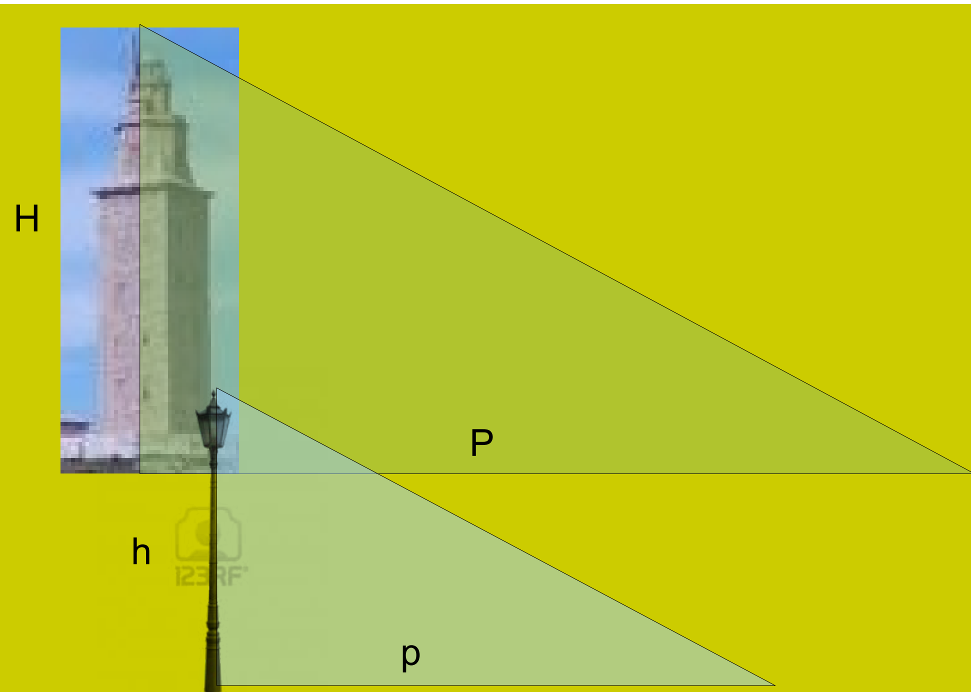
MATEMÁTICA 4º ESO	22/11/2013	TOTAL	SUMA	NOTA
TEMAS 6 SEMELLANZA 7 TRIGONOMETRIA		11		

NOME	GRUPO B

1	

1. Calcular a sombra proxectada por unha torre de $20\ m$ de altura se nese mesmo intre a sombra proxectada por un farol de $3\ m$ de altura mide $5{,}2\ m$.



Se chamamos P á sombra da torre e p á do farol, e H e h ás alturas respectivas, por semellanza resulta $\frac{P}{p}=\frac{H}{h}$.

Logo $\frac{S}{5{,}2}=\frac{20}{3} \Leftrightarrow S=\frac{20\cdot 5{,}2}{3}=\frac{104}{3}\approx 34{,}67\ m$.

1 2. Dous rectángulos semellantes teñen áreas $a_1 = 100\ cm^2$ e $a_2 = 1.600\ cm^2$. Calcular as dimensións do segundo rectángulo sabendo que a base do primeiro é de $20\ cm$.

A razón das áreas é o cuadrado da razón de semellanza r, logo $r^2 = \frac{1.600}{100} = 16 \Rightarrow r = \sqrt{16} = 4$.

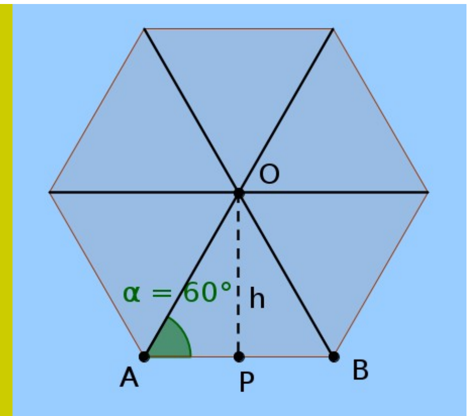
Polo tanto o primeiro rectángulo ten base $b_1 = 20\ cm^2$ e altura $h_1 = \frac{100}{20} = 5\ cm^2$, asi que as dimensións do segundo rectángulo serán $b_2 = 4 \cdot 20\ cm^2 = 80\ cm^2$ e altura $h_2 = 4 \cdot 5\ cm^2 = 20\ cm^2$.

2	

3. Calcular a apotema dun exágono regular de lado $l = 10\,cm$.

O exágono pode dividir-se en 6 triángulos equiláteros. Cada un deles ten polo tanto trés ángulos de 60^o .

Dividindo un deses triángulos á metade aparecen dous triángulos rectángulos; no triángulo $\overset{\triangle}{APO}$ temos o ángulo $\alpha = 60^o$ e o lado $\overline{AP} = \frac{10}{2} = 5\ cm$.



A apotema do exágono é a altura do triángulo $\overset{\triangle}{APO}$, ou sexa, o lado $\overline{OP}$, que é o cateto oposto ao ángulo α , logo:

$$tg\ 60^o = \frac{\overline{OP}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{OP}}{5} \Leftrightarrow \overline{OP} = 5 \cdot tg\ 60^o = 5 \cdot \sqrt{3} \approx 5 \cdot 1{,}73 = 8{,}65\ cm$$

Nota. Existe outra forma, neste caso mais cómoda de obter a apotema utilizando simplesmente o Teorema de Pitágoras, xá que no triángulo $\overset{\triangle}{APO}$ o lado $\overline{OA}$ ten lonxitude igual aos lados do exágono. Asi $h = \sqrt{\overline{AO}^2 - \overline{AP}^2} = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5 \cdot \sqrt{3}$.

1	

4. i. Explicar brevemente que é un radián e a sua equivaléncia en graus. Apoiar a explicación con un gráfico.

0.5	

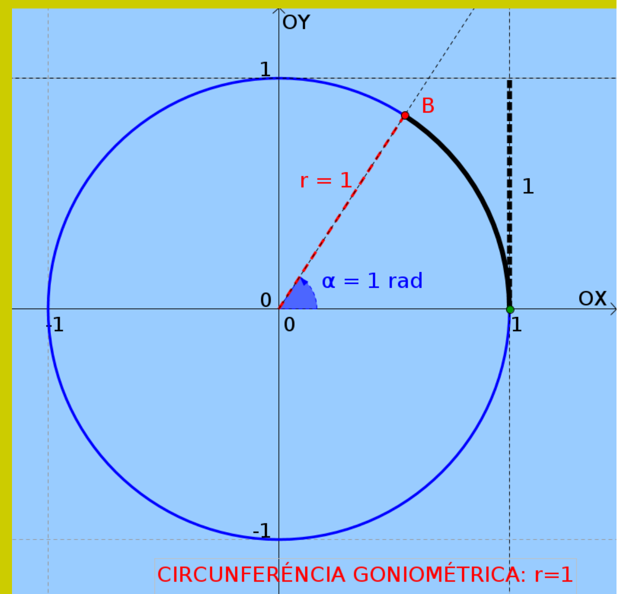
ii. Calcular a equivaléncia en radiáns do ángulo de 150^o .

0.5	

iii. Calcular a equivaléncia en graus do ángulo de $\frac{13\pi}{12}\ rad$.

i. Define-se o radián como o ángulo que determina na circunferéncia un arco de igual lonxitude que o ráio da própria circuunferéncia.

Sabe-se que a circunferéncia mide 360^o e que a sua lonxitude é 2π veces o ráio; logo 360^o equivale a $2\pi\ rad$.



ii. Da equivaléncia anterior podemos estabelecer a seguinte proporción:

$\begin{matrix} 360^o & \rightarrow & 2\pi\ rad \\ 150^o & \rightarrow & x\ rad \end{matrix}$, e polo tanto $x=\frac{2\pi\cdot 150^o}{360^o}\ rad=\frac{5\cdot\pi}{6}\ rad\approx 2,62\ rad$.

iii. $\begin{matrix} 2\pi\ rad & \rightarrow & 360^o \\ \frac{13\pi}{12}\ rad & \rightarrow & x \end{matrix}$, logo $x=\frac{\frac{13\pi}{12}\cdot 360^o}{2\pi}=\frac{4.680^o}{24}=195^o$.

1	

5. i. Explicar brevemente que se entende por redución dun ángulo ao primeiro cuadrante e pór algún exemplo.

1	

ii. Explicar de xeito razonado a que ángulos do primeiro cuadrante poden reducir-se os ángulos de 280^o e 100^o .

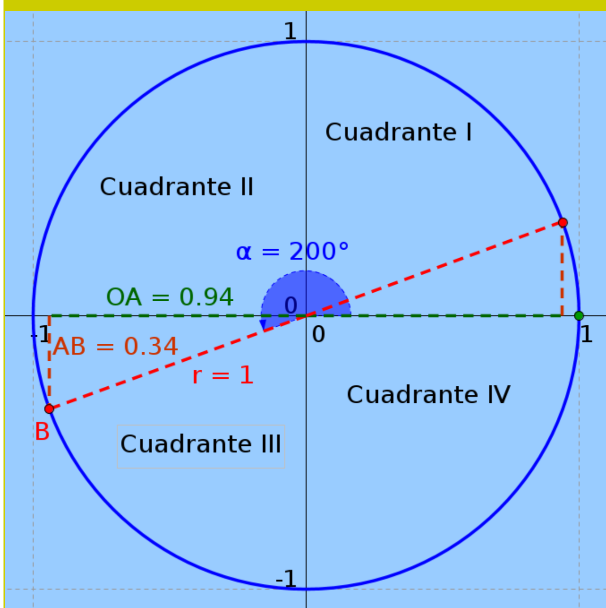
1	

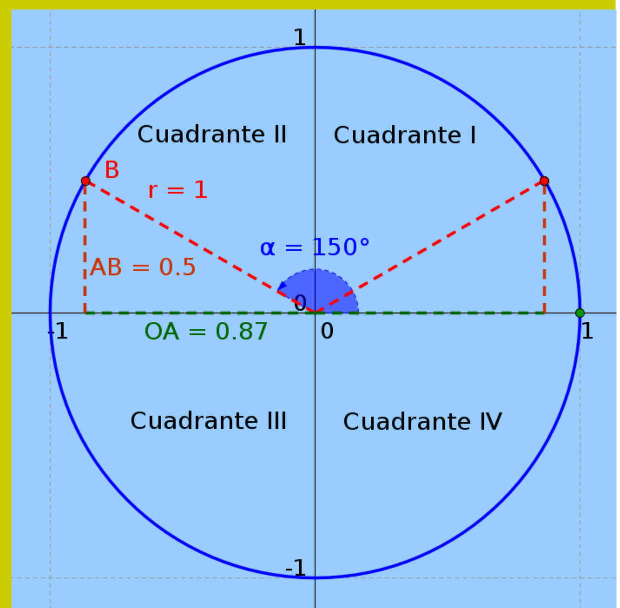
iii. Calcular as razóns trigonométricas (seno, coseno e tanxente) do ángulo de 240^o sabendo que $sen\ 30^o=\frac{1}{2}$.

i. Reducir un ángulo ao primeiro cuadrante significa procurar un ángulo do primeiro cuadrante tal que as suas razóns trigonométricas permitan obter as razóns trigonométricas do ángulo orixinal.

Representando na circunferéncia goniométrica ángulos dos cuadrantes II, III e IV e os seus triángulos característicos, é imediato que se poden atopar ángulos do primeiro cuadrante con igual triángulo característico, que permiten obter as razóns trigonométricas dos ángulos a estudar.

Asi é posíbel coñecer as razóns trigonométricas de calquer ángulo a partir simplesmente das razóns trigonométricas dos ángulos do cuadrante I.





Asi, por exemplo, o ángulo de 150^o pode-se reducir ao de 30^o , de maneira que os senos son iguais e os seus cosenos son opostos: $sen\ 150^o=sen\ 30^o$, $cos\ 150^o=-cos\ 30^o$.

O ángulo de 200^o pode-se reducir ao de 20^o , de xeito que os seus senos e os seus cosenos son opostos: $sen\ 200^o=-sen\ 20^o$, $cos\ 200^o=-cos\ 20^o$.

ii. O ángulo de 280^o pertence ao cuarto cuadrante e faltan-lle 80^o para alcanzar os 360^o ; logo pode ser reducido ao de 80^o , de xeito que os seus senos son opostos, os seus cosenos coinciden e as tanxentes son tamén opostas: $sen\ 280^o=-sen\ 80^o$, $cos\ 280^o=cos\ 80^o$ e $tg\ 280^o=-tg\ 80^o$.

O ángulo de 100^o pertence ao segundo cuadrante e excede 10^o do ángulo recto; logo pode ser reducido ao de 80^o , de xeito que os seus senos son iguais, os cosenos opostos e as tanxentes tamén opostas: $sen\ 100^o=sen\ 80^o$, $cos\ 100^o=-cos\ 80^o$ e $tg\ 100^o=-tg\ 80^o$.

iii. O ángulo de 240^o pertence ao terceiro cuadrante e faltan-lle 30^o para alcanzar o ángulo de 270^o; logo os triángulos característicos determinados por ambos ángulos son iguais, de xeito que $sen\ 240^o=-cos\ 30^o$ e $cos\ 240^o=-sen\ 30^o$.

Polo tanto $cos\ 240^o=-sen\ 30^o=-\frac{1}{2}$

Pola identidade pitagórica:

$$sen^2\ 30^o+cos^2\ 30^o=1 \Leftrightarrow cos^2\ 30^o=1-sen^2\ 30^o=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow cos\ 30^o=\pm\sqrt{\frac{3}{4}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

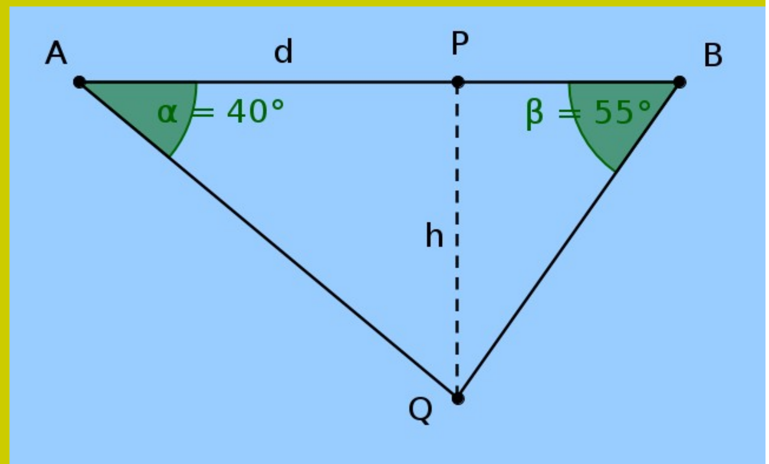
Como o ángulo de 30^o está no primeiro cuadrante, o seu coseno e positivo, logo $cos\ 30^o=\frac{\sqrt{3}}{2}$, e polo tanto $sen\ 240^o=-cos\ 30^o=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Finalmente, $tg\ 240^o=\frac{sen\ 240^o}{cos\ 240^o}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$.

| 2 | |

6. Duas persoas situadas nos extremos dunha ponte sobre o rio observan un bote que pasa por debaixo con ángulos de 40^o e 55^o respectivamente. Calcular a altura da ponte sabendo que a sua loxitude é do $100\ m$.

Se chamamos A e B ás posicións das duas observadoras, P ao ponto da ponte situado sobre o bote e Q á posición do bote, resultan dous triángulos rectángulos $\overset{\triangle}{APQ}$ e $\overset{\triangle}{BPQ}$.



Chamando d á distáncia $\overline{AP}$, resulta que $\overline{AB}=100$ e $\overline{BP}=100-d$.

E chamando h á altura da ponte temos o que segue.

No triángulo $\overset{\triangle}{APQ}$: $tg\ 40^o=\dfrac{h}{d}\ \Leftrightarrow\ h=tg\ 40^o\cdot d$ [1]

E no triángulo $\overset{\triangle}{BPQ}$: $tg\ 55^o=\dfrac{h}{100-d}\ \Leftrightarrow\ h=tg\ 55^o\cdot(100-d)$

Igualando obtemos: $tg\ 40^o\cdot d=tg\ 55^o\cdot(100-d)\ \Leftrightarrow\ tg\ 40^o\cdot d=tg\ 55^o\cdot 100-tg\ 55^o\cdot d\ \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\ (tg\ 40^o+tg\ 55^o)\cdot d=tg\ 55^o\cdot 100\ \Leftrightarrow\ d=\frac{tg\ 55^o\cdot 100}{tg\ 40^o+tg\ 55^o}$$

Substituíndo na ecuación [1] resulta:

$h=tg\ 40^o\cdot d=\dfrac{tg\ 40^o\cdot tg\ 55^o\cdot 100}{tg\ 40^o+tg\ 55^o}\approx 52{,}86\ m$, que é a altura da ponte.