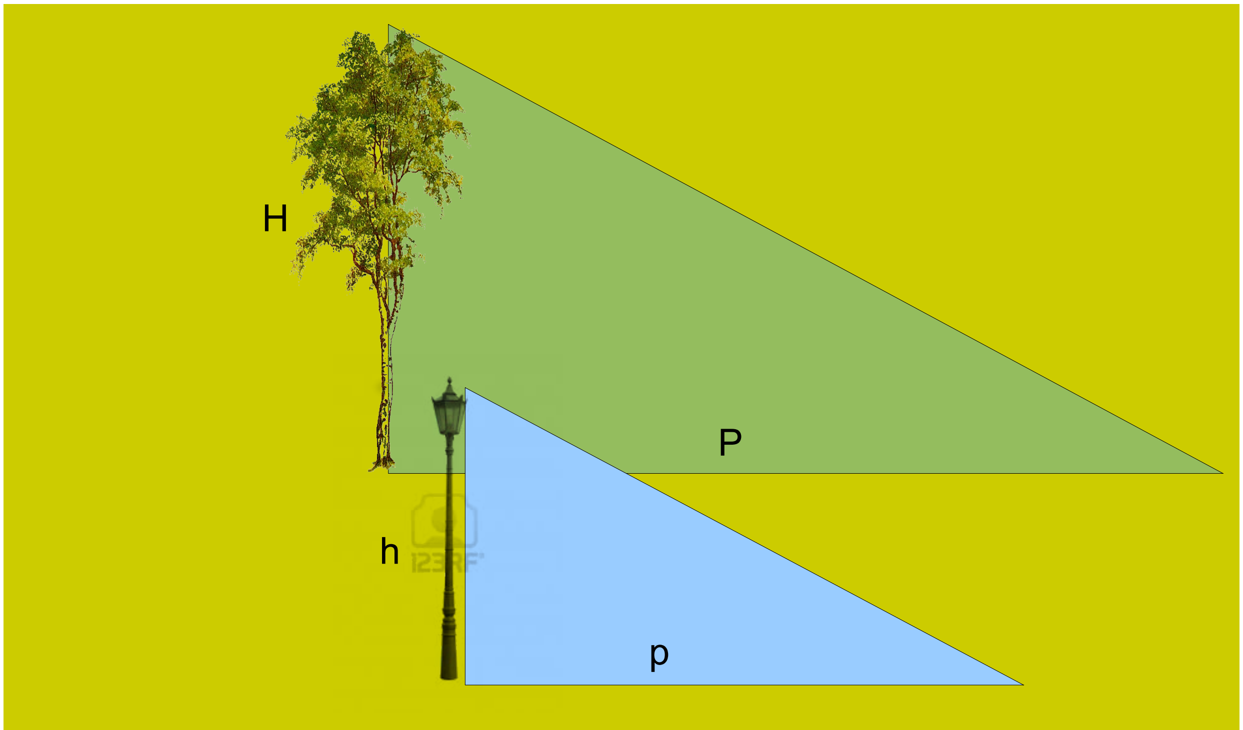
MATEMÁTICA 4º ESO — 20/11/2013

TEMAS 6 SEMELLANZA
7 TRIGONOMETRIA

TOTAL	SUMA	NOTA
11		

NOME	GRUPO A

1 1. Calcular a altura dunha árbore sabendo que a lonxitude da sua sombra é de $20\ m$ mentres nese mesmo intre a sombra proxectada por un farol de $3\ m$ de altura mide $5{,}2\ m$.



Se chamamos P á sombra da árbore e p á do farol, e H e h ás alturas respectivas, por semellanza resulta $\frac{H}{h}=\frac{P}{p}$.

Logo $\frac{H}{3}=\frac{20}{5{,}2} \Leftrightarrow H=\frac{20\cdot 3}{5{,}2}=\frac{60}{5{,}2}\approx 11{,}54\ m$.

1	

2. Temos o plano dunha finca rectangular de escala $1:250$. Calcular a superfície da finca en m^2 sabendo que a superfície no plano é de $500\ cm^2$.

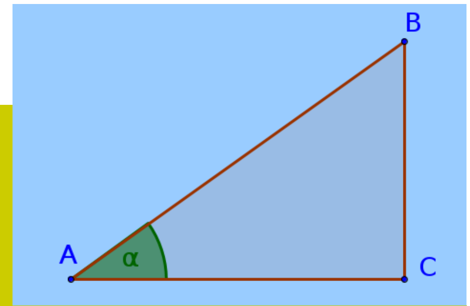
A escala $1:250$ significa que os lados da finca son 250 veces a sua lonxitude no plano, ou sexa, a figura no plano e a finca real son duas figuras semellantes de razón de semellanza $r=250$.

Logo as áreas están en razón o cuadrado de r, asi que a superfície da finca será:

$$S=r^2\cdot 500=250^2\cdot 500=62.500\cdot 500=31.250.000\ cm^2=3.125\ m^2$$

2	

3. Calcular a área e o perímetro do triángulo da figura sabendo que $sen\ \alpha=0{,}6$ and $\overline{AC}=24$.



Pola identidade pitagórica, sabe-se que:

$sen^2\ \alpha+cos^2\ \alpha=1 \Leftrightarrow cos^2\ \alpha=1-sen^2\ \alpha=1-0{,}6^2=1-0{,}36=0{,}64 \Leftrightarrow \cos\ \alpha=\pm\sqrt{0{,}64}=\pm 0{,}8$

Como α é un ángulo do primeiro cuadrante, escollemos o valor positivo, logo $cos\ \alpha=0{,}8$.

Polo tanto: $cos\ \alpha=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{24}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AB}=\frac{24}{cos\ \alpha}=\frac{24}{0{,}8}=30$

Polo Teorema de Pitágoras resulta:

$\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2 \Leftrightarrow \overline{BC}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AC}^2}=\sqrt{30^2-24^2}=\sqrt{324}=18$

O perímetro é $P=\overline{AC}+\overline{BC}+\overline{AB}=24+18+30=72$ e a área, tomando como base o lado $\overline{AC}$ e como altura $\overline{BC}$, é $A=\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{BC}=\frac{1}{2}\cdot 24\cdot 18=216$.

1	
0.5	
0.5	

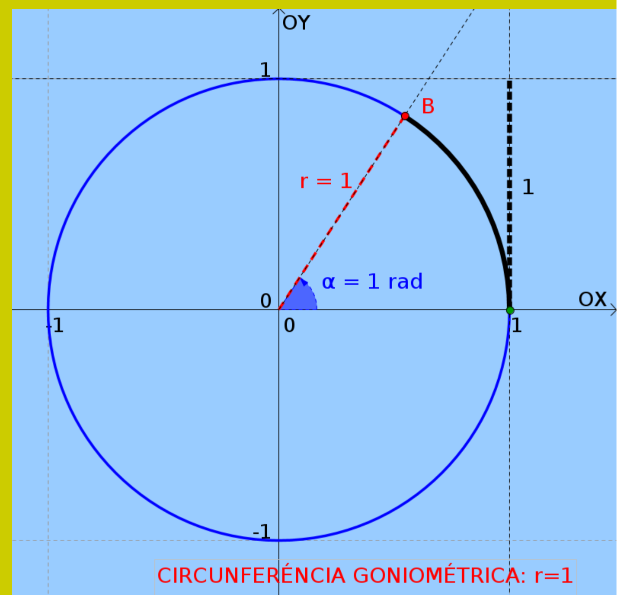
4. i. Explicar brevemente que é un radián e a sua equivaléncia en graus. Apoiar a explicación con un gráfico.

ii. Calcular a equivaléncia en radiáns do ángulo de 195^o .

iii. Calcular a equivaléncia en graus do ángulo de $\frac{5\pi}{6}\ rad$.

i. Define-se o radián como o ángulo que determina na circunferéncia un arco de igual lonxitude que o ráio da própria circuunferéncia.

Sabe-se que a circunferéncia mide 360^o e que a sua lonxitude é 2π veces o ráio; logo 360^o equivale a $2\pi\ rad$.



ii. Da equivaléncia anterior podemos estabelecer a seguinte proporción:

$\begin{matrix} 360^o & \rightarrow & 2\pi\ rad \\ 195^o & \rightarrow & x\ rad \end{matrix}$, e polo tanto $x=\frac{2\pi\cdot 195^o}{360^o}\ rad=\frac{13\cdot\pi}{12}\ rad\approx 3{,}40\ rad$.

iii. $\begin{matrix} 2\pi\ rad & \rightarrow & 360^o \\ \frac{5\pi}{6}\ rad & \rightarrow & x \end{matrix}$, logo $x=\frac{\frac{5\pi}{6}\cdot 360^o}{2\pi}=\frac{1.200^o}{12}=150^o$.

1	

5. i. Explicar brevemente que se entende por redución dun ángulo ao primeiro cuadrante e pór algún exemplo.

1	

ii. Explicar de xeito razonado a que ángulos do primeiro cuadrante poden reducir-se os ángulos de 255^o e 310^o.

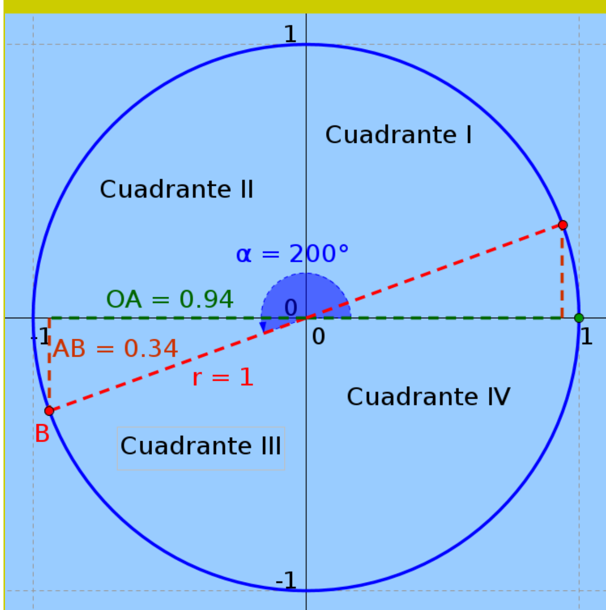
1	

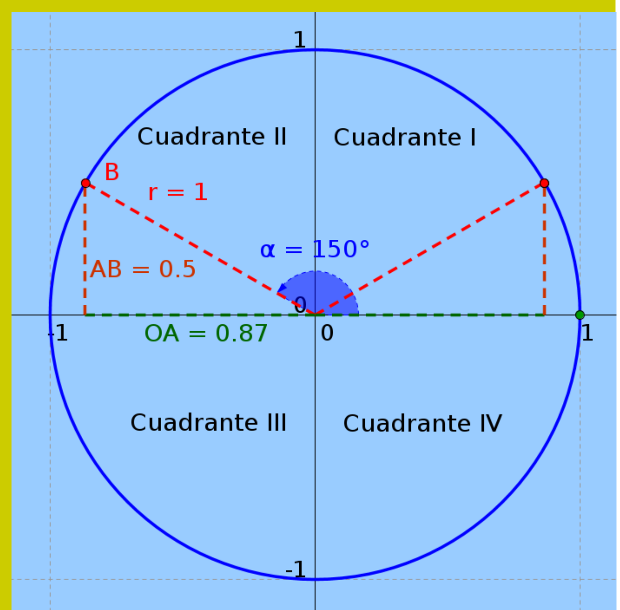
iii. Calcular as razóns trigonométricas (seno, coseno e tanxente) do ángulo de 300^o sabendo que $cos\ 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

i. Reducir un ángulo ao primeiro cuadrante significa procurar un ángulo do primeiro cuadrante tal que as suas razóns trigonométricas permitan obter as razóns trigonométricas do ángulo orixinal.

Representando na circunferéncia goniométrica ángulos dos cuadrantes II, III e IV e os seus triángulos característicos, é imediato que se poden atopar ángulos do primeiro cuadrante con igual triángulo característico, que permiten obter as razóns trigonométricas dos ángulos a estudar.

Asi é posíbel coñecer as razóns trigonométricas de calquer ángulo a partir simplesmente das razóns trigonométricas dos ángulos do cuadrante I.





Asi, por exemplo, o ángulo de 150^o pode-se reducir ao de 30^o, de maneira que os senos son iguais e os seus cosenos son opostos: $sen\ 150^o = sen\ 30^o$, $cos\ 150^o = -cos\ 30^o$.

O ángulo de 200^o pode-se reducir ao de 20^o, de xeito que os seus senos e os seus cosenos son opostos: $sen\ 200^o = -sen\ 20^o$, $cos\ 200^o = -cos\ 20^o$.

ii. O ángulo de 255^o pertence ao terceiro cuadrante e excede 75^o do ángulo de 180^o; logo pode ser reducido ao de 75^o, de xeito que tanto os seus senos como os seus cosenos son opostos e as tanxentes coinciden: $sen\ 255^o = -sen\ 75^o$, $cos\ 255^o = -cos\ 75^o$ e $tg\ 255^o = tg\ 75^o$.

O ángulo de 310^o pertence ao cuarto cuadrante e faltan-lle 50^o para completar os 360^o; da circunferéncia completa; logo pode ser reducido ao de 50^o, de xeito que os seus senos son opostos, os cosenos coinciden e as tanxentes son polo tanto tamén opostas: $sen\ 310^o = -sen\ 50^o$, $cos\ 310^o = cos\ 50^o$ e $tg\ 310^o = -tg\ 50^o$.

iii. O ángulo de 300^o pertence ao cuarto cuadrante e excede 30^o do ángulo de 270^o; logo os triángulos característicos determinados por ambos ángulos son iguais, de xeito que $sen\ 300^o = -cos\ 30^o$, $cos\ 300^o = sen\ 30^o$.

Polo tanto $sen\ 300^o = -cos\ 30^o = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Pola identidade pitagórica:

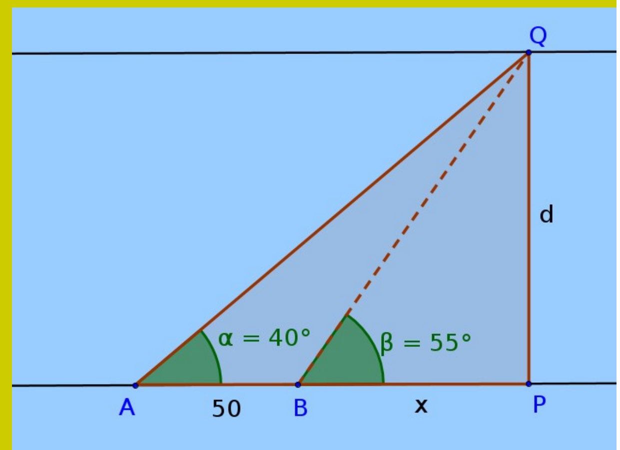
$$sen^2\ 30 + cos^2\ 30 = 1 \Leftrightarrow sen^2\ 30 = 1 - cos^2\ 30 = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow sen\ 30^o = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$$

Como o ángulo de 30^o está no primeiro cuadrante, o seu seno e positivo, logo $sen\ 30^o = \frac{1}{2}$, e polo tanto $cos\ 300^o = sen\ 30^o = \frac{1}{2}$.

Finalmente, $tg\ 300^o = \frac{sen\ 300^o}{cos\ 300^o} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$.

2	

6. Camiñando pola beira dunha estrada recta vemos ao outro lado un sinal con un ángulo de 40^o cara a esquerda do noso sentido da marcha. Se avanzamos $50\ m$ na mesma direción, o ángulo aumenta a 55^o. Calcular a anchura da estrada.



Se chamamos A á nosa primeira posición, B á segunda, Q á posición do sinal, P á posición oposta a Q, d á anchura da estrada e x á distáncia de B a P, nos triángulos rectángulos $\overset{\triangle}{APQ}$ e $\overset{\triangle}{BPQ}$ resulta o que segue.

No primeiro deles temos:

$$tg\ 40^o = \frac{d}{x+50} \Leftrightarrow d = tg\ 40^o \cdot (x+50)$$

E no segundo:

$$tg\ 55^o = \frac{d}{x} \Leftrightarrow d = tg\ 55^o \cdot x \quad [1]$$

Igualando obtemos: $tg\ 55^o \cdot x = tg\ 40^o \cdot (x+50) \Leftrightarrow tg\ 55^o \cdot x - tg\ 40^o \cdot x = tg\ 40^o \cdot 50 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (tg\ 55^o - tg\ 40^o) \cdot x = tg\ 40^o \cdot 50 \Leftrightarrow x = \frac{tg\ 40^o \cdot 50}{tg\ 55^o - tg\ 40^o}$$

Substituíndo na ecuación [1] resulta:

$d = tg\ 55^o \cdot x = \dfrac{tg\ 55^o \cdot tg\ 40^o \cdot 50}{tg\ 55^o - tg\ 40^o} \approx 101,72\ m$, que é a anchura da estrada.