MATEMÁTICA 4º ESO 19/03/2014
EXAME 3 POLINÓMIOS

TOTAL	SUMA	NOTA
11		

NOME	GRUPO

1	
1	
1	

1. i. Enunciado do Teorema do Resto.
   ii. Explicar mediante algún exemplo a relación existente entre o resto da división dun polinómio e o valor numérico.
   iii. Calcular o valor de k para que $x+3$ sexa un factor da descomposición do polinómio $q(x)=2x^3-kx^2-10$.

i. O Teorema do Resto afirma que dado un polinómio $p(x)$ e dado un número real $a\in\mathbb{R}$, o resto da división de $p(x)$ entre $x-a$ coincide co valor numérico de $p(x)$ para $x=a$, é dicer, con $p(a)$.

ii. Dado o polinómio $p(x)=x^3-1$, ao dividirmos $p(x)$ entre $x-2$ obtemos cociente x^2+2x+4 e resto 7 . O valor numérico de $p(x)$ para $x=2$ é: $p(2)=2^3-1=8-1=7$, que coincide co redsto da división.

iii. Que $x+3$ un factor equivale a que a división do polinómio $q(x)=2x^3-kx^2-10$ entre $x+3$ sexa exacta, é dicer, que o resto sexa nulo, que equivale á sua vez a que o valor numérico de $q(x)$ para $x=-3$ sexa 0 .

Polo tanto:

$$q(-3)=0 \Leftrightarrow 2\cdot(-3)^3-k\cdot(-3)^2-10=0 \Leftrightarrow 2\cdot(-27)-9k-10=0 \Leftrightarrow -54-9k-10=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -9k-64=0 \Leftrightarrow -9k=64 \Leftrightarrow k=-\frac{64}{9}$$

Logo o polinómio será $q(x)=2x^3+\frac{64}{9}x^2-10$.

| 2 | | 2. Expresar en forma factorizada e explicando os métodos utilizados os polinómios:

i. $p(x)=2x^5-4x^3+2x$ ii. $q(x)=2x^3-8x^2-6x+36$

i. Extraendo factor común resulta $2x^5-4x^3+2x=2x\cdot(x^4-2x^2+1)=2x\cdot(x^2-1)^2$.

Ademais, utilizando as identidades notábeis temos que:

$(x^2-1)^2=[(x-1)\cdot(x+1)]^2=(x-1)^2\cdot(x+1)^2$

Logo finalmente a factorización é: $2x^5-4x^3+2x=2x\cdot(x^4-2x^2+1)=2x\cdot(x-1)^2\cdot(x+1)^2$.

ii. Extraendo factor común resulta $2x^3-8x^2-6x+36=2\cdot(x^3-4x^2-3x+18)$.

E aplicando a Regra de Ruffini obteñen-se raíces $x=-2$ (simple) e $x=3$ (dupla), asi que:

$x^3-4x^2-3x+18=(x+2)\cdot(x-3)^2$, e polo tanto a factorización final e:

$2x^3-8x^2-6x+36=2\cdot(x+2)\cdot(x-3)^2$.

| 1 | | 3. i. Comentar o método de obtención dos coeficientes do Binómio de Newton para calcular as poténcias dun binómio.

| 1 | | ii. Desenvolver a poténcia $(2x-3)^4$.

i. Os coeficientes da expresión que dá o Binómio de Newton para calcular a poténcia dun binómio do tipo $x+a$ obteñen-se no Triángulo de Pascal, na fila que corresponde co exponente da poténcia que se quere desenrolar. No caso de que o binómio sexa $x-a$, os coeficientes van alternando o signo.

Exemplo

Para calcular a poténcia terceira de $x+4$, os coeficientes son os da fila correspondente no Triángulo de Pascal: $1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$

A expresión é $(x+4)^3=1\cdot x^3+3\cdot x^2\cdot 4+3\cdot x\cdot 4^2+1\cdot 4^3=x^3+12x^2+48x+64$.

Se a expresión fose $(x-4)^3$, o desenrolo seria con alternáncia de signos:

$(x-4)^3=1\cdot x^3-3\cdot x^2\cdot 4+3\cdot x\cdot 4^2-1\cdot 4^3=x^3-12x^2+48x-64$

ii. $(2x-3)^4=(2x)^4-4\cdot(2x)^3\cdot 3+6\cdot(2x)^2\cdot 3^2-4\cdot(2x)\cdot 3^3+3^4=16x^4-96x^3+216x^2-216x+81$

2	

4. Procurar un polinómio que teña raíces 0, $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$, e coeficiente de primeiro grau 1.

Polo Teorema do Factor, o polinómio $x\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)$ ten raíces 0, $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$.

Multiplicando os factores obtemos: $x\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)=x\cdot\left(x^2-\frac{1}{4}\right)=x^3-\frac{1}{4}x$.

Para que o coeficiente de primeiro grau sexa 1 debemos multiplicar o polinómio por certo número k, de xeito que $-\frac{1}{4}\cdot k=1 \Leftrightarrow k=-4$, logo o polinómio finalmente será:

$$p(x)=-4\cdot x\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)=-4x^3+x$$

2	

5. Obter o resultado das seguintes operacións racionais, reducindo ao máximo a fracción resultante, se é o caso.
   i. $\frac{x^2-4}{x}:\frac{x^2-2x}{x^3+2x^2}$
   ii. $\left(1-\frac{1}{x+1}\right):\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{x+1}{x-1}\right)$

i. $\frac{x^2-4}{x}:\frac{x^2-2x}{x^3+2x^2}=\frac{(x^2-4)\cdot(x^3+2x^2)}{x\cdot(x^2-2x)}=\frac{(x-2)\cdot(x+2)\cdot x^2\cdot(x+2)}{x^2\cdot(x-2)}=(x+2)\cdot(x+2)=(x+2)^2$

ii. $\left(1-\frac{1}{x+1}\right):\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{x+1-1}{x+1}:\frac{1-(x+1)\cdot(x+1)}{x^2-1}=\frac{x}{x+1}:\frac{1-(x^2+2x+1)}{x^2-1}=$

$=\frac{x}{x+1}:\frac{-x^2-2x}{x^2-1}=\frac{x\cdot(x^2-1)}{(x+1)\cdot(-x^2-2x)}=-\frac{x\cdot(x-1)\cdot(x+1)}{(x+1)\cdot x\cdot(x+2)}=-\frac{x-1}{x+2}$