{9}{4} \Rightarrow r=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$.

Polo tanto, se chamamos a_1 e a_2 ás anchuras e l_1 e l_2 ás lonxitudes, pola semellanza resulta que $\frac{a_2}{a_1}=\frac{l_2}{l_1}=\frac{3}{2}$.

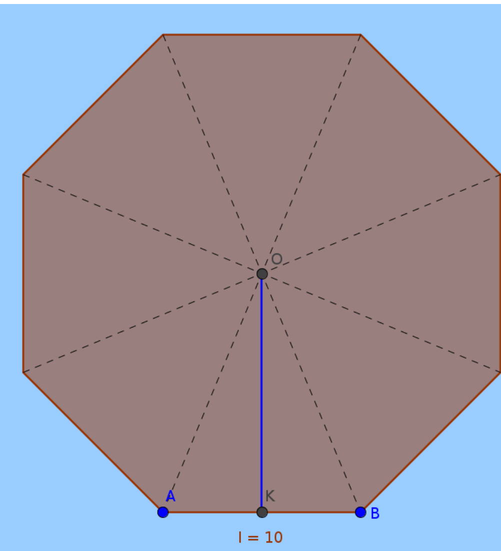
De aquí obtemos que $l_2=\frac{l_1\cdot 3}{2}=\frac{6\cdot 3}{2}=9\ hm$.

Como a área do segundo triángulo é $A_2=27$, temos:

$$A_2=\frac{a_2\cdot l_2}{2}=27 \Leftrightarrow a_2=\frac{27\cdot 2}{9}=\frac{54}{9}=6\ hm$$

1	

3. Calcular a apotema dun octógono regular de lado $l = 10\,cm$.



O octógono pode dividir-se en 8 triángulos. Logo no triángulo OAK o ángulo que se forma en O é $\alpha = 22{,}5°$, e o ángulo que se forma en A é $90° - 22{,}5 = 67{,}5°$.

Como $\overline{AK} = \dfrac{\overline{AB}}{2} = 5$, temos:

$$tg\ 67{,}5° = \frac{\overline{OK}}{\overline{AK}} \Leftrightarrow \overline{OK} = \overline{AK} \cdot tg\ 67{,}5° \approx 5 \cdot 2{,}41 = 12{,}05\ cm$$

1	

4. i. Explicar brevemente que é un radián e a sua equivaléncia en graus. Apoiar a explicación con un gráfico.

0.5	

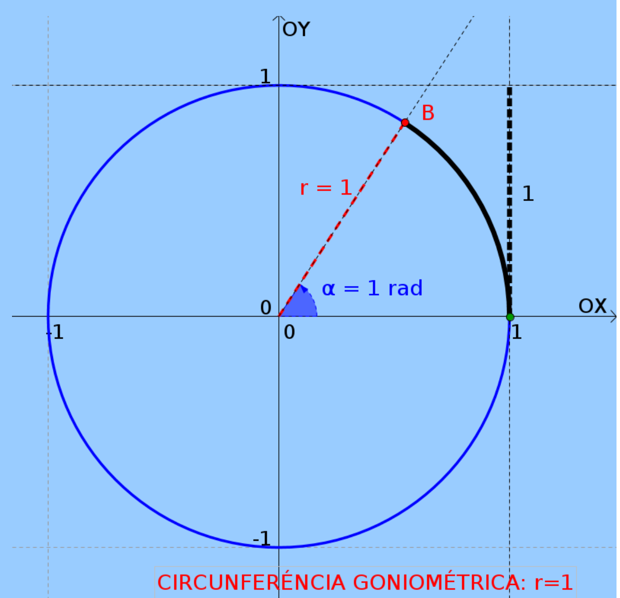
ii. Dos ángulos de 150º, 45º e 75º, expresados en graus, indicar de xeito razoado cal é o que equivale ao ángulo: $\dfrac{5\pi}{12}\ rad$.

0.5	

iii. Calcular de xeito razoado a equivaléncia en radiáns do ángulo de $50°$.

i. Define-se o radián como o ángulo que determina na circunferéncia un arco de igual lonxitude que o raio da própria circunferéncia.

Sabe-se que a circunferéncia mide $360º$ e que a sua lonxitude é 2π veces o raio; logo $360º$ equivale a $2\pi\ rad$.



ii. Da equivaléncia anterior podemos estabelecer a seguinte proporción:

$$\begin{array}{lll} 2\pi & \rightarrow & 360° \\ \dfrac{5\pi}{12} & \rightarrow & x \end{array}$$, e polo tanto

$$x = \frac{\dfrac{5\pi}{12} \cdot 360}{2\pi} = \frac{1.800\pi}{24\pi} = 75°$$

Logo corresponde-se co último dos trés ángulos.

iii. $\begin{array}{lll} 360° & \rightarrow & 2\pi \\ 50° & \rightarrow & x \end{array}$, logo $x = \dfrac{2\pi \cdot 50}{360} = \dfrac{100\pi}{360} = \dfrac{5\pi}{18}\ rad$.

1 5. i. Explicar brevemente que se entende por redución dun ángulo ao primeiro cuadrante e pór algún exemplo.

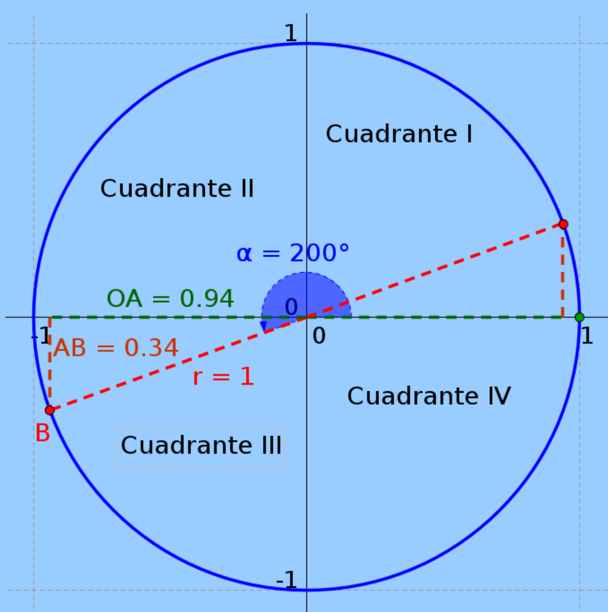
1 ii. Explicar de xeito razoado a que ángulos do primeiro cuadrante poden reducir-se os ángulos de $220°$ e $310°$.

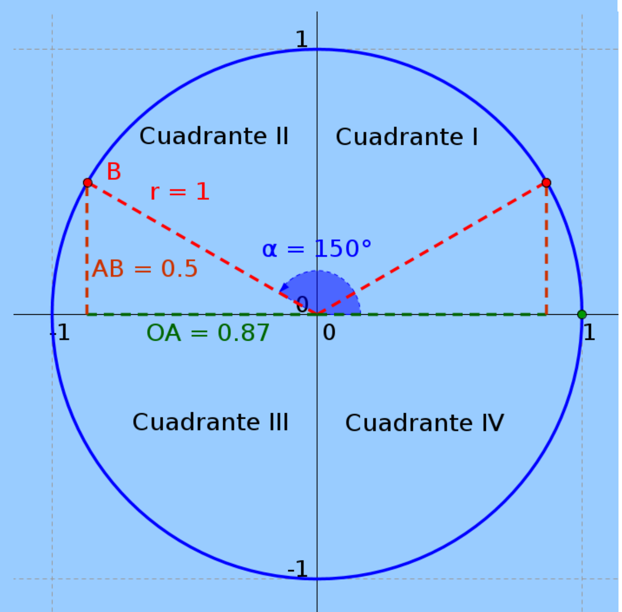
1 iii. Calcular as razóns trigonométricas (seno, coseno e tanxente) do ángulo de 53^o sabendo que $sen\ 37°=0,6$.

i. Oeducir un ángulo ao primeiro cuadrante significa procurar un ángulo do primeiro cuadrante tal que as suas razóns trigonométricas permitan obter as razóns trigonométricas do ángulo orixinal.

Representando na circunferéncia goniométrica ángulos dos cuadrantes II, III e IV e os seus triángulos característicos, é imediato que se poden atopar ángulos do primeiro cuadrante con igual triángulo característico, que permiten obter as razóns trigonométricas dos ángulos a estudar.

Asi é posíbel coñecer as razóns trigonométricas de calquer ángulo a partir simplesmente das razóns trigonométricas dos ángulos do cuadrante I.





Asi, por exemplo, o ángulo de 150^o pode-se reducir ao de 30^o , de maneira que os senos son iguais e os seus cosenos son opostos: $sen\ 150^o=sen\ 30^o$, $cos\ 150^o=-cos\ 30^o$.

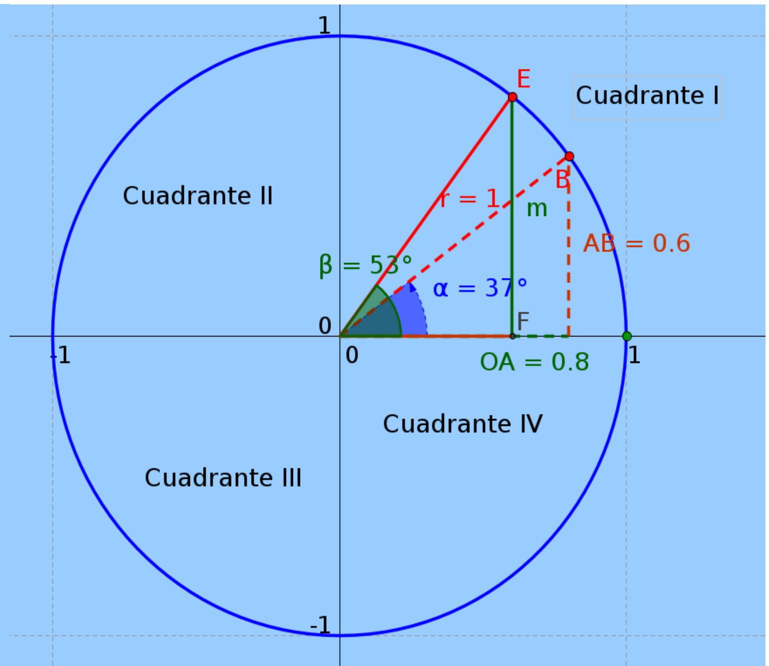
O ángulo de 200^o pode-se reducir ao de 20^o , de xeito que os seus senos e os seus cosenos son opostos: $sen\ 200^o=-sen\ 20^o$, $cos\ 200^o=-cos\ 20^o$.

ii. O ángulo de $220°$ pertence ao terceiro cuadrante e excede $40°$ do ángulo de $180°$; logo pode ser reducido ao de $40°$, de xeito que tanto os seus senos como os seus cosenos son opostos, e as tanxentes son iguais: $sen\ 220°=-sen\ 40°$, $cos\ 220°=-cos\ 40°$ e $tg\ 220°=tg\ 40°$.

O ángulo de $310°$ está no cuarto cuadrante e faltan-lle $50°$ para completar os $360°$; logo pode ser reducido ao de $50°$, de xeito que os seus senos son opostos, os cosenos iguais e as tanxentes tamén opostas: $sen\ 310°=-sen\ 50°$, $cos\ 310°=-cos\ 50°$ e $tg\ 310°=-tg\ 50°$.

iii. Os ángulos de 53^o e 37^o pertencen ao primeiro cuadrante e son complementares, logo os seus triángulos característicos son iguais.

Por este motivo temos que $cos\ 53^o = sen\ 37^o = 0,6$.



Utilizando a identidade pitagórica resulta ademais que:

$$sen^2\ 53^o + cos^2\ 53^o = 1 \Leftrightarrow sen^2\ 53^o = 1 - cos^2\ 53^o = 1 - 0,6^2 = 1 - 0,36 = 0,64 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow sen\ 53^o = \pm\sqrt{0,64} = \pm 0,8$$

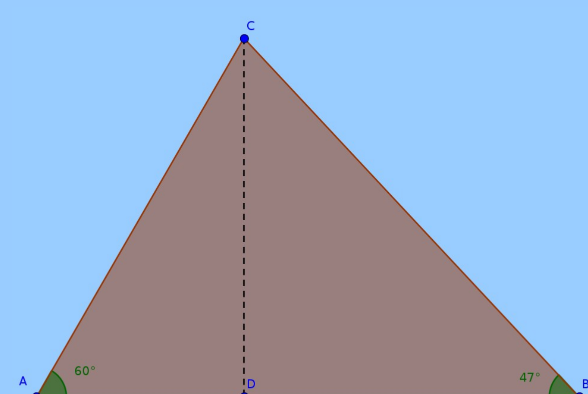
Dos dous valores escollemos o positivo por ser 53^o un ángulo do primeiro cuadrante e ter polo tanto as suas razóns trigonométricas positivas.

Finalmente, $tg\ 53^o = \dfrac{sen\ 53^o}{cos\ 53^o} = \dfrac{0,8}{0,6} = \dfrac{4}{3} \approx 1,33$.

1	

6. Duas persoas observan simultaneamente un miñato que voa a unha altura de $500\ m$ con ángulos de elevación respectivos de 60^o e 47^o . Calcular a distáncia entre ambas observadoras?

Se chamamos A e B ás posicións das duas observadoras, D ao ponto situado na vertical do miñato e C á sua posición, resultan dous triángulos rectángulos ACD e BCD .



No triángulo ACD temos:

$$tg\ 60^o = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{\overline{CD}}{tg\ 60^o} = \frac{500}{tg\ 60^o}$$

E no triángulo BCD temos:

$$tg\ 47^o = \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \overline{BD} = \frac{\overline{CD}}{tg\ 47^o} = \frac{500}{tg\ 47^o}$$

Logo a distáncia entre as duas observadoras será:

$$d = \overline{AD} + \overline{BD} = \frac{500}{tg\ 60^o} + \frac{500}{tg\ 47^o} \approx 288,68 + 466,26 = 754,94\ m$$

1 7. A distáncia do triplo dun número t ao número 50 é menor ou igual que $12,5$ unidades; obter o intervalo no que debe estar localizado t e representá-lo na recta real.

Dado o número t, o seu triplo é $3t$ e a distáncia a 50 obtén-se restando ambos. Logo a condición é: $|3t-50|\leqslant 12,5$.

Resolvendo a ecuación $|3t-50|=12,5$ resulta $|3t-50|=12,5 \;\Leftrightarrow\; 3t=50\pm 12,5$.

No primeiro caso: $3t=50+12,5=62,5 \;\Leftrightarrow\; t=\dfrac{62,5}{3}=\dfrac{125}{6}\approx 20,83$.

No segundo caso: $3t=50-12,5=37,5 \;\Leftrightarrow\; t=\dfrac{37,5}{3}=12,5$.

Logo t debe estar comprendido entre os valores $12,5$ e $20,83$: $t\in[12,5\;,\;20,83]$.

1 8. Transformar nun radical irreducíbel a expresión radical $\dfrac{3}{2}\cdot\sqrt{128}-\dfrac{2}{3}\sqrt{72}+\sqrt{8}$.

$$\frac{3}{2}\cdot\sqrt{128}-\frac{2}{3}\sqrt{72}+\sqrt{8}=\frac{3}{2}\cdot\sqrt{2^7}-\frac{2}{3}\sqrt{2^3\cdot 3^2}+\sqrt{2^3}=\frac{3}{2}\cdot 2^3\cdot\sqrt{2}-\frac{2}{3}\cdot 2\cdot 3\cdot\sqrt{2}+2\sqrt{2}=$$

$$=12\sqrt{2}-4\sqrt{2}+2\sqrt{2}=10\sqrt{2}$$

1 9. Racionalizar e simplificar a expresión $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{8}}$.

$$\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{8}}=\frac{(2+\sqrt{2})\cdot(2+\sqrt{8})}{(2-\sqrt{8})\cdot(2+\sqrt{8})}=\frac{4+2\sqrt{8}+2\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{8}}{4-8}=\frac{4+2\sqrt{2^3}+2\sqrt{2}+\sqrt{16}}{-4}=$$

$$=-\frac{4+4\sqrt{2}+2\sqrt{2}+4}{4}=-\frac{8+6\sqrt{2}}{4}=-2-\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

1	

10. i. Enunciar o Teorema do Factor e explicar mediante algún exemplo a relación existente entre factores e raíces dun polinómio.

1	

ii. Calcular o valor de k para que $x+5$ sexa un factor da descomposición do polinómio $q(x)=kx^3-2x^2+10$.

i. *Enunciado*

O Teorema do Factor di que dado un polinómio $p(x)$ e dado un número real $a \in \mathbb{R}$, $p(a)=0 \Leftrightarrow x-a$ é un factor do polinómio $p(x)$. De outro xeito: a é unha raíz de $p(x)$ se e só se $x-a$ divide a $p(x)$.

Exemplo

Dado o polinómio $p(x)=x^3-1$, é evidente que 1 é unha raíz de $p(x)$, xá que $p(1)=1^3-1=0$. Isto equivale a afirmar que a división de $p(x)=x^3-1$ entre $x-1$ é exacta, e polo tanto na descomposición factorial de $p(x)$ aparece $x-1$ como un dos seus factores. Efectivamente, ao factorizar $p(x)=x^3-1$ obtén-se $x^3-1=(x-1)\cdot(x^2+x+1)$.

ii. Polo Teorema do Factor, que $x+5$ sexa un factor da descomposición do polinómio $q(x)=kx^3-2x^2+10$ equivale a que -5 sexa unha raíz, polo tanto:

$$q(-5)=0 \Leftrightarrow k\cdot(-5)^3-2(-5)^2+10=0 \Leftrightarrow -125k-50+10=0 \Leftrightarrow -125k-40=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k=-\frac{40}{125}=-\frac{8}{25}$$

Logo o polinómio será $q(x)=-\dfrac{8}{125}x^3-2x^2+10$.

2	

11. Expresar en forma factorizada e explicando os métodos utilizados os polinómios:

i. $p(x)=2x^5-162x$ ii. $q(x)=2x^3-14x-12$

i. Extraendo factor común resulta $2x^5-162x=2x\cdot(x^4-81)$.

Ademais, utilizando as identidades notábeis temos que $x^4-81=(x^2-9)\cdot(x^2+9)=(x-3)\cdot(x+3)\cdot(x^2+9)$.

Resolvendo $x^2+9=0$ obtemos: $x^2+9=0 \Leftrightarrow x^2=-9 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{-9}\notin\mathbb{R}$; logo este último polinómio é irreducíbel.

Finalmente a factorización é: $2x^5-162x=2x\cdot(x-3)\cdot(x+3)\cdot(x^2+9)$.

ii. Extraendo factor común resulta $2x^3-14x-12=2\cdot(x^3-7x-6)$.

E aplicando a Regra de Ruffini obtén-se $x^3-7x-6=(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)$, e polo tanto a factorización final e:

$$2x^3-14x-12=2\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)$$.

1	

12. Desenvolver a poténcia cuarta do binómio $3-2x$.

$$(3-2x)^4=3^4-4\cdot 3^3\cdot 2x+6\cdot 3^2\cdot(2x)^2-4\cdot 3\cdot(2x)^3+(2x)^4=81-216x+216x^2-96x^3+16x^4$$

1	

13. Procurar un polinómio que teña raíces $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ e 0, e coeficiente principal -2.

Polo Teorema do Factor, o polinómio $\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot x$ ten raíces $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ e 0.

Multiplicando os factores obtemos: $\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot x=\left(x^2-\frac{1}{4}\right)\cdot x=x^3-\frac{1}{4}\cdot x$.

Para que o coeficiente principal sexa -2 debemos multiplicar o polinómio por -2, de xeito que o polinómio finalmente será:

$$p(x)=-2\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot x=-2\cdot(x^3-\frac{1}{4}\cdot x)=-2x^3+\frac{1}{2}\cdot x$$

2	

14. Obter o resultado das seguintes operacións racionais, reducindo ao máximo a fracción resultante, se é o caso.

i. $\frac{x^2-4x}{x^2-9}:\frac{x^2+x}{2x^2+6x}$

ii. $\left(1-\frac{2}{x-1}\right):\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}\right)$

i. $$\frac{x^2-4x}{x^2-9}:\frac{x^2+x}{2x^2+6x}=\frac{(x^2-4x)\cdot(2x^2+6x)}{(x^2-9)\cdot(x^2+x)}=\frac{x\cdot(x-4)\cdot 2x\cdot(x+3)}{(x+3)\cdot(x-3)\cdot x\cdot(x+1)}=\frac{2x\cdot(x-4)}{(x-3)\cdot(x+1)}$$

ii. $$\left(1-\frac{2}{x-1}\right):\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}\right)=\frac{x-1-2}{x-1}:\frac{x+1-1}{x^2-1}=\frac{x-3}{x-1}:\frac{x}{x^2-1}=\frac{(x-3)\cdot(x^2-1)}{(x-1)\cdot x}=$$

$$=\frac{(x-3)\cdot(x+1)\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot x}=\frac{(x-3)\cdot(x+1)}{x}$$