MATEMÁTICA 4º ESO 25/05/2016

TEMAS 3 POLINÓMIOS E FRACIÓNS ALXÉBRICAS

4 ECUACIÓNS E SISTEMAS



| NOME | GRUPO 4º ESO |
|---|---|

0. Expresión escrita / expresión matemática / presentación

1 — 1. i.Enunciado do Teorema do Resto.

1 — ii.Dado o polinómio $p(x)=x^{12}-3x^3+2x$, calcular o resto de dividir $p(x)$ entre $x+1$.

1 — iii.Obter o valor de $k$ para que $x-\frac{1}{2}$ sexa un factor do polinómio $p(x)=x^3+kx-4$.

i.O Teorema do Factor afirma que:
Dado un polinómio $p(x)$ e un número real $a\in\mathbb{R}$, o resto de dividir $p(x)$ entre $x-a$ coincide co valor numérico de $p(x)$ para $x=a$, é dicer, coincide con $p(a)$.

ii.Utilizando o teorema anterior, resulta que o resto pedido coincide co valor numérico $p(-1)$; polo tanto: $p(-1)=(-1)^{12}-3\cdot(-1)^3+2\cdot(-1)=1+3-2=2$.
Asi que o resto da división é $2$.
[Nota: debe-se observar que o cálculo do resto de xeito directo, ou sexa, facendo a división, resulta neste caso muito mais laborioso.]

iii.Para que $x-\frac{1}{2}$ sexa factor de $p(x)$ é necesário e suficiente que $p\left(\frac{1}{2}\right)=0$, logo:

$$p\left(\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^3+k\cdot\frac{1}{2}-4=0 \Leftrightarrow \frac{1}{8}+\frac{k}{2}-4=0 \Leftrightarrow 1+4k-16=0 \Leftrightarrow 4k=15 \Leftrightarrow k=\frac{15}{4}$$

1.5 — 2. Factorizar o polinómio $p(x)=-4x^7+32x^5-64x^3$, explicando os métodos utilizados, e indicar cales son as suas raíces.

Extraendo en primeiro lugar factor común resulta:

$$-4x^7+32x^5-64x^3=-4x^3\cdot(x^4-8x^2+16)$$

Ademais, utilizando as identidades notábeis temos que $x^4-8x^2+16=(x^2-4)^2$, e como $x^2-4=(x-2)\cdot(x+2)$ resulta $x^4-8x^2+16=(x^2-4)^2=[(x-2)\cdot(x+2)]^2=(x-2)^2\cdot(x+2)^2$.

Logo finalmente a factorización é:
$-4x^7+32x^5-64x^3=-4x^3\cdot(x^4-8x^2+16)=-4x^3\cdot(x-2)^2\cdot(x+2)^2$.

As raíces son $0$ (que actua con multiplicidade $3$), $2$ e $-2$ (ambas con multiplicidade $2$).

| 1 | | 3. Obter un polinómio de terceiro grau que teña coeficiente principal $-2$ e raíces $1$, $-1$ e $3$.

O polinómio será $p(x)=-2\cdot(x-1)(x+1)(x-3)=-2x^3+6x^2+2x-6$.

| 1.5 | | 4. Reducir a expresión racional $\left(\frac{x+1}{x^2-x}-\frac{1}{x}\right):\left(1+\frac{2}{x-1}\right)$ a unha única fración irreducíbel.

$$\left(\frac{x+1}{x^2-x}-\frac{1}{x}\right):\left(1+\frac{2}{x-1}\right)=\left(\frac{x+1}{x\cdot(x-1)}-\frac{1}{x}\right):\left(1+\frac{2}{x-1}\right)=\frac{x+1-(x-1)}{x\cdot(x-1)}:\frac{x-1+2}{x-1}=$$

$$=\frac{2}{x\cdot(x-1)}:\frac{x+1}{x-1}=\frac{2\cdot(x-1)}{x\cdot(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{2}{x\cdot(x+1)}$$

| 1.5 | | 5. Resolver a ecuación $5-\sqrt{x+11}=x+4$ e comprobar as solucións.

$$5-\sqrt{x+11}=x+4 \Leftrightarrow 1-x=\sqrt{x+11} \Rightarrow 1-2x+x^2=x+11 \Leftrightarrow x^2-3x-10=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot(-10)}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{9+40}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{3\pm7}{2}$$

Logo hai duas solucións posíbeis: $x_1=\frac{3+7}{2}=5$ e $x_2=\frac{3-7}{2}=-2$

Para $x=5$, no 1º membro temos $5-\sqrt{11+5}=5-\sqrt{16}=5-4=1$ e no 2º membro $5+4=9$.

$1\neq9 \Rightarrow x=5$ debe rexeitar-se.

Para $x=-2$ temos no 1º membro $5-\sqrt{4+5}=5-\sqrt{9}=5-3=2$ e no 2º membro $-2+4=2$.

Admite-se polo tanto a solución $x=-2$ e rexeita-se $x=5$.

| 1.5 | |
|---|---|

6. Resolver o sistema $\begin{cases} x+2y^2=2 \\ 3x-8y=-2 \end{cases}$.

Podemos resolver $x$ na primeira ecuación: $x+2y^2=2 \Leftrightarrow x=2-2y^2$

E substituíndo na segunda ecuación obtemos:

$$3\cdot(2-2y^2)-8y=-2 \Leftrightarrow 6-6y^2-8y=-2 \Leftrightarrow -6y^2-8y+8=0 \Leftrightarrow 3y^2+4y-4=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot3\cdot(-4)}}{6}=\frac{-4\pm\sqrt{16+48}}{6}=\frac{-4\pm\sqrt{64}}{6}=\frac{-4\pm8}{6}$$

Logo $y_1=\frac{-4+8}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ e $y_2=\frac{-4-8}{6}=-\frac{12}{6}=-2$.

Para $y=\frac{2}{3}$ obtemos $x=2-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=2-2\cdot\frac{4}{9}=2-\frac{8}{9}=\frac{10}{9}$.

E para $y=-2$ obtemos $x=2-2\cdot(-2)^2=2-2\cdot4=2-8=-6$.

As duas solucións son $x=\frac{10}{9}$, $y=\frac{2}{3}$ e $x=-6$, $y=-2$, que tamén se poden expresar da forma $\left(\frac{10}{9},\frac{2}{3}\right)$ e $(-6,-2)$.