MATEMÁTICA 4º ESO 12/03/2014

EXAME 3 POLINÓMIOS
REC 1 OS NÚMEROS REAIS
2 RADICAIS

TOTAL	SUMA	NOTA
11		

NOME	GRUPO

REC
□ SEN RECUPERACIÓN...............................EXS 1-5 (11 PTOS.)
□ CON RECUPERACIÓN...............................EXS 1-2ii-3i-4-5ii-6-7-8 (11 PTOS.)

1. i. Enunciado do Teorema do Factor. (1)
   ii. Explicar mediante algún exemplo a relación existente entre factores e raíces dun polinómio. (1)
   iii. Calcular o valor de k para que $x+2$ sexa un factor da descomposición do polinómio $q(x)=kx^3-x^2+5$. (1)

i. O Teorema do Factor di que dado un polinómio $p(x)$ e dado un número real $a\in\mathbb{R}$, $p(a)=0 \Leftrightarrow x-a$ é un factor do polinómio $p(x)$. De outro xeito: a é unha raíz de $p(x)$ se e só se $x-a$ divide a $p(x)$.

ii. Dado o polinómio $p(x)=x^3-1$, é evidente que 1 é unha raíz de $p(x)$, xá que $p(1)=1^3-1=0$. Isto equivale a afirmar que a división de $p(x)=x^3-1$ entre $x-1$ é exacta, e polo tanto na descomposición factorial de $p(x)$ aparece $x-1$ como un dos seus factores. Efectivamente, ao factorizar $p(x)=x^3-1$ obtén-se $x^3-1=(x-1)\cdot(x^2+x+1)$.

iii. Polo Teorema do Factor, que $x+2$ sexa un factor da descomposición do polinómio $q(x)=kx^3-x^2+5$ equivale a que -2 sexa unha raíz, polo tanto:

$$q(-2)=0 \Leftrightarrow k\cdot(-2)^3-(-2)^2+5=0 \Leftrightarrow -8k-4+5=0 \Leftrightarrow -8k+1=0 \Leftrightarrow k=\frac{1}{8}$$

Logo o polinómio será $q(x)=\frac{1}{8}x^3-x^2+5$.

2 2. Expresar en forma factorizada e explicando os métodos utilizados os polinómios:
i. $p(x)=3x^5-48x$ ii. $q(x)=2x^3-8x^2-14x+20$

i. Extraendo factor común resulta $3x^5-48x=3x\cdot(x^4-16)$.

Ademais, utilizando as identidades notábeis temos que $x^4-16=(x^2-4)\cdot(x^2+4)=(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x^2+4)$.

Resolvendo $x^2+4=0$ obtemos: $x^2+4=0 \Leftrightarrow x^2=-4 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{-4}\notin\mathbb{R}$; logo este último polinómio é irreducíbel.

Finalmente a factorización é: $3x^5-48x=3x\cdot(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x^2+4)$.

ii. Extraendo factor común resulta $2x^3-8x^2-14x+20=2\cdot(x^3-4x^2-7x+10)$.

E aplicando a Regra de Ruffini obtén-se:

	1	-4	-7	10
1		1	-3	-10
	1	-3	-10	0
-2		-2	10	
	1	-5	0	

Asi que $x^3-4x^2-7x+10=(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-5)$, e polo tanto a factorización final e:

$2x^3-8x^2-14x+20=2\cdot(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-5)$.

1 3. i. Na expresión $(x-2)^5=x^5-10x^4+40x^3-60x^2-80x+32$ aparece o desenrolo do Binómio de Newton para a poténcia quinta do binómio $x-2$. Sinalar e corrixir de xeito razoado os posíbeis erros contidos na expresión.

1 ii. Desenvolver a poténcia $(3x-2)^4$.

i. A expresión correcta é $(x-2)^5=x^5-10x^4+40x^3-80x^2+80x-32$, con alternáncia de signos, debido a que é a poténcia dunha diferenza.

Ademais os coeficientes obtidos do Triángulo de Pascal son $1,\ 5,\ 10,\ 10,\ 5,\ 1$, que xunto as poténcias de 2 en orden crecente ($2^0=1,\ 2^1=2,\ 2^2=4,\ 2^3=8,\ 2^4=16,\ 2^5=32$) dá finalmente a expresión correcta.

ii. $(3x-2)^4=(3x)^4-4\cdot(3x)^3\cdot 2+6\cdot(3x)^2\cdot 2^2-4\cdot(3x)\cdot 2^3+2^4=81x^4-216x^3+216x^2-96x+16$

2		4. Procurar un polinómio que teña raíces 1, $-\frac{1}{4}$ e 3, e termo independente 6.

Polo Teorema do Factor, o polinómio $(x-1)\cdot\left(x+\frac{1}{4}\right)\cdot(x-3)$ ten raíces 1, $-\frac{1}{4}$ e 3.

Multiplicando os factores obtemos: $(x-1)\cdot\left(x+\frac{1}{4}\right)\cdot(x-3)=x^3-\frac{15}{4}x^2+2x+\frac{3}{4}$.

Para que o termo independente sexa 6 debemos multiplicar o polinómio por certo número k, de xeito que $\frac{3}{4}\cdot k=6 \Leftrightarrow k=\frac{24}{3}=8$, logo o polinómio finalmente será:

$$p(x)=8\cdot(x-1)\cdot\left(x+\frac{1}{4}\right)\cdot(x-3)=8\cdot\left(x^3-\frac{15}{4}x^2+2x+\frac{3}{4}\right)=8x^3-30x^2+16x+6$$

2		5. Obter o resultado das seguintes operacións racionais, reducindo ao máximo a fracción resultante, se é o caso.

i. $\frac{x^2-4x}{x^2-4}:\frac{x}{2x^2+8x}$

ii. $\left(\frac{2}{x-1}+1\right):\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x+1}\right)$

i. $\frac{x^2-4x}{x^2-4}:\frac{x}{2x^2+8x}=\frac{(x^2-4x)\cdot(2x^2+8x)}{(x^2-4)\cdot x}=\frac{x\cdot(x-4)\cdot 2x\cdot(x+4)}{(x+2)\cdot(x-2)\cdot x}=\frac{2x\cdot(x-4)\cdot(x+4)}{(x+2)\cdot(x-2)}$

ii. $\left(\frac{2}{x-1}+1\right):\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{2+x-1}{x-1}:\frac{1-(x-1)}{x^2-1}=\frac{x+1}{x-1}:\frac{2-x}{x^2-1}=\frac{(x+1)\cdot(x^2-1)}{(x-1)\cdot(2-x)}=$

$=\frac{(x+1)\cdot(x+1)\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(2-x)}=\frac{(x+1)^2}{2-x}=\frac{x^2+2x+1}{2-x}$

1 | 6. A distáncia do duplo dun número t ao número -20 é inferior a $5,5$ unidades; obter o intervalo no que debe estar localizado t e representá-lo na recta real.

Dado o número t, o seu duplo é $2t$ e a distáncia a -20 obtén-se restando ambos. Logo a condición é: $|2t-(-20)|<5,5$.

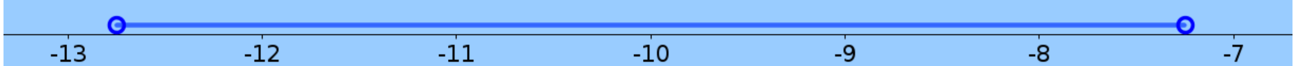
Resolvendo a ecuación $|2t-(-20)|=5,5$ resulta:

$|2t-(-20)|=5,5 \Leftrightarrow |2t+20|=5,5 \Leftrightarrow 2t=-20\pm 5,5$.

No primeiro caso: $2t=-20+5,5=-14,5 \Leftrightarrow t=-\dfrac{14,5}{2}=-7,25$.

No segundo caso: $2t=-20-5,5=-25,5 \Leftrightarrow t=-\dfrac{25,5}{2}=-12,75$.

Logo t debe estar comprendido entre os valores $-12,75$ e $-7,25$: $t\in(-12,75,-7,25)$.



1 | 7. Transformar nun radical irreducíbel a expresión radical $\dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{72}-\dfrac{3}{4}\sqrt{128}+5\sqrt{8}$.

$$\frac{1}{3}\cdot\sqrt{72}-\frac{3}{4}\sqrt{128}+5\sqrt{8}=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{2^3\cdot 3^2}-\frac{3}{4}\sqrt{2^7}+5\sqrt{2^3}=\frac{1}{3}\cdot 2\cdot 3\sqrt{2}-\frac{3}{4}\cdot 2^3\sqrt{2}+5\cdot 2\sqrt{2}=$$

$$=2\sqrt{2}-6\sqrt{2}+10\sqrt{2}=(2-6+10)\cdot\sqrt{2}=6\sqrt{2}$$

1 | 8. Racionalizar e simplificar a expresión $\dfrac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{8}-5}$.

$$\frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{8}-5}=\frac{(3-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{8}+5)}{(\sqrt{8}-5)\cdot(\sqrt{8}+5)}=\frac{3\sqrt{8}+15-\sqrt{16}-5\sqrt{2}}{8-25}=\frac{3\sqrt{2^3}+15-4-5\sqrt{2}}{-17}=\frac{3\cdot 2\sqrt{2}+11-5\sqrt{2}}{-17}=$$

$$=\frac{6\sqrt{2}+11-5\sqrt{2}}{-17}=\frac{11+\sqrt{2}}{-17}=-\frac{11+\sqrt{2}}{17}$$