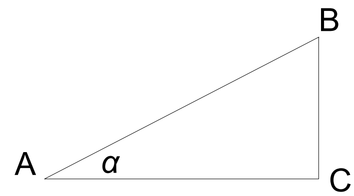
MATEMÁTICAS 4º ESO 09/12/2009

TOTAL	SUMA	NOTA
13		

TEMAS 7 SEMELLANZA E TRIGONOMETRIA
8 RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS
9 XEOMETRIA ANALÍTICA

NOME



0.5 1. i.Dado o triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$, indicar como se obteñen as razóns trigonométricas* do ángulo α.

1 ii.Calcular as razóns trigonométricas* de α sabendo que $\overline{BC} = 4$ e que $\overline{AC} = 8$.

i. $sen\ \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$, $cos\ \alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ e $tg\ \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$.

ii.Do Teorema de Pitágoras obtemos:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} = 4\cdot\sqrt{5}$$

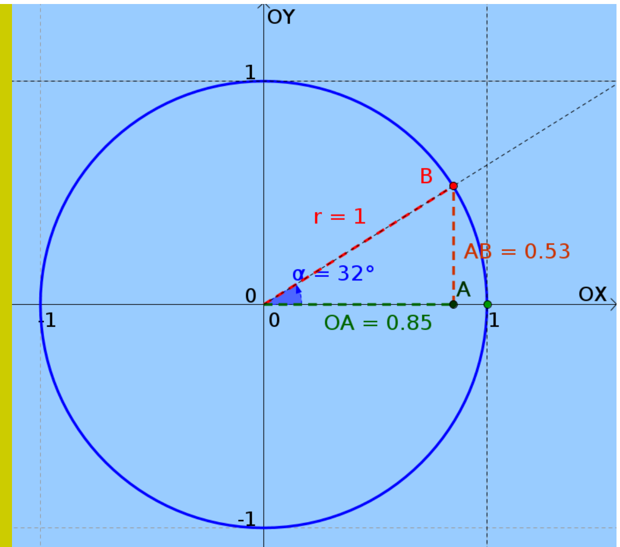
Polo tanto $sen\ \alpha = \frac{4}{4\cdot\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $cos\ \alpha = \frac{8}{8\cdot\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\cdot\sqrt{5}}{5}$ e $tg\ \alpha = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

1		2. i.Explicar brevemente que é a circunferéncia goniométrica e a sua utilidade en relación co cálculo das razóns trigonométricas dun ángulo. Pór algun exemplo.
0.5		ii.Explicar que é un radián e como se obtén a sua equivaléncia en graus sexaxesimais.
0.5		iii.Expresar en radiáns o ángulo de amplitude 270^o .

i.Chama-se circunferéncia goniométrica á que ten ráio igual a 1 unidade. Resulta especialmente útil no campo da trigonometria porque para calcular as razóns trigonométricas dun ángulo é abondo con representar o ángulo e construir o triángulo $\overset{\Delta}{OAB}$.

Asi, por definición $sen\ \alpha=\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}$ e $cos\ \alpha=\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$, e como $\overline{OB}=r=1$ resulta $sen\ \alpha=\frac{\overline{AB}}{1}=\overline{AB}$ e $cos\ \alpha=\frac{\overline{OA}}{1}=\overline{OA}$.

Logo na circunferéncia goniométrica, o seno coincide co lado $\overline{AB}$ e o coseno co lado $\overline{OA}$.

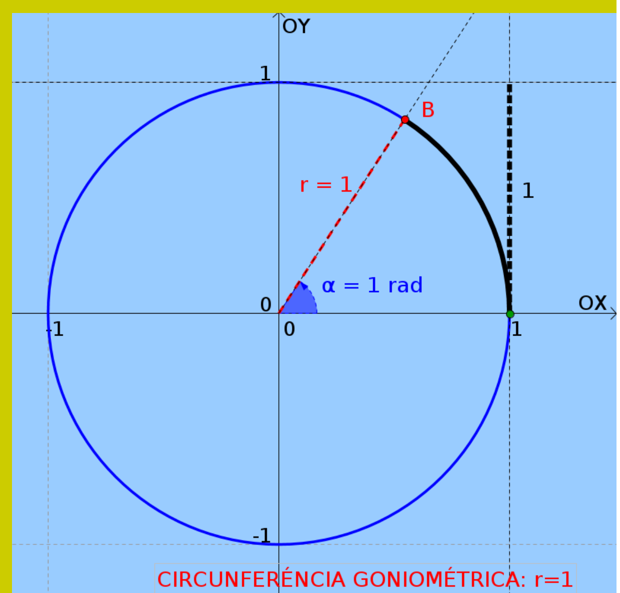


ii.Chama-se radián á medida da amplitude do ángulo que determina sobre a circunferéncia un arco igual ao seu ráio.

Como o perímetro da circunferéncia é $P=2\pi r$, se traballamos coa circunferéncia goniométrica resulta que o arco que se corresponde co ángulo completo de 360^o é $P=2\pi r=2\pi\cdot 1=2\pi\approx 6,28$.

Logo obtemos a equivaléncia $2\pi\ rad\ =\ 360^o$, e de aí que podamos transformar a medida de calquer ángulo de graus a radiáns e vice-versa.

En particular $\begin{matrix} 2\pi\ rad & \rightarrow & 360^o \\ 1\ rad & \rightarrow & x \end{matrix}$, logo $x=\frac{1\cdot 360^o}{2\pi}\approx\frac{360^o}{6,28}\approx 57^o\ 17'\ 45''$, que é a equivaléncia en graus do ángulo de $1\ rad$.



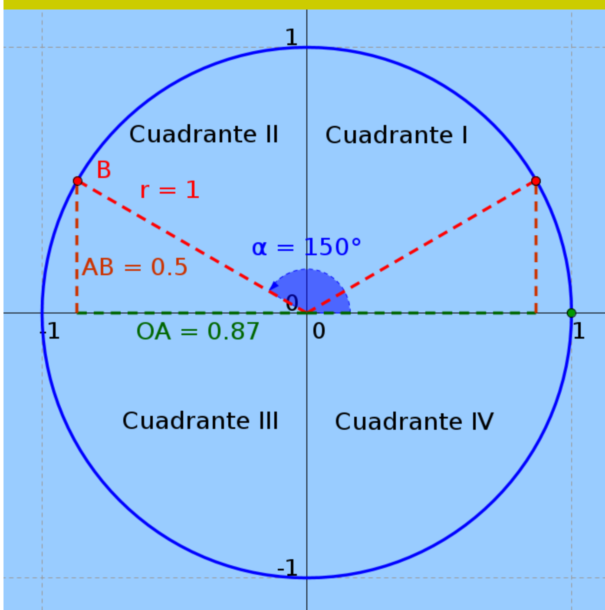
iii. $\begin{matrix} 360^o & \rightarrow & 2\pi\ rad \\ 270^o & \rightarrow & x\ \ rad \end{matrix}$, logo $x=\frac{2\pi\cdot 270^o}{360^o}\approx\frac{6,28\cdot 270^o}{360^o}\approx 4,71\ rad$.

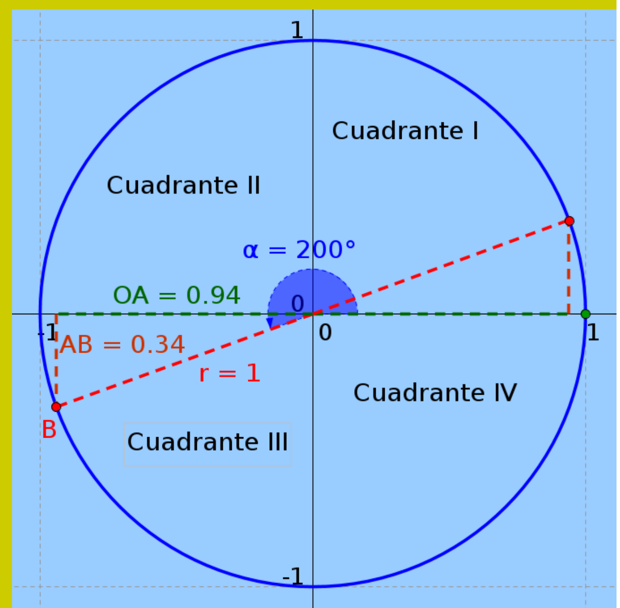
1		3. i.Que se entende por redución dun ángulo ao primeiro cuadrante? Pór exemplos de redución de ángulos do II, III e IV cuadrantes ao primeiro.
1		ii.Calcular as razóns trigonométricas* do ángulo de 110^o sabendo que $sen\ 20^o=0,34$.

i.Reducir un ángulo ao primeiro cuadrante sigifica procurar un ángulo do primeiro cuadrante tal que as suas razóns trigonométricas permitan obter as razóns trigonométricas do ángulo orixinal.

Representando na circunferéncia goniométrica ángulos dos cuadrantes II, III e IV e os seus triángulos característicos, é imediato que se poden atopar ángulos do primeiro cuadrante con igual triángulo característico, que permiten obter as razóns trigonométricas dos ángulos a estudar.

Asi é posíbel coñecer as razóns trigonométricas de calquer ángulo a partir simplesmente das razóns trigonométricas dos ángulos do cuadrante I.





ii. Ao representarmos os ángulos de 110^o e de 20^o é imediato que os seus triángulos característicos son iguais, logo $cos\ 110^o=sen\ 20^o$ e $sen\ 110^o=cos\ 20^o$.

Polo tanto $cos\ 110^o=-sen\ 20^o=-0,34$.

Sabemos pola identidade pitagórica que $sen^2\ 110^o+cos^2\ 110^o=1$, logo:

$$sen^2\ 110^o=1-cos^2\ 110^o=1-(-0,34)^2\approx 1-0,12=0,88 \Leftrightarrow sen\ 110^o=\pm\sqrt{0,88}\approx\pm 0,94 .$$

Finalmente, como o ángulo de 110^o pertence ao segundo cuadrante, no que o seno é positivo, das duas solucións para o seno escollemos a positiva, asi que $sen\ 110^o=0,94$.

A tanxente é o cociente do seno e o coseno, logo $tg\ 110^o=\dfrac{sen\ 110^o}{cos\ 110^o}=\dfrac{0,94}{-0,34}\approx -2,75$.

0.5		4. i.Expór brevemente a diferenza entre unha ecuación trigonométrica e unha identidade trigonométrica.
1		ii.Resolver a ecuación trigonométrica $4\cdot sen\ x=csc\ x$.

i.Ecuacións e identidades trigonométricas son expresións nas que aparecen as razóns trigonométricas de un ou vários ángulos. A diferenza entre uhas e outras é que as identdades trigonométricas son certas para calquer ángulo e as ecuacións trigonométricas poden ser certas ou falsas dependendo do ángulo ou ángulos aos que se refiran.

Por ese motivo non ten sentido ˝resolver˝ unha identidade trigonométrica e si que o ten resolver as ecuacións trigonométricas.

A identidade pitagórica é unha identidade, xá que sexa cal sexa o ángulo, sempre se verifica que $sen^2\ x+cos^2\ x=1$.

A igualdade $sen\ x=cos\ x$ é unha ecuación, porque non é certa en xeral, agás para alguns ángulos en particular.

$sen\ x=cos\ x \Leftrightarrow \frac{sen\ x}{cos\ x}=1 \Leftrightarrow tg\ x=1 \Leftrightarrow x=45^o+k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$. Logo a igualdade é certa para as bisectrices do primeiro e terceiro cuadrantes.

ii. $4\cdot sen\ x=csc\ x \Leftrightarrow 4\cdot sen\ x=\frac{1}{sen\ x} \Leftrightarrow sen^2\ x=\frac{1}{4} \Leftrightarrow sen\ x=\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\pm\frac{1}{2}$

Logo hai duas posibilidades, correspondentes a ángulos do primeiro e do segundo cuadrantes:

$$sen\ x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=asen\frac{1}{2}=30^o+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$sen\ x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=asen\left(-\frac{1}{2}\right)=150^o+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$$

1.5 5. Calcular a altura dunha torre se desde certo lugar vemos o seu extremo superior con un ángulo de elevación de $40º$ e ao achegar-nos $30\ m$ este ángulo pasa a ser de $55º$.

Se chamamos x á distáncia desde a primeira posición en que divisamos a torre e a sua base e h á altura da torre, resultan dous triángulos rectángulos de bases x e $x-30$ respectivamente e alturas h , e de ángulos $40º$ e $55º$.

Utilizando a tanxente destes ángulos, na primeira posición obtemos $tg\,40º=\frac{h}{x}$.

De igual xeito na segunda posición resulta $tg\,55º=\frac{h}{x-30}$.

Resolvendo a altura en ambos triángulos temos que $h=x\cdot tg\,40º$ e $h=(x-30)\cdot tg\,55º$.

Igualando ambas expresións resulta a ecuación $x\cdot tg\,40º=(x-30)\cdot tg\,55º$.

E resolvendo: $x\cdot tg\,40º=(x-30)\cdot tg\,55º \Leftrightarrow x\cdot tg\,40º-x\cdot tg\,55º=-30\cdot tg\,55º \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x\cdot(tg\,55º-tg\,40º)=30\cdot tg\,55º \Leftrightarrow x=\frac{30\cdot tg\,55º}{tg\,55º-tg\,40º}\approx 72{,}74$$

Finalmente obtén-se o valor de h : $h=x\cdot tg\,40º\approx 72{,}74\cdot tg\,40º\approx 61{,}03\ m$, que é a altura da torre.

1 6. i. Dar un vector director e a ecuación explícita da recta r que pasa polos pontos $A(-2{,}3)$ e $B(3{,}4)$.

1 ii. Indicar cal é a pendente e a ordenada na orixen da recta e explicar o significado xeométrico destes dous elementos.

i. O vector $\overline{AB}$ é un vector director da recta; logo escollendo un dos dous pontos e o vector $\overline{AB}$ podemos ter a ecuación da recta $r(A,\overline{AB})$:

$$\overline{AB}=(3,4)-(-2,3)=(5,1)$$

$$r\equiv y-3=\frac{4}{3}\cdot(x-(-2)) \Leftrightarrow y-3=\frac{4}{3}\cdot(x+2) \Leftrightarrow y=\frac{4}{3}\cdot(x+2)+3 \Leftrightarrow y=\frac{4}{3}\cdot x+\frac{8}{3}+3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{4}{3}\cdot x+\frac{17}{3}$$

ii. Chama-se pendente dunha recta ao incremento de y correspondente a un incremento de x nunha unidade. Representa-se normalmente pola letra m e interpreta-se xeometricamente como a inclinación da recta, ou de xeito mais preciso, a tanxente do ángulo que forma a recta co semieixo positivo OX.
Chama-se ordenada na orixen á ordenada do ponto no que a recta corta ao eixo OY, e representa-se normalmente pola letra b e xeometricamente interpreta-se como a altura á que a recta corta ao eixo OY.

No caso da recta anterior, expresada en forma de ecuación explícita, a pendente é o coeficiente de x e a ordenada na orixen é o termo independente: $m=\frac{4}{3}$ e $b=\frac{17}{3}$.

1		7. Estudar a posición relativa das rectas $r \equiv 3x+4y=5$ e $s \equiv y=2x+4$ e obter o ponto de intersección, no caso de que sexan secantes.

Expresando as duas rectas na mesma forma, por exemplo, en forma implícita, obtemos:

$r \equiv 3x+4y=5$ e $s \equiv y=2x+4 \equiv 2x-y=-4$.

Comparando agora os coeficientes de x e y, resulta $\frac{3}{2} \neq \frac{4}{-1}$, e polo tanto son duas rectas que se cortan.

De outra xeito, calculando as pendentes de ambas rectas obtemos:

$$r \equiv 3x+4y=5 \Leftrightarrow y=\frac{-3x+5}{4}=-\frac{3}{4}\cdot x+\frac{5}{4}$$

$$s \equiv y=2x+4 .$$

Logo son duas rectas de pendentes $m_1=-\frac{3}{4}$ e $m_2=2$, e por seren diferentes as rectas cortan-se.

Para obter o ponto interseción resolvemos o sistema, polo método de igualación (por exemplo):

$$-\frac{3}{4}\cdot x+\frac{5}{4}=2x+4 \Leftrightarrow -3x+5=8x+16 \Leftrightarrow -11x=11 \Leftrightarrow x=-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=2x+4=2\cdot(-1)+4=-2+4=2$$

Logo as rectas cortan-se no ponto de coordenadas $A(-1,2)$.

1.5 8. Un romboide ten trés vértices nos pontos $A(-5,1)$, $B(-2,5)$ e $C(2,5)$. Calcular o cuarto vértice e a lonxitude da diagonal $\overline{AC}$.

Por ser un romboide ten os seus lados paralelos dous a dous; logo, se chamamos D ao cuarto vértice, resulta que os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DC}$ son equipolentes, logo teñen as mesmas coordenadas, asi que $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{AB}$ [1]

Como $\overrightarrow{AB}=(-2,5)-(-5,1)=(3,4)$, en [1] resulta $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{AB}=(2,5)-(3,4)=(-1,1)$, asi que o vértice que falta é $D(-1,1)$.

A lonxitude da diagonal $\overline{AC}$ é o módulo do vector $\overrightarrow{AC}$, asi que:

$$\overrightarrow{AC}=(2,5)-(-5,1)=(7,4) \Rightarrow |\overrightarrow{AC}|=\sqrt{7^2+4^2}=\sqrt{49+16}=\sqrt{65}\approx 8,06$$