MATEMÁTICA 4º ESO 08/03/2016

REC
- □ 1º TRIM. SEM & TRIG EXS 1-6 (9 PTOS)
- □ 2º TRIM. NUM REAIS & RAD EXS 7-14 (9 PTOS)
- □ TODO 1º TRIM. EXCS 1, 3, 5, 6 (6 PTOS)
  2º TRIM. EXCS 8, 9, 10, 12, 13, 14 (6 PTOS)

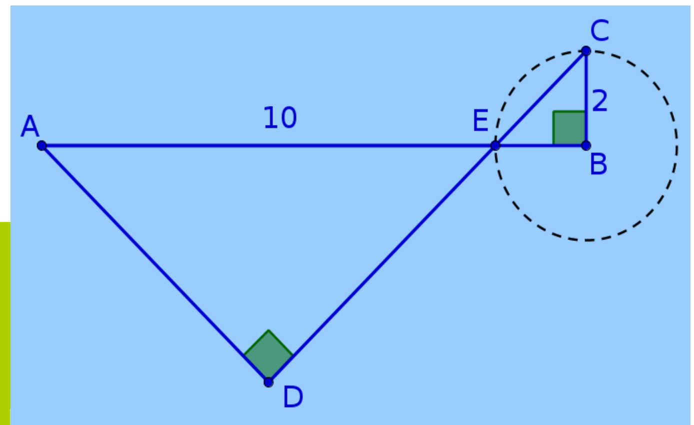
NOTA: QUEN TEÑA QUE RECUPERAR AMBOS TRIMESTRES DEBERÁ OBTER UN MÍNIMO DE 4 PTOS EN CADA UN DELES

NOME	GRUPO 4º ESO

0. Expresión escrita / expresión matemática / presentación

1.5

1. Explicar de xeito razoado porque os triángulos $\overset{\triangle}{ADE}$ e $\overset{\triangle}{EBC}$ son semellantes, e calcular os lados $\overline{EC}$ e $\overline{AD}$ sabendo que o raio da circunferéncia é $\overline{BC}=2$.



Os triángulos $\overset{\triangle}{ADE}$ e $\overset{\triangle}{EBC}$ son semellantes porque teñen dous dos seus ángulos iguais: o ángulo recto mais os ángulos $\widehat{AED}$ e $\widehat{CEB}$.

Ademais o triángulo $\overset{\triangle}{EBC}$ é isóscele por ser $\overline{BC}$ e $\overline{BE}$ dous raios; logo:

$$\overline{EC}=\sqrt{\overline{BC}^2+\overline{BE}^2}=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

Pola semellanza, tamén o triángulo $\overset{\triangle}{ADE}$ é isóscele, e polo Teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AD}}{2}=\frac{10}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow \overline{AD}=\frac{20}{2\sqrt{2}}=\frac{10}{\sqrt{2}}=\frac{10\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{2}$$

1

2. Calcular a escala á que está feito un plano sabendo que a área dunha finca de $900\ m^2$ ocupa no plano unha superfície de $4\ cm^2$.

Se chamamos r á razón de semellanza, a razón das áreas é r^2 ; logo:

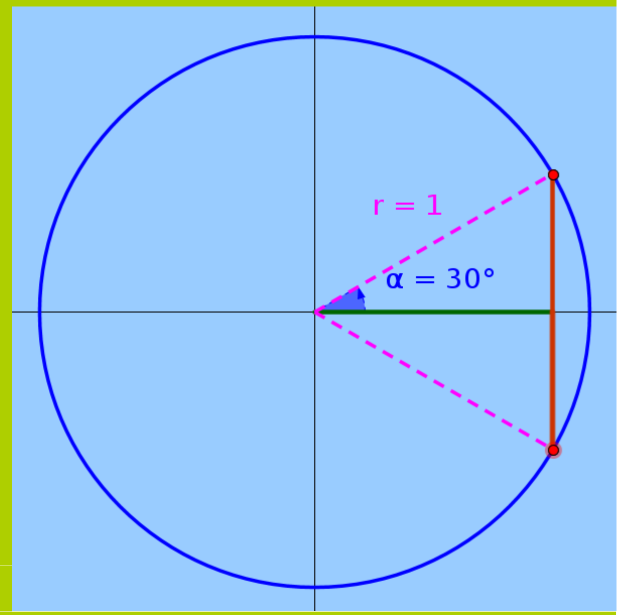
$$r^2=\frac{900\ m^2}{4\ cm^2}=\frac{9.000.000\ cm^2}{4\ cm^2}=2.250.000 \Rightarrow r=\sqrt{2.250.000}=1.500$$

Asi que a escala é $1:1.500$.

1.5	

3. Obter de xeito razoado as razóns trigonométricas do ángulo de 30^o a partir do seu triángulo característico.

Se trazamos o triángulo característico correspondente ao ángulo de 30^o e o seu simétrico a respeito do eixo horizontal OX, obtemos un triángulo equilátero, no que todos os lados teñen lonxitude 1.



Polo tanto resulta de xeito imediato que $sen\ 30^o = \frac{1}{2}$.

E utilizando as identidades fundamentais da trigonometria temos:

$$cos\ 30^o = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg\ 30^o = \frac{sen\ 30^o}{cos\ 30^o} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

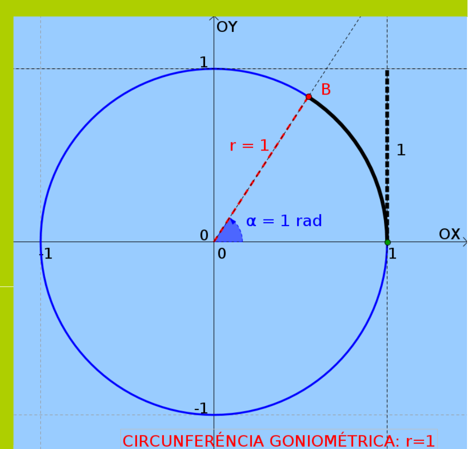
Nota: tamén é posíbel obter de forma xeométrica as razóns do ángulo de 30^o a partir das do ángulo de 60^o, xá que $sen\ 30^o = cos\ 60^o$ e $cos\ 30^o = sen\ 60^o$.

1	
1	

4. i. Explicar brevemente que é un radián e apoiar a explicación con un gráfico.

ii. Obter a equivaléncia en radiáns do ángulo de 285^o e a equivaléncia en graus de $\frac{\pi}{4}\ rad$.

i. Define-se o radián como o ángulo determinado na circunferéncia por un arco de igual lonxitude que o raio da própria circunferéncia.



ii. Sabe-se que 360^o equivale a $2\pi\ rad$, logo para convertir o ángulo de 285^o faremos:

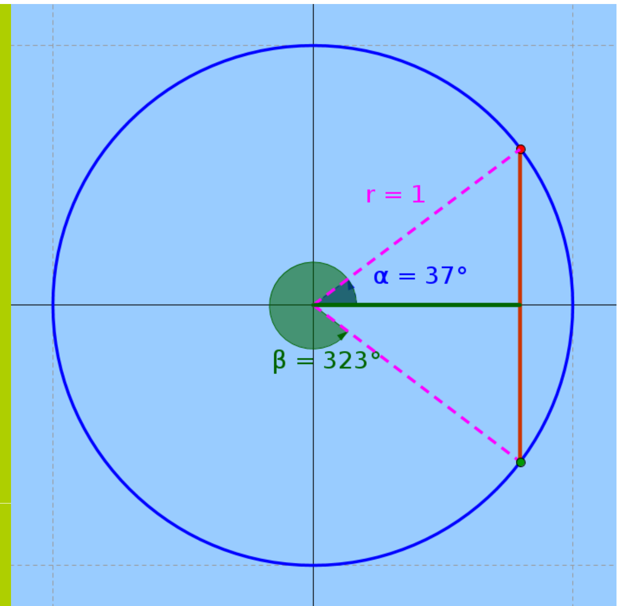
$$\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{285}{360} \Leftrightarrow \alpha = \frac{285\cdot 2\pi}{360} = \frac{19\pi}{12}\ rad$$

E para convertir o ángulo de $\frac{\pi}{4}\ rad$ faremos:

$$\frac{\beta}{360} = \frac{\frac{\pi}{4}}{2\pi} \Leftrightarrow \beta = \frac{360\cdot\frac{\pi}{4}}{2\pi} = 45^o$$

1.5

5. Obter de forma razoada as razóns trigonométricas (seno, coseno e tanxente) do ángulo de 323^o sabendo que $tg\ 37^o = \frac{3}{4}$.



O ángulo de 323^o pertence ao cuarto cuadrante, e o seu triángulo característico é igual ao do ángulo de 37^o, xá que $323^o = 360^o - 37^o$.

Da identidade $tg^2\ \alpha + 1 = \frac{1}{cos^2\ \alpha}$, obtemos:

$$tg^2\ 37^o + 1 = \frac{1}{cos^2\ 37^o} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow cos^2\ 37^o = \frac{1}{tg^2\ 37^o + 1} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1} = \frac{16}{25} \Rightarrow$$

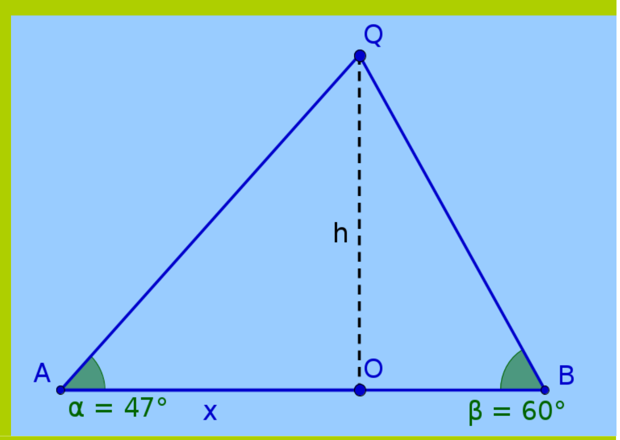
$$\Rightarrow cos\ 37^o = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

Logo $sen\ 37^o = \sqrt{1 - cos^2\ 37^o} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$; asi que:

$sen\ 323^o = -sen\ 37^o = -\frac{3}{5}$, $cos\ 323^o = cos\ 37^o = \frac{4}{5}$ e $tg\ 323^o = -tg\ 37^o = -\frac{3}{4}$.

1.5

6. Un túnel recto e horizontal de $2.000\ m$ de lonxitude atravesa unha montaña xusto pola vertical do cume, que se pode ver desde cada unha das duas bocas con ángulos de elevación de 47^o e 60^o respectivamente. Calcular a altitude da montaña a respeito do túnel.



Se chamamos A e B ás duas bocas do túnel, Q ao cume e O ao seu pé no túnel, no triángulo $\overset{\triangle}{AOQ}$, o lado OQ é a altura h pedida, e se chamamos x á base do triángulo, resulta $tg\ 47^o = \frac{h}{x}$.

E de igual xeito, no triángulo $\overset{\triangle}{BOQ}$ obtemos $tg\ 60^o = \frac{h}{2.000 - x}$, co que obtemos o sistema: $\begin{cases} h = x \cdot tg\ 47^o \\ h = (2.000 - x) \cdot tg\ 60^o \end{cases}$

Por igualación: $x \cdot tg\ 47^o = (2.000 - x) \cdot tg\ 60^o \Leftrightarrow x \cdot tg\ 47^o = 2.000 \cdot tg\ 60^o - x \cdot tg\ 60^o \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x \cdot (tg\ 47^o + tg\ 60^o) = 2.000 \cdot tg\ 60^o \Leftrightarrow x = \frac{2.000 \cdot tg\ 60^o}{tg\ 47^o + tg\ 60^o} \approx 1.235\ m$$

Asi que a altura será $h = x \cdot tg\ 47^o \approx 1.325\ m$

1 7. i. Comentar a característica principal que distingue os números racionais dos irracionais.

1 ii. Indicar do xeito razoado se os seguintes números son racionais ou irracionais: $\sqrt{2,25}$, $0,4\hat{9}$ $2-\sqrt{2}$, 2π , $0,01001000100001\ldots$.

i. Os números racionais son todos aqueles que admiten unha expresión en forma de fración, ou sexa, os que son da forma $\frac{a}{b}$, con $a,b\in\mathbb{Z}$. En particular, todos os decimais exactos ou periódicos (puros ou mistos) poden expresar-se en forma de fración (fración xeratriz), logo son racionais. De maneira inversa, todas as fracións admiten unha expresión decimal exacta ou periódica. Por suposto, todos os inteiros son racionais: $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$.

Os números que non admiten expresión decimal exacta ou periódica, e por conseguinte, tampouco admiten expresión en forma de fración, son irracionais.

ii. Os números $2-\sqrt{2}$, 2π e $0,01001000100001\ldots$ son irracionais xá que non admiten expresión en forma de fración, ou equivalentemente, non teñen expresión decimal periódica.

$\sqrt{2,25}$ e $0,\hat{9}$ son racionais: $\sqrt{121}=11\in\mathbb{Z}$ e $0,4\hat{9}=\frac{49-4}{90}=\frac{45}{90}=\frac{1}{2}\in\mathbb{Z}$.

1 8. Calcular o valor da expresión $\frac{9\cdot 10^{5}\cdot 3,9\cdot 10^{-8}}{2\cdot 10^{2}}$, dando o resultado en notación científica con duas cifras significativas, e calcular os erros absoluto e relativo (este último en porcentaxe) derivados da aproximación.

$$\frac{9\cdot 10^{5}\cdot 3,9\cdot 10^{-8}}{2\cdot 10^{2}}=\frac{35,1\cdot 10^{-3}}{2\cdot 10^{2}}=17,55\cdot 10^{-5}=1,755\cdot 10^{-4}\approx 1,76\cdot 10^{-4}$$

O erro absoluto é: $1,76\cdot 10^{-4}-1,755\cdot 10^{-4}=(1,76-1,755)\cdot 10^{-4}=0,005\cdot 10^{-4}=5\cdot 10^{-7}$.

E o erro relativo: $\frac{5\cdot 10^{-7}}{1,755\cdot 10^{-4}}=\frac{5}{1,755}\cdot 10^{-3}\approx 2,85\cdot 10^{-3}=0,285\,\%$.

1 9. A talla do mexillón para enlatado debe estar nos $3\ cm$ con un erro inferior ao $15\,\%$. Calcular o intervalo no que deben estar os mexillóns para que non sexan rexeitados e indicar se deben rexeitar-se os mexillóns que teñan unha talla de $2,55\ cm$.

Ao ser o erro relativo inferior ao $15\,\%$, a talla γ dos mexillóns deberá estar comprendida entre os valores $3\pm\frac{15}{100}\cdot 3=3\pm 0,45\ cm$, excluídos ambos; é dicer: $\gamma\in(2,55\ ,\ 3,45)$.

Polo tanto as pezas de $2,55\ cm$ deben ser rexeitadas.

1 10. Obter os números reais tais que a distáncia da sua cuarta parte ao número $-1,5$ sexa de $5,2$ unidades.

Se chamamos x ao número pedido, a condición é:

$$\left|\frac{x}{4}-(-1,5)\right|=5,2 \Leftrightarrow \left|\frac{x}{4}+1,5\right|=5,2 \Leftrightarrow \frac{x}{4}=-1,5\pm 5,2$$

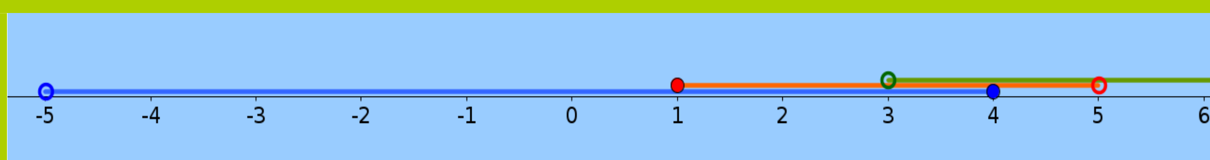
No primeiro caso obtemos: $\frac{x}{4}=-1,5-5,2=-6,7 \Leftrightarrow x=-6,7\cdot 4=-26,8$.

E no segundo: $\frac{x}{4}=-1,5+5,2=3,7 \Leftrightarrow x=3,7\cdot 4=14,8$.

Logo as solucións son $x_1=-26,8$ e $x_2=14,8$.

1 11. Representar graficamente os intervalos $I_1=(-5,4]$, $I_2=[1,5)$ e $I_3=(3,+\infty)$ e pór exemplos de números reais nos seguintes casos:

i. $\alpha\in I_2\cap I_3$ ii. $\beta\in I_3-I_1$ iii. $\gamma\notin I_1\cup I_2$



i. $I_1\cup I_2=(-5,5)$, logo $\alpha=3,001\in I_2\cap I_3$

ii. $I_3-I_1=(4,+\infty)$, logo $\beta=4,05\in I_3-I_1$

iii. $I_2\cup I_3=(-5,5)$, logo $\gamma=4,89\in I_1\cup I_2$

1 12. Transformar a expresión radical $\dfrac{4\cdot\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}{\sqrt{\frac{1}{8}\cdot\sqrt{32}}}$ nunha única poténcia de exponente racional.

$$\frac{4\cdot\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}{\sqrt{\frac{1}{8}\cdot\sqrt{32}}}=\frac{4\cdot\sqrt{\sqrt[3]{2^4}}}{\sqrt{4}}=\frac{4\cdot\sqrt[6]{2^4}}{2}=2\cdot\sqrt[3]{2^2}=\sqrt[3]{2^5}=2^{\frac{5}{3}}$$

1

13. Transformar nun radical irreducíbel a expresión $\sqrt{96}+\frac{1}{2}\sqrt{150}-\frac{1}{4}\sqrt{54}$.

$$\sqrt{192}-\frac{1}{5}\sqrt{300}-\frac{7}{4}\sqrt{108}=\sqrt{2^6\cdot 3}-\frac{1}{5}\sqrt{2^2\cdot 5^2\cdot 3}-\frac{7}{4}\sqrt{2^2\cdot 3^2\cdot 3}=2^3\cdot\sqrt{3}-\frac{1}{5}\cdot 2\cdot 5\cdot\sqrt{3}-\frac{7}{4}\cdot 2\cdot 3\cdot\sqrt{3}=$$

$$=8\cdot\sqrt{3}-2\cdot\sqrt{3}-\frac{21}{2}\cdot\sqrt{3}=\left(8-2-\frac{21}{2}\right)\sqrt{3}=\frac{12-21}{2}\sqrt{3}=-\frac{9}{2}\sqrt{3}$$

1

14. Racionalizar e simplificar as expresións:

i. $\frac{10\cdot\sqrt{6}}{3\sqrt{3}}$

ii. $\frac{\sqrt{3}}{1+4\sqrt{3}}$

i. $$\frac{10\cdot\sqrt{6}}{3\cdot\sqrt{3}}=\frac{10\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}{3\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{10\cdot\sqrt{18}}{3\cdot 3}=\frac{10\cdot 3\cdot\sqrt{2}}{9}=\frac{10\sqrt{2}}{3}$$

ii. $$\frac{\sqrt{3}}{1+4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\cdot(1-4\sqrt{3})}{(1+4\sqrt{3})\cdot(1-4\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{3}-4\cdot 3}{1-48}=\frac{\sqrt{3}-12}{-47}=\frac{12-\sqrt{3}}{47}$$