MATEMÁTICAS 4º ESO 15/12/2009

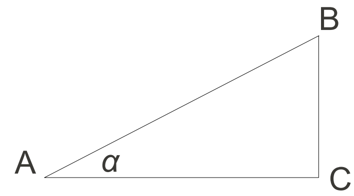
RECUP 7 SEMELLANZA E TRIGONOMETRIA
8 RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS
9 XEOMETRIA ANALÍTICA

TOTAL	SUMA	NOTA
13		

NOME

1 1. i. Calcular o seno, coseno e tanxente de α sabendo que a lonxitude do lado $\overline{BC}$ é a metade da do lado $\overline{AC}$.

1 ii. Calcuar a lonxitude dos lados $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ sabendo que a lonxitude da hipotenusa é 10.



i. Xá que $\overline{BC}=\frac{1}{2}\cdot\overline{AC} \Rightarrow \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{1}{2}$, temos que $tg\ \alpha=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{1}{2}$.

Por Pitágoras temos tamén que:

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2=\left(\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\right)^2+\overline{AC}^2=\frac{1}{4}\cdot\overline{AC}^2+\overline{AC}^2=\frac{5}{4}\cdot\overline{AC}^2 \quad [1].$$

De aquí obtemos que $\overline{AB}=\sqrt{\frac{5}{4}\cdot\overline{AC}^2}=\sqrt{\frac{5}{4}}\overline{AC}=\frac{\sqrt{5}}{2}\overline{AC} \Rightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Asi que $cos\ \alpha=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$ e $sen\ \alpha=\sqrt{1-cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{4}{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Outro xeito de obter o coseno a partir da tanxente é utilizar a fórmula $sec^2\alpha=1+tg^2\alpha$.

ii. Da expresión [1] obtemos:

$$\overline{AB}^2=\frac{5}{4}\cdot\overline{AC}^2 \Rightarrow 10^2=\frac{5}{4}\cdot\overline{AC}^2 \Rightarrow \overline{AC}^2=\frac{4\cdot 100}{5}=80 \Rightarrow \overline{AC}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}.$$

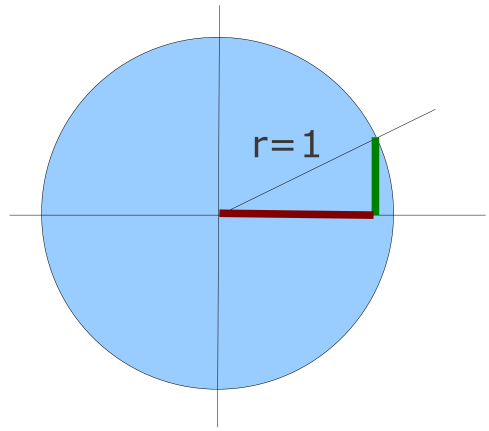
E como $\overline{BC}$ é a metade de $\overline{AC}$, resulta $\overline{BC}=\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{5}=2\sqrt{5}$.

1	
0.5	
0.5	

2. i. Explicar brevemente e aportando exemplos que é a circunferéncia goniométrica e a sua utilidade en relación co cálculo das razóns trigonométricas dun ángulo.
   ii. Explicar que é un radián e como se obtén a sua equivaléncia en graus sexaxesimais.
   iii. Expresar en radiáns o ángulo de amplitude 225^o.

i. The unit circumference is a circumference whose radius equals 1 unit. It's mainly useful because for evaluating the sine and cosine of an angle the only thing we've got to do is graphing the angle and measuring both vertical and horizontal segments of the triangle which hypotenuse is the side of our angle. As the hypotenuse equals 1, the vertical segment equals the sine and the horizontal segment equals the cosine.

The green side equals the sine of the angle.
The red side equals the its cosine.



ii. Radian is the measurement of an angle whose arch length on the circumference equals the radius length.

The equivalence is that the whole circumference measures 360^o degrees or also 2π radians, and since this we have the following relationship:

$$\begin{array}{rcl} 2\pi \ \ radians & \rightarrow & 360^o \\ 1 \ \ radian & \rightarrow & x \end{array}$$, and therefore $x=\frac{1\cdot 360^o}{2\pi}\approx\frac{360^o}{6,28}\approx 57^o\ 17'\ 45''$.

iii. $$\begin{array}{rcl} 360^o & \rightarrow & 2\pi \ \ radians \\ 225^o & \rightarrow & x \ \ radians \end{array}$$, and therefore $x=\frac{2\pi\cdot 225^o}{360^o}\approx\frac{6,28\cdot 225^o}{360^o}\approx 3,93\, rad$.

1 | | 3. i.Asociar cada un dos seguintes ángulos con algun ángulo do primeiro cuadrante de forma que as suas razóns trigonométricas estexan relacionadas, indicando a relación existente entre esas razóns (só seno e coseno): 225^o , $\frac{5\cdot\pi}{6}$, 340^o .

1 | | ii.Calcular o seno, coseno e tanxente do ángulo de 250^o sabendo que $sen\ 20^o = 0{,}34$.

i. 225^o is laying on the 3rd quadrant and it can be reduced to the angle of 45^o ; where $\sin 225^o = -\sin 45^o$ and $\cos 225^o = -\cos 45^o$.

$\frac{5\cdot\pi}{6} = 150^o$ is laying on the 2nd quadrant and it can be reduced to the angle of 30^o ; where $\sin 150^o = \sin 30^o$ and $\cos 150^o = -\cos 30^o$.

315^o is laying on the 4th quadrant and it can be reduced to the angle of 45^o ; where $\sin 315^o = -\sin 45^o$ and $\cos 315^o = \cos 45^o$.

ii. When we graph both 250^o and 20^o angles we realize that their characteristic triangles on the unit circumference are similar. So the height corresponding to the sine of 250^o equals the lenght corresponding to the cosine of 20^o , and since both sides are opposite we can state that: $\sin 250^o = -\cos 20^o$.

Also the lenght corresponding to the cosine of 250^o equals the height corresponding to the sine of 20^o , also opposite, and so: $\cos 250^o = -\sin 20^o = -0{,}34$.

Finally we can solve $\cos 20^o$ from the Pythagorean identity: $\cos^2 20^o + \cos^2 20^o = 1 \Rightarrow \cos 20^o = \sqrt{1 - \sin^2 20^o} = \sqrt{1 - 0{,}34^2} \approx 0{,}94$

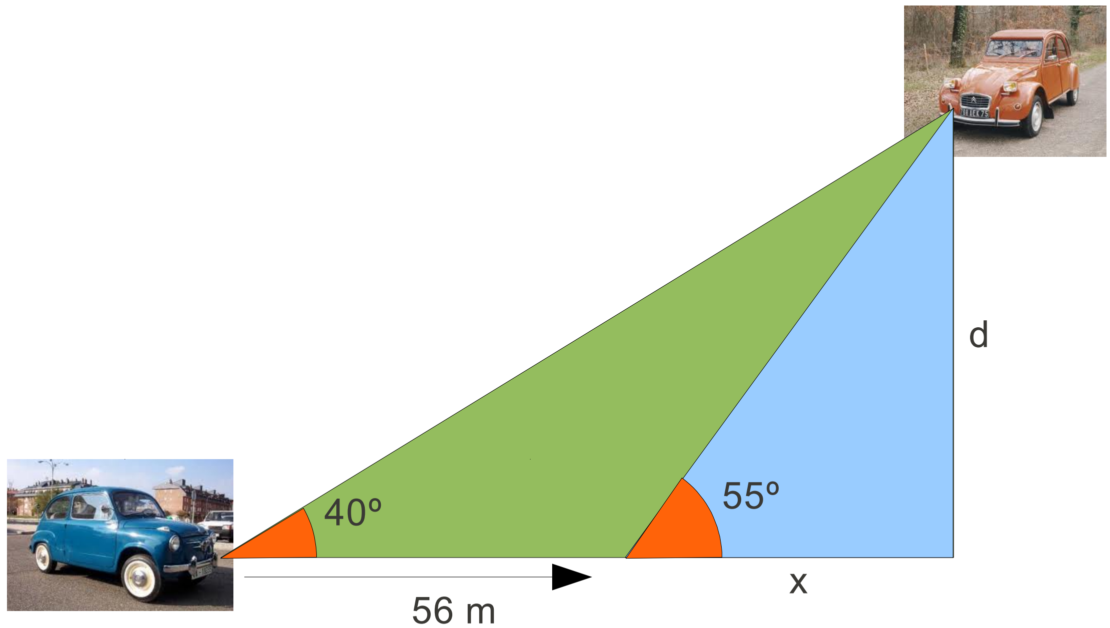
Therefore $\sin 250^o = -\cos 20^o \approx -0{,}94$

1 | 4. Demostrar a identidade trigonométrica $\cos^3\alpha + \cos\alpha \cdot sen^2\alpha = \cos\alpha$.

$$\cos^3\alpha + \cos\alpha \cdot sen^2\alpha = \cos\alpha \Leftrightarrow \cos^3\alpha + \cos\alpha \cdot (1 - \cos^2\alpha) = \cos\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^3\alpha + \cos\alpha - \cos^3\alpha = \cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \cos\alpha$$ q.e.d.

1.5 5. Un veículo está parado á beira da autoestrada e, con un ángulo de 40^o á esquerda do sentido da circulación, divisa outro que está parado na outra beira. Cando o primeiro veículo avanza $56\ m$ o ángulo pasa a ser de 55^o. Calcular a anchura da autoestrada.



For the tangents of the two angles, we have the following system of two equations in two unknowns d and h:

$$\begin{cases} tg\,40^o = \dfrac{d}{x+56} \\ tg\,55^o = \dfrac{d}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = (x+56)\cdot tg\,40^o \\ d = x\cdot tg\,55^o \end{cases}$$

And therefore: $\begin{cases} tg\,40^o = \dfrac{d}{x+56} \\ tg\,55^o = \dfrac{d}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = (x+56)\cdot tg\,40^o \\ d = x\cdot tg\,55^o \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ 56\cdot tg\,40^o = x\cdot tg\,55^o - x\cdot tg\,40^o \ \Leftrightarrow\ 56\cdot tg\,40^o = x\cdot(tg\,55^o - tg\,40^o)\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ x = \frac{56\cdot tg\,40^o}{tg\,55^o - tg\,40^o} \approx \frac{56\cdot 0{,}84}{1{,}43-0{,}84} \approx \frac{46{,}99}{0{,}59} \approx 79{,}77\ m$$

And then the distance is $d = x\cdot tg\,55^o \approx 79{,}77\cdot 1{,}43 \approx 113{,}93\ m$

1		6. i. Dar un vector director e a pendente da recta r que pasa polo ponto $A(-2,3)$ e ten ordenada na orixen 2.
1		ii. Obter a ecuación explícita dunha recta s paralela á anterior e que pase pola orixen de coordenadas.

i. A recta r terá ecuación $r \equiv y = mx + b$, onde a ordenada na orixen será $b = 2$.

Polo tanto temos $y = mx + 2$ e como o ponto $A(-2,3) \in r$, resulta $3 = m(-2) + 2$, de onde obtemos a pendente $m = \frac{2-3}{2} = -\frac{1}{2}$.

A recta será polo tanto $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

Para obter un vector director podemos escoller calquer outro ponto $B(x, y) \in r$ e calcular as coordenadas do vector $\overrightarrow{AB}$.

Escollendo, por exemplo, $x = 0$, obtemos $y = -\frac{1}{2} \cdot 0 + 2 = 2$, asi que $B(0,2) \in r$ e o vector director será $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (0,2) - (-2,3) = (2,-1)$.

ii. A recta paralela a r terá a mesma pendente, asi que a sua ecuación explícita será $s \equiv y = -\frac{1}{2}x + b_s$ e como a orixen de coordenadas $O(0,0) \in s$ resulta:

$0 = -\frac{1}{2} \cdot 0 + b_s \Leftrightarrow b_s = 0$, de xeito que temos $s \equiv y = -\frac{1}{2}x$.

1 7. Estudar a posición relativa das rectas $r \equiv 4x-2y=5$ e $s \equiv y=2x+4$ e obter o ponto de intersección, no caso de que sexan secantes.

Expresando as duas rectas en forma explícita, resulta $r \equiv y=2x-\dfrac{5}{2}$ e $s \equiv y=2x+4$.

Fica claro que ao teren a mesma pendente $m_r=m_s=2$ e diferente ordenada na orixen $b_r=-\dfrac{5}{2}$ e $b_s=4$, as rectas son paralelas e distintas.

Nota: Hai várias formas diferentes de razonar este paralelismo, por exemplo, resolvendo o sistema formado polas duas ecuacións ou comparando os coeficientes das ecuacións xerais de ambas rectas.

Ao seren paralelas non ten sentido calcular o seu ponto intersección, porque non existe.

En calquer caso, se intentamos resolver o sistema $\begin{cases} y=2x-\dfrac{5}{2} \\ y=2x+4 \end{cases}$ polo método de igualación, que neste caso é o mais evidente, resulta $2x-\dfrac{5}{2}=2x+4 \Leftrightarrow -\dfrac{5}{2}=4$. Como isto último é falso, concluímos que o sistema non ten solución, ou equivalentemente, que as rectas nonn se cortan, o que volve confirmar o que xá sabiamos: que $r \parallel s$.

8. Dado o segmento $\overline{AB}$, con $A(-4,1)$ e $B(-2,5)$:

0.5	
0.5	
0.5	

i. calcular a lonxitude do segmento $\overline{AB}$;

ii. obter as coordenadas do ponto C tal que o vector $\overrightarrow{AB}$ e o vector $\overrightarrow{CD}$ sexan equipolentes, onde $D(3,-2)$;

iii. obter as coordenadas dos pontos P e Q que dividen $\overline{AB}$ en trés partes iguais.

i. A lonxitude do segmento $\overline{AB}$ coincide co módulo do vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-2,5)-(-4,1)=(2,4) \text{ e } |\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20} .$$

ii. Os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ serán equipolentes se as suas coordenadas coinciden.

Como $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$ resulta que:

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{AB}=(3,-2)+(2,4)=(5,2) .$$

iii. Os pontos P e Q que dividen ao segmento $\overline{AB}$ en trés partes serán:

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=(-4,1)+\frac{1}{3}(2,4)=\left(-\frac{10}{3},\frac{7}{3}\right) \Rightarrow P\left(-\frac{10}{3},\frac{7}{3}\right)$$
$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=(-4,1)+\frac{2}{3}(2,4)=\left(-\frac{8}{3},\frac{11}{3}\right) \Rightarrow Q\left(-\frac{8}{3},\frac{11}{3}\right)$$

Mínimos 4º ESO

☐	*Área e perímetro de cuadrados, rectángulos e triángulos*	FICHA	☐	*Uso de parénteses*	FICHA	☐	*Raices; extracción de factores*	FICHA
☐	*Operacións con fraccións e decimais*	FICHA	☐	*Suma, resta, multiplicación e división de números naturais*	FICHA	☐	*Igualdades notábeis*	FICHA
☐	*Regra dos signos*	FICHA	☐	*Poténcias de exponente natural e propriedades*	FICHA	☐	*Álxebra de polinómios*	FICHA
☐	*Operacións con números inteiros*	FICHA	☐	*Área e perímetro do círculo*	FICHA			
☐	*Cálculo do MCD e mcm*	FICHA	☐	*Poténcias de exponente inteiro*	FICHA			

DESCONTA RECUPERA