MATEMÁTICA 4º ESO | 13/12/2013

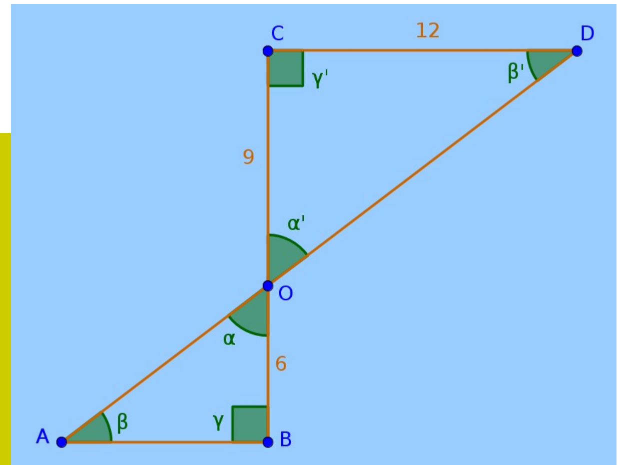
REC 6 SEMELLANZA
7 TRIGONOMETRIA

TOTAL	SUMA	NOTA
11		

NOME	GRUPO B

1.5	

1. Na figura adxunta, indicar de xeito razoado por que os dous triángulos son semellantes e calcular o lado $\overline{OA}$.



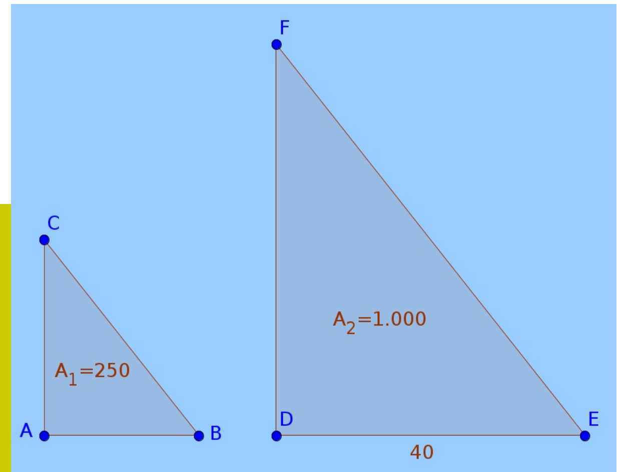
Os triángulos $\overset{\triangle}{OAB}$ e $\overset{\triangle}{OCD}$ son semellantes porque teñen iguais os seus ángulos homólogos: $\gamma=\gamma'=90^o$, $\alpha=\alpha'$ por seren opostos polo vértice e $\beta=\beta'$ por seren complementares dos anteriores.

Logo por semellanza $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{OB}}{\overline{OC}}$, asi que $\frac{\overline{AB}}{12}=\frac{6}{9} \Leftrightarrow \overline{AB}=\frac{12\cdot 6}{9}=8$.

O lado $\overline{OA}$ é a hipotenusa do triángulo $\overset{\triangle}{OAB}$ polo que, utilizando o teorema de Pitágoras temos $\overline{OA}=\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$

1	

2. Dous triángulos rectángulos semellantes teñen áreas $A_1=250\ cm^2$ e $A_2=1.000\ cm^2$ respectivamente. Calcular a altura do primeiro sabendo que a base do segundo é de $40\ cm$.



Se chamamos r á razón de semellanza, a razón das áreas é o seu cuadrado, logo $r^2=\frac{A_2}{A_1}=\frac{1.000}{250}=4 \Rightarrow r=\sqrt{4}=2$.

Polo tanto, se chamamos b_1 e b_2 ás bases e h_1 e h_2 ás alturas, pola semellanza resulta que $\frac{b_2}{b_1}=\frac{h_2}{h_1}=2$.

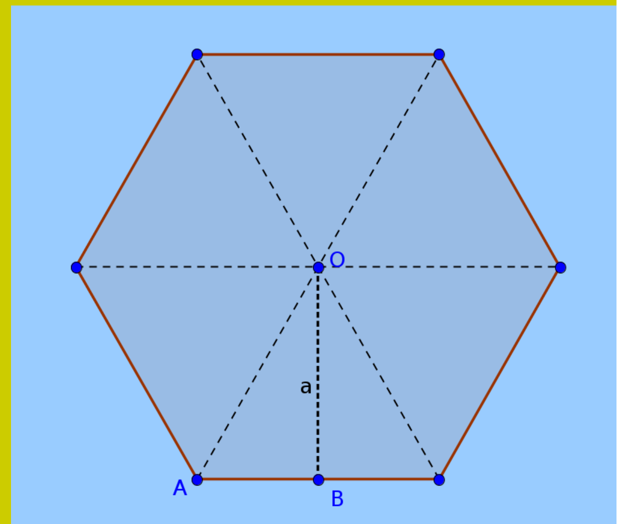
De aquí obtemos que $b_1=\frac{b_2}{2}=\frac{40}{2}=20\ cm$.

E como a área do triángulo é $A=\frac{b\cdot h}{2}$, no primeiro triángulo temos que $A_1=\frac{b_1\cdot h_1}{2} \Leftrightarrow h_1=\frac{2\cdot A_1}{b_1}=\frac{2\cdot 250}{20}=\frac{500}{20}=25\ cm$.

1.5	

3. Calcular a diagonal dun exágono de apotema $a = 10\,cm$.

O exágono pode dividir-se en 6 triángulos equiláteros. Logo no triángulo $\overset{\triangle}{OAB}$ o ángulo que se forma en A é $\alpha = 60^o$.



Polo tanto:

$$sen\ 60^o = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \overline{OA} = \frac{\overline{OB}}{sen\ 60^o} = \frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{20}{\sqrt{3}} \approx 11{,}55\ cm$$

Como o lado $\overline{OA}$ é o raio do exágono, o seu diámetro é $d = 2 \cdot \overline{OA} = 2 \cdot 11{,}55 = 23{,}1\ cm$

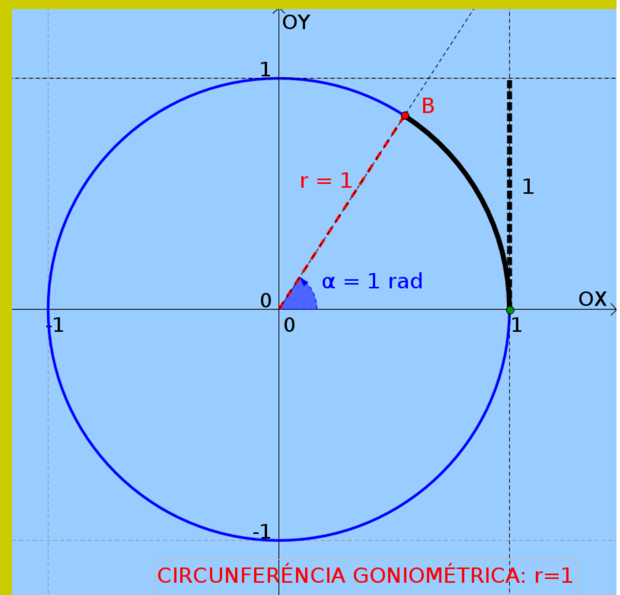
1 4. i. Explicar brevemente que é un radián e a sua equivaléncia en graus. Apoiar a explicación con un gráfico.

0.5 ii. Dos seguintes ángulos expresados en radiáns, indicar de xeito razoado cal é o que equivale ao ángulo de 150^{o} : $\frac{5\pi}{6}\ rad$, $\frac{2\pi}{3}\ rad$, $\frac{\pi}{3}\ rad$.

0.5 iii. Calcular de xeito razoado a equivaléncia en graus do ángulo de $\frac{11\pi}{12}\ rad$.

i. Define-se o radián como o ángulo que determina na circunferéncia un arco de igual lonxitude que o raio da própria circuunferéncia.

Sabe-se que a circunferéncia mide 360^{o} e que a sua lonxitude é 2π veces o raio; logo 360^{o} equivale a $2\pi\ rad$.



ii. Da equivaléncia anterior podemos estabelecer a seguinte proporción:

$\begin{array}{lcl} 360^{o} & \rightarrow & 2\pi\ rad \\ 150^{o} & \rightarrow & x\ rad \end{array}$, e polo tanto $x=\frac{2\pi\cdot 150^{o}}{360^{o}}\ rad=\frac{300\pi}{360}\ rad=\frac{5\pi}{6}\ rad$, logo corresponde-se co primeiro dos trés ángulos.

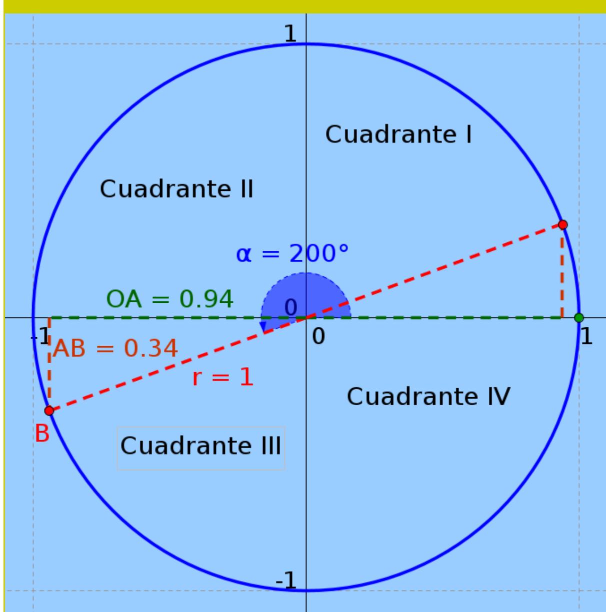
iii. $\begin{array}{lcl} 2\pi\ rad & \rightarrow & 360^{o} \\ \frac{11\pi}{12}\ rad & \rightarrow & x \end{array}$, logo $x=\frac{\frac{11\pi}{12}\cdot 360^{o}}{2\pi}=\frac{3.960^{o}}{24}=165^{o}$.

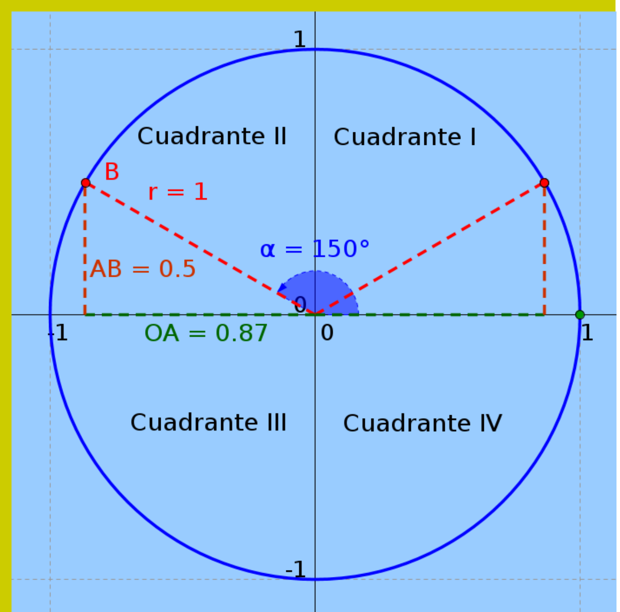
| 1 | | 5. i. Explicar brevemente que se entende por redución dun ángulo ao primeiro cuadrante e pór algún exemplo.
| 1 | | ii. Explicar de xeito razoado a que ángulos do primeiro cuadrante poden reducir-se os ángulos de $290º$ e $135º$.
| 1 | | iii. Calcular as razóns trigonométricas (seno, coseno e tanxente) do ángulo de $53º$ sabendo que $cos\ 37º=0,8$.

i. Reducir un ángulo ao primeiro cuadrante significa procurar un ángulo do primeiro cuadrante tal que as suas razóns trigonométricas permitan obter as razóns trigonométricas do ángulo orixinal.

Representando na circunferéncia goniométrica ángulos dos cuadrantes II, III e IV e os seus triángulos característicos, é imediato que se poden atopar ángulos do primeiro cuadrante con igual triángulo característico, que permiten obter as razóns trigonométricas dos ángulos a estudar.

Asi é posíbel coñecer as razóns trigonométricas de calquer ángulo a partir simplesmente das razóns trigonométricas dos ángulos do cuadrante I.





Asi, por exemplo, o ángulo de $150º$ pode-se reducir ao de $30º$, de maneira que os senos son iguais e os seus cosenos son opostos: $sen\ 150º=sen\ 30º$, $cos\ 150º=-cos\ 30º$.

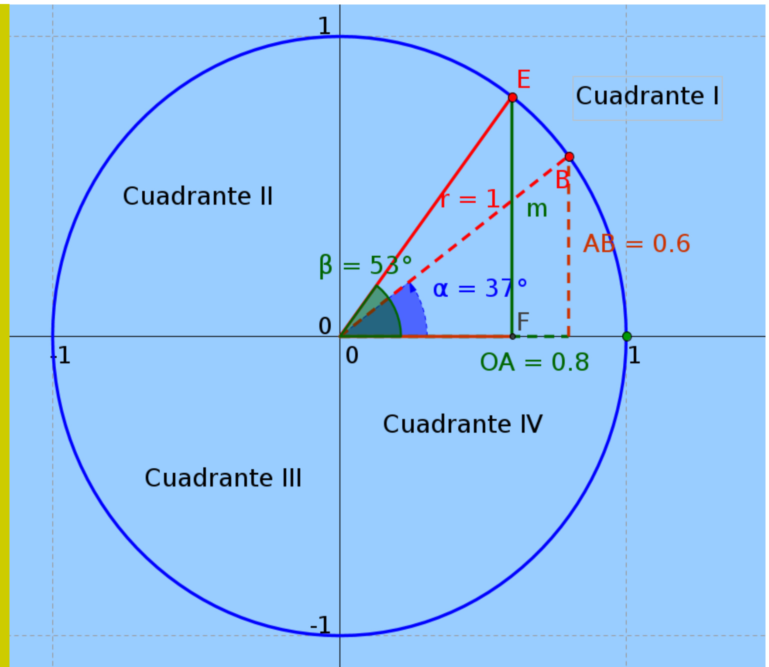
O ángulo de $200º$ pode-se reducir ao de $20º$, de xeito que os seus senos e os seus cosenos son opostos: $sen\ 200º=-sen\ 20º$, $cos\ 200º=-cos\ 20º$.

ii. O ángulo de $290º$ pertence ao cuarto cuadrante e faltan-lle $70º$ para alcanzar os $360º$; logo pode ser reducido ao de $70º$, de xeito que os seus senos son opostos, os seus cosenos coinciden e as tanxentes son tamén opostas: $sen\ 290º=-sen\ 70º$, $cos\ 290º=cos\ 70º$ e $tg\ 290º=-tg\ 70º$.

O ángulo de $135º$ é a bisectriz do segundo cuadrante, logo pode ser reducido á bisectriz do primeiro, é dicer ao ángulo de $45º$, de xeito que os seus senos son iguais, os cosenos opostos e as tanxentes tamén opostas: $sen\ 135º=sen\ 45º$, $cos\ 135º=-cos\ 45º$ e $tg\ 135º=-tg\ 45º$.

iii. Os ángulos de 53^o e 37^o pertencen ao primeiro cuadrante e son complementares, logo os seus triángulos característicos son iguais.

Por este motivo temos que $sen\ 53^o = cos\ 37^o = 0{,}8$.



Utilizando a identidade pitagórica resulta ademais que:

$$sen^2\ 53^o + cos^2\ 53^o = 1 \Leftrightarrow cos^2\ 53^o = 1 - sen^2\ 53^o = 1 - 0{,}8^2 = 1 - 0{,}64 = 0{,}36 \Leftrightarrow$$

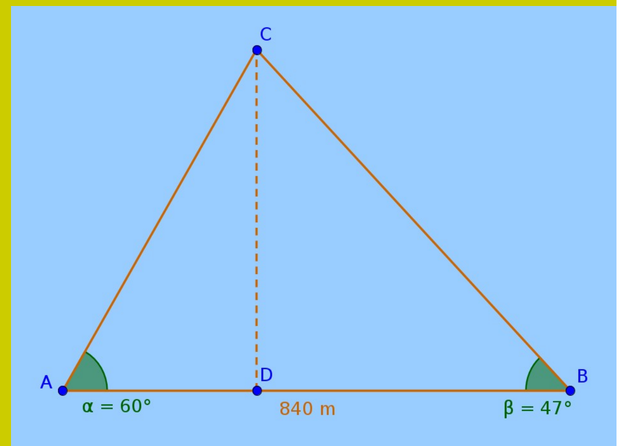
$$\Leftrightarrow cos\ 53^o = \pm\sqrt{0{,}36} = \pm 0{,}6$$

Dos dous valores escollemos o positivo por ser 53^o un ángulo do primeiro cuadrante e ter polo tanto as suas razóns trigonométricas positivas.

Finalmente, $tg\ 53^o = \frac{sen\ 53^o}{cos\ 53^o} = \frac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$.

2	

6. Duas persoas distantes entre si $840\ m$ observan simultaneamente un avión con ángulos de elevación respectivos de 60^o e 47^o. Calcular a altitude á que voa o avión?



Se chamamos A e B ás posicións das duas observadoras, D ao ponto situado na vertical do avión e Q á posición do avión, resultan dous triángulos rectángulos $\overset{\triangle}{ACD}$ e $\overset{\triangle}{BCD}$.

Chamando d_A á distáncia $\overline{AD}$ e d_B á distáncia $\overline{BD}$, resulta que a distáncia entre ambas observadoras é:

$$d_A+d_B=840 \Leftrightarrow d_B=840-d_A$$

E chamando h á altitude do avión, temos o que segue.

No triángulo $\overset{\triangle}{ACD}$: $tg\ 60^o=\dfrac{h}{d_A} \Leftrightarrow h=tg\ 60^o\cdot d_A$ [1]

E no triángulo $\overset{\triangle}{BCD}$: $tg\ 47^o=\dfrac{h}{d_B}=\dfrac{h}{840-d_A} \Leftrightarrow h=tg\ 47^o\cdot(840-d_A)$ [2]

Igualando nas expresións [1] e [2] obtemos: $tg\ 60^o\cdot d_A=tg\ 47^o\cdot(840-d_A)$

Resolvendo resulta: $tg\ 60^o\cdot d_A=tg\ 47^o\cdot(840-d_A) \Leftrightarrow tg\ 60^o\cdot d_A=tg\ 47^o\cdot 840-tg\ 47^o\cdot d_A \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow tg\ 60^o\cdot d_A+tg\ 47^o\cdot d_A=tg\ 47^o\cdot 840 \Leftrightarrow (tg\ 60^o+tg\ 47^o)\cdot d_A=tg\ 47^o\cdot 840 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d_A=\frac{tg\ 47^o\cdot 840}{tg\ 60^o+tg\ 47^o}\approx 320{,}20\ m$$

Finalmente a altitude obtén-se substituíndo en [1]: $h=tg\ 60^o\cdot d_A\approx 556{,}34\ m$.