MATEMÁTICA 4º ESO | 10/12/2013

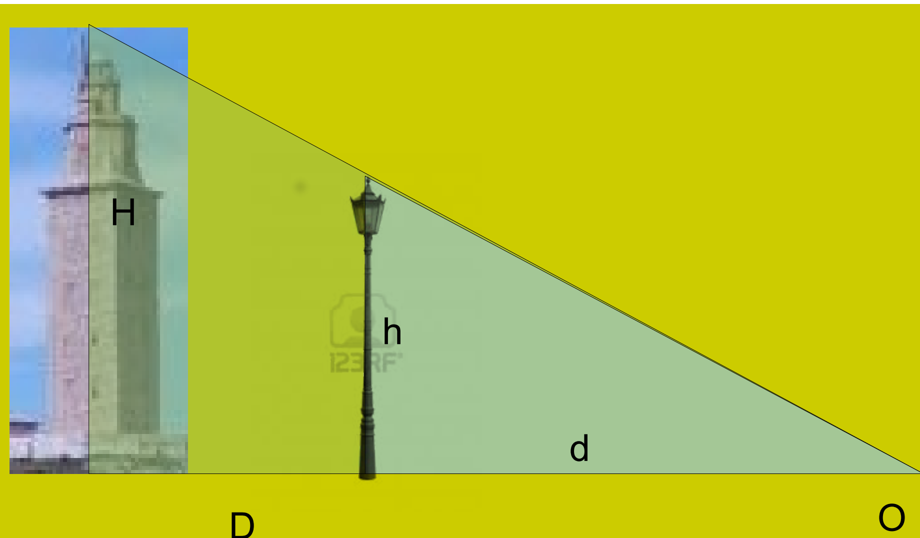
REC 6 SEMELLANZA
7 TRIGONOMETRIA

TOTAL	SUMA	NOTA
11		

NOME	GRUPO A

1	

1. Desde certo ponto observamos un poste e unha torre, de xeito que nos coinciden en liña recta as bases e os extremos de ambos. Calcular a altura da torre sabendo que as distáncias entre a nosa posición e as bases son $200\ m$ e $7\ m$ respectivamente, e que a altura do poste é de $3\ m$.



Se chamamos D e d ás distáncias e H e h ás alturas respectivas, por semellanza resulta $\frac{H}{h}=\frac{D}{d}$.

Logo $H=\frac{D\cdot h}{d}=\frac{200\cdot 3}{7}=\frac{600}{7}\approx 85{,}71\ m$.

1	

2. Dous rectángulos semellantes teñen áreas $a_1=1.200\ cm^2$ e $a_2=10.800\ cm^2$. Calcular as dimensións do primeiro rectángulo sabendo que a altura do segundo é de $120\ cm$.

Se chamamos r á razón de semellanza, a razón das áreas é o seu cuadrado, logo $r^2=\frac{a_2}{a_1}=\frac{10.800}{1.200}=9 \Rightarrow r=\sqrt{9}=3$.

Como as dimensións do segundo rectángulo son altura $h_2=120\ cm$ e base $b_2=\frac{10.800}{120}=90\ cm$, as dimensións do primeiro serán a terecira parte destas, é dicer, altura $h_1=\frac{1}{3}\cdot h_2=\frac{1}{3}\cdot 120=40\ cm$ e base $b_1=\frac{1}{3}\cdot b_2=\frac{1}{3}\cdot 90=30\ cm$.

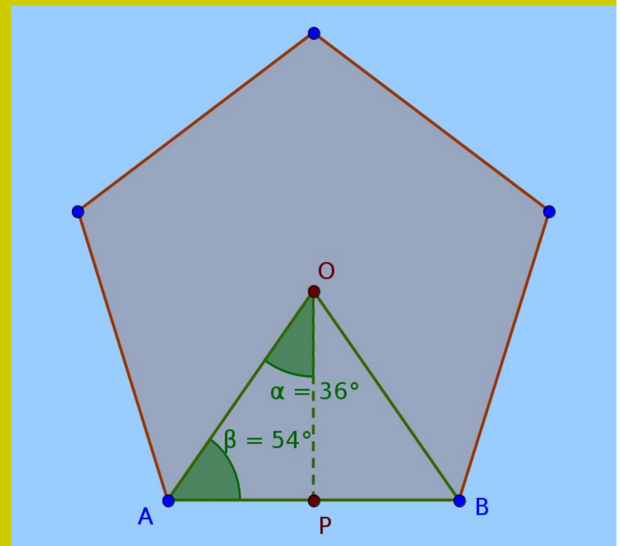
| 2 | |

3. Calcular o raio dun pentágono regular de apotema $a=10\,cm$.

O pentágono pode dividir-se en 5 triángulos isóscele. Cada un deles ten no centro do pentágono un ángulo de $\frac{360^o}{5}=72^o$ e polo tanto cada un dos outros dous ángulos será a metade de $180^o-72^o=108^o$, é dicer 54^o .

Dividindo un deses triángulos á metade aparecen dous triángulos rectángulos; no triángulo $\overset{\triangle}{APO}$ temos o ángulo $\beta=54^o$ e o lado $\overline{OP}=a=10$.

Logo, no triángulo $\overset{\triangle}{APO}$, o lado $\overline{OA}$ coincide co raio do pentágono, asi que:



$$sen\ 54^o=\frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \overline{OA}=\frac{\overline{OP}}{sen\ 54^o}\approx\frac{10}{0{,}81}\approx 12{,}36\ cm$$

Nota. Existe outra forma indirecta de obter o raio, utilizando a tanxente do ángulo $\beta=54^o$, xá que no triángulo $\overset{\triangle}{APO}$ temos que $tg\ 54^o=\frac{\overline{OP}}{\overline{AP}}=\frac{10}{\overline{AP}} \Leftrightarrow \overline{AP}=\frac{10}{tg\ 54^o}\approx\frac{10}{1{,}38}\approx 7{,}27\ cm$.

Utilizando agora o Teorema de Pitágoras no triángulo $\overset{\triangle}{APO}$ resulta:

$$\overline{OA}=\sqrt{\overline{AP}^2+\overline{OP}^2}\approx\sqrt{7{,}27^2+10^2}\approx\sqrt{152{,}79}\approx 12{,}36\ cm$$

1	

4. i. Explicar brevemente que é un radián e a sua equiválencia en graus. Apoiar a explicación con un gráfico.

0.5	

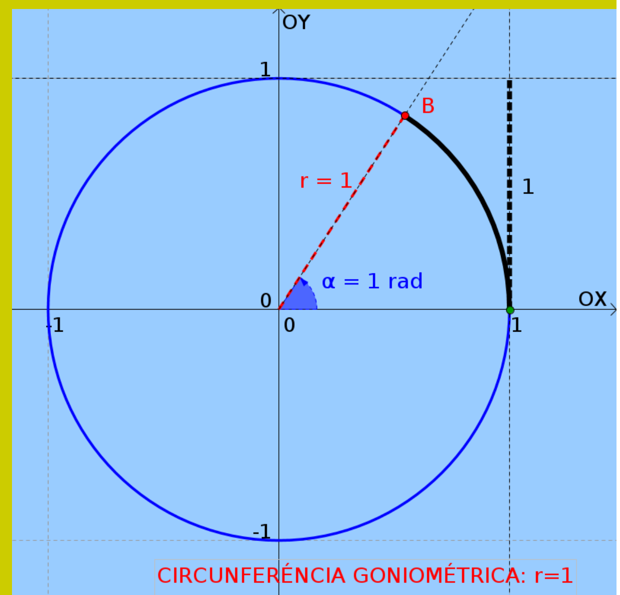
ii. Dos seguintes ángulos expresados en radiáns, indicar de xeito razoado cal é o que equivale ao ángulo de 120^o : $\frac{5\pi}{6}\ rad$, $\frac{2\pi}{3}\ rad$, $\frac{\pi}{3}\ rad$.

0.5	

iii. Calcular de xeito razoado a equiválencia en graus do ángulo de $\frac{13\pi}{12}\ rad$.

i. Define-se o radián como o ángulo que determina na circunferéncia un arco de igual lonxitude que o raio da própria circuunferéncia.

Sabe-se que a circunferéncia mide 360^o e que a sua lonxitude é 2π veces o raio; logo 360^o equivale a $2\pi\ rad$.



ii. Da equiválencia anterior podemos estabelecer a seguinte proporción:

$$\begin{matrix} 360^o & \rightarrow & 2\pi\ \ rad \\ 120^o & \rightarrow & x\ \ rad \end{matrix}$$, e polo tanto $x=\frac{2\pi\cdot 120^o}{360^o}\ rad=\frac{2\pi}{3}\ rad$, logo corresponde-se co segundo dos trés ángulos.

iii. $$\begin{matrix} 2\pi\ \ rad & \rightarrow & 360^o \\ \frac{13\pi}{12}\ \ rad & \rightarrow & x \end{matrix}$$, logo $x=\frac{\frac{13\pi}{12}\cdot 360^o}{2\pi}=\frac{4.680^o}{24}=195^o$.

1 5. i. Explicar brevemente que se entende por redución dun ángulo ao primeiro cuadrante e pór algún exemplo.

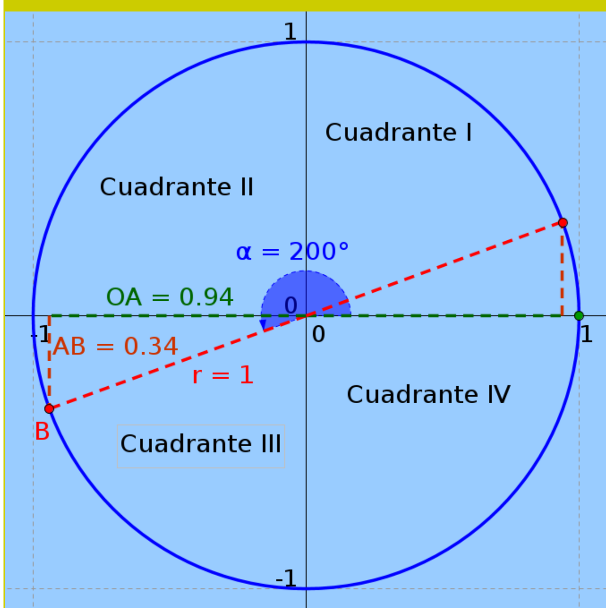
1 ii. Explicar de xeito razoado a que ángulos do primeiro cuadrante poden reducir-se os ángulos de 280^o e 100^o .

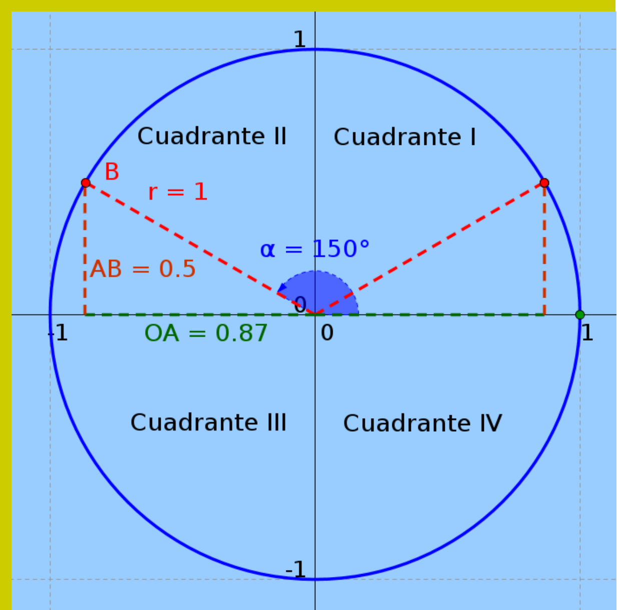
1 iii. Calcular as razóns trigonométricas (seno, coseno e tanxente) do ángulo de 53^o sabendo que $sen\ 37^o=0,6$.

i. Reducir un ángulo ao primeiro cuadrante significa procurar un ángulo do primeiro cuadrante tal que as suas razóns trigonométricas permitan obter as razóns trigonométricas do ángulo orixinal.

Representando na circunferéncia goniométrica ángulos dos cuadrantes II, III e IV e os seus triángulos característicos, é imediato que se poden atopar ángulos do primeiro cuadrante con igual triángulo característico, que permiten obter as razóns trigonométricas dos ángulos a estudar.

Asi é posíbel coñecer as razóns trigonométricas de calquer ángulo a partir simplesmente das razóns trigonométricas dos ángulos do cuadrante I.





Asi, por exemplo, o ángulo de 150^o pode-se reducir ao de 30^o , de maneira que os senos son iguais e os seus cosenos son opostos: $sen\ 150^o=sen\ 30^o$, $cos\ 150^o=-cos\ 30^o$.

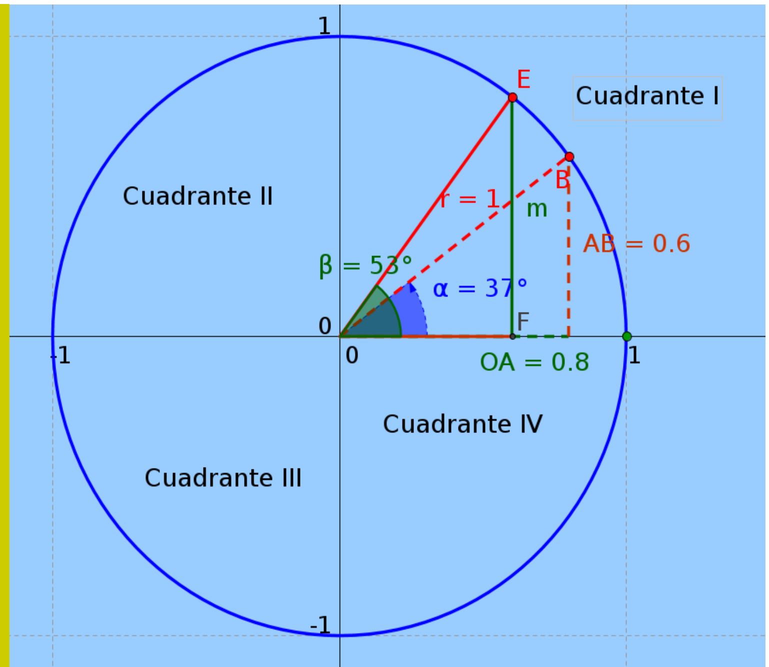
O ángulo de 200^o pode-se reducir ao de 20^o , de xeito que os seus senos e os seus cosenos son opostos: $sen\ 200^o=-sen\ 20^o$, $cos\ 200^o=-cos\ 20^o$.

ii. O ángulo de 280^o pertence ao cuarto cuadrante e faltan-lle 80^o para alcanzar os 360^o ; logo pode ser reducido ao de 80^o , de xeito que os seus senos son opostos, os seus cosenos coinciden e as tanxentes son tamén opostas: $sen\ 280^o=-sen\ 80^o$, $cos\ 280^o=cos\ 80^o$ e $tg\ 280^o=-tg\ 80^o$.

O ángulo de 100^o pertence ao segundo cuadrante e excede 10^o do ángulo recto; logo pode ser reducido ao de 80^o , de xeito que os seus senos son iguais, os cosenos opostos e as tanxentes tamén opostas: $sen\ 100^o=sen\ 80^o$, $cos\ 100^o=-cos\ 80^o$ e $tg\ 100^o=-tg\ 80^o$.

iii. Os ángulos de 53^o e 37^o pertencen ao primeiro cuadrante e son complementares, logo os seus triángulos característicos son iguais.

Por este motivo temos que $\cos 53^o = \operatorname{sen} 37^o = 0{,}6$.



Utilizando a identidade pitagórica resulta ademais que:

$$\operatorname{sen}^2 53^o + \cos^2 53^o = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 53^o = 1 - \cos^2 53^o = 1 - 0{,}6^2 = 1 - 0{,}36 = 0{,}64 \Leftrightarrow$$

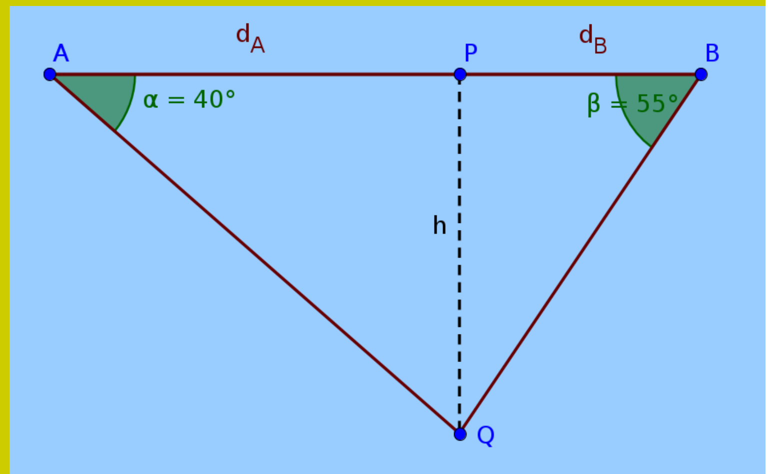
$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} 53^o = \pm\sqrt{0{,}64} = \pm 0{,}8$$

Dos dous valores escollemos o positivo por ser 53^o un ángulo do primeiro cuadrante e ter polo tanto as suas razóns trigonométricas positivas.

Finalmente, $tg\ 53^o = \dfrac{\operatorname{sen} 53^o}{\cos 53^o} = \dfrac{0{,}8}{0{,}6} \approx 1{,}33$.

2	

6. Duas persoas situadas nos extremos dunha ponte sobre o rio observan un bote que pasa por debaixo con ángulos de 40^o e 55^o respectivamente. Calcular a lonxitude da ponte sabendo que a sua altura é de $40\ m$.



Se chamamos A e B ás posicións das duas observadoras, P ao ponto da ponte situado sobre o bote e Q á posición do bote, resultan dous triángulos rectángulos $\overset{\triangle}{APQ}$ e $\overset{\triangle}{BPQ}$.

Chamando d_A á distáncia $\overline{AP}$ e d_B á distáncia $\overline{BP}$ resulta que a lonxitude da ponte será $l=d_A+d_B$.

E chamando h á altura da ponte temos o que segue.

No triángulo $\overset{\triangle}{APQ}$: $tg\ 40^o=\frac{h}{d_A} \Leftrightarrow d_A=\frac{h}{tg\ 40^o}=\frac{40}{0,84}\approx 47,67$

E no triángulo $\overset{\triangle}{BPQ}$: $tg\ 55^o=\frac{h}{d_B} \Leftrightarrow d_B=\frac{h}{tg\ 55^o}=\frac{40}{1,43}\approx 28,01$

Logo a lonxitude da ponte será $l=d_A+d_B\approx 75,68\ m$.