MATEMÁTICA 4º ESO 09/12/2015

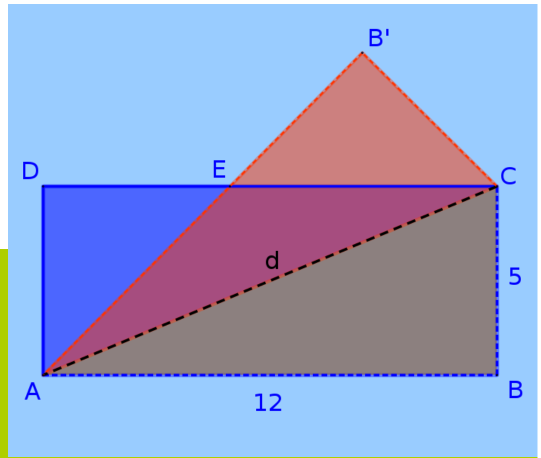
REC 6 SEMELLANZA

7 TRIGONOMETRIA

NOME	GRUPO 4º ESO

0. Expresión escrita / expresión matemática / presentación

1.5 1. Na figura adxunta, o triángulo $\overset{\triangle}{ACB'}$ obtén-se encartando o rectángulo $ABCD$ pola sua diagonal d. Explicar de xeito razoado por que os triángulos $\overset{\triangle}{ECB'}$ e $\overset{\triangle}{ADE}$ son iguais, e calcular o lado $\overline{EC}$, sabendo que a área de $\overset{\triangle}{ADE}$ é $12,4$.



Os triángulos $\overset{\triangle}{ECB'}$ e $\overset{\triangle}{ADE}$ son semellantes porque ambos teñen un ángulo recto e comparten os respectivos ángulos en E. Ademais os seus lados homólogos $\overline{AD}$ e $\overline{CB'}$ son iguais, polo tanto, os dous triángulos son iguais.

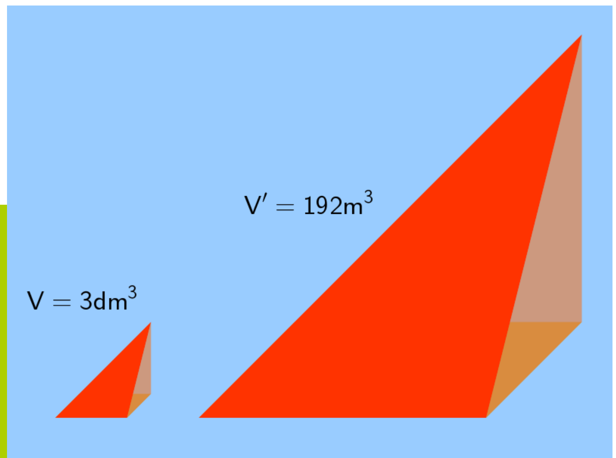
A área de $\overset{\triangle}{ADE}$ obtén-se: $\frac{1}{2}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{DE}=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\overline{DE}=12,4 \Leftrightarrow \overline{DE}=\frac{2\cdot 12,4}{5}=4,96$

E polo Teorema de Pitágoras temos:

$\overline{AE}=\sqrt{\overline{AD}^2+\overline{DE}^2}=\sqrt{5^2+4,96^2}\approx\sqrt{49,60}\approx 7,04$; asi que $\overline{EC}=\overline{AE}\approx 7,04$

Doutro xeito (mais doado): $\overline{AB}=\overline{DE}+\overline{EC} \Leftrightarrow \overline{EC}=\overline{AB}-\overline{DE}\approx 12-4,96=7,04$

1 2. Calcular a altura da maqueta a escala dunha pirámide oblícua de base triangular, sabendo que a altura real é de $12\ m$ e que os volumes da maqueta e da pirámide real son $V=3\ dm^3$ e $V'=192\ m^3$ respectivamente.



Homoxeneizando as unidades temos $V'=192\ m^3=192.000\ dm^3$, e comparando ambos volumes obtemos o cubo da razón de semellanza:

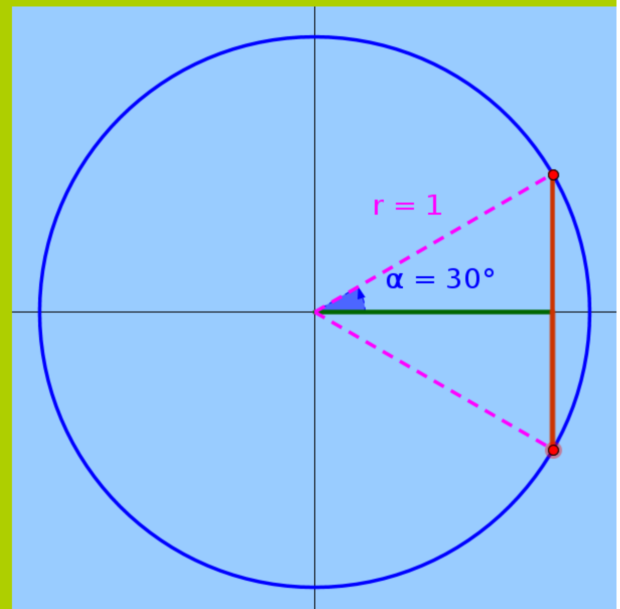
$$r^3=\frac{V'}{V}=\frac{192.000}{3}=64.000$$

Logo a razón de semellanza é $r=\sqrt[3]{64.000}=40$, asi que a altura da maqueta será $h=\frac{12}{r}=\frac{12}{40}=0,3\ m=3\ dm$.

1	

3. Obter de xeito razoado as razóns trigonométricas do ángulo de $30°$ a partir do seu triángulo característico.

Se trazamos o triángulo característico correspondente ao ángulo de $30°$ e o seu simétrico a respeito do eixo horizontal OX, obtemos un triángulo equilátero, no que todos os lados teñén lonxitude 1.



Polo tanto resulta de xeito imediato que $sen\ 30° = \frac{1}{2}$.

E utilizando as identidades fundamentais da trigonometria temos:

$$cos\ 30° = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

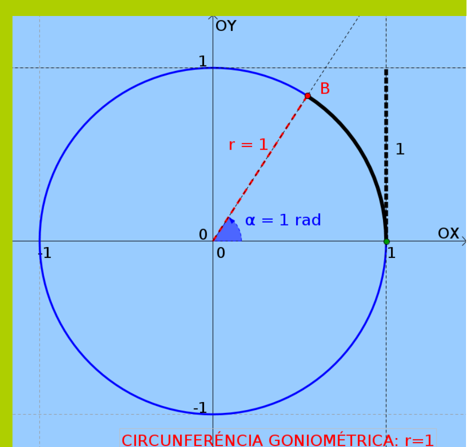
$$tg\ 30° = \frac{sen\ 30°}{cos\ 30°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Nota: tamén é posíbel obter de forma xeométrica as razóns do ángulo de $60°$ e, a partir delas, as do ángulo de $30°$, xá que $sen\ 30° = cos\ 60°$ e $cos\ 30° = sen\ 60°$.

1	
1	

4. i. Explicar brevemente que é un radián e apoiar a explicación con un gráfico.
   ii. Explicar brevemente que se entende por ángulo negativo e obter a equivaléncia en graus do ángulo de $-\frac{\pi}{3}$.

i. Define-se o radián como o ángulo determinado na circunferéncia por un arco de igual lonxitude que o raio da própria circunferéncia.



ii. Entende-se que un ángulo é negativo se é de sentido horário, é dicer, cando o seu sentido coincide coas agullas do reloxo.

Sabe-se que $360°$ equivale a $2\pi\ rad$, logo:

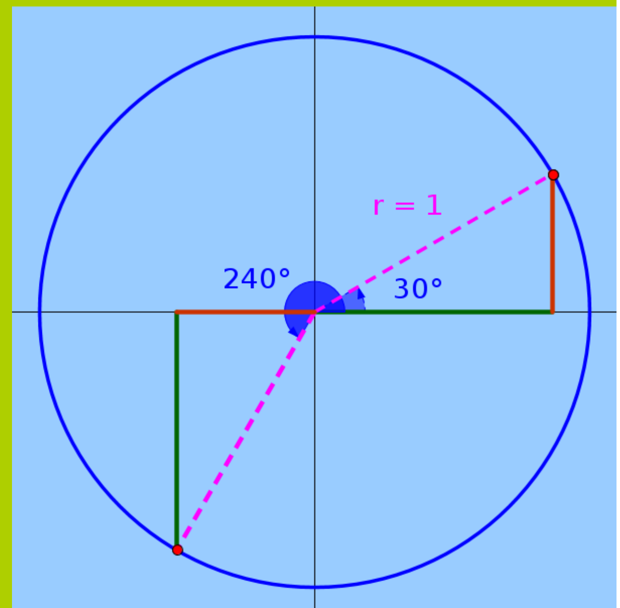
$$\frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi} = \frac{\alpha}{360} \Leftrightarrow \alpha = \frac{360 \cdot \frac{\pi}{3}}{2\pi} = \frac{360\pi}{6\pi} = 60°$$

Polo tanto $\frac{\pi}{3}\ rad = 60°$, asi que $-\frac{\pi}{3}\ rad = -60°$, que corresponde co ángulo que ten unha amplitude de $60°$, trazado desde o semieixo positivo OX en sentido horário.

1.5	

5. Obter de forma razoada as razóns trigonométricas (seno, coseno e tanxente) do ángulo de 240^o sabendo que $sen\ 30^o = 0{,}5$.

O ángulo de 240^o pertence ao terceiro cuadrante, e o seu triángulo característico é igual ao do ángulo de 30^o, xá que $240^o = 270^o - 30^o$. Ademais as suas razóns trigonométricas seno e coseno son negativas.



Pola identidade fundamental, temos que:

$$cos\ 30^o = \sqrt{1 - sen^2\ 30^o} = \sqrt{1 - 0{,}5^2} =$$

$$= \sqrt{1 - 0{,}25} = \sqrt{0{,}75} \approx 0{,}87$$

Polo tanto resulta:

$$sen\ 240^o = -cos\ 30^o \approx -0{,}87$$

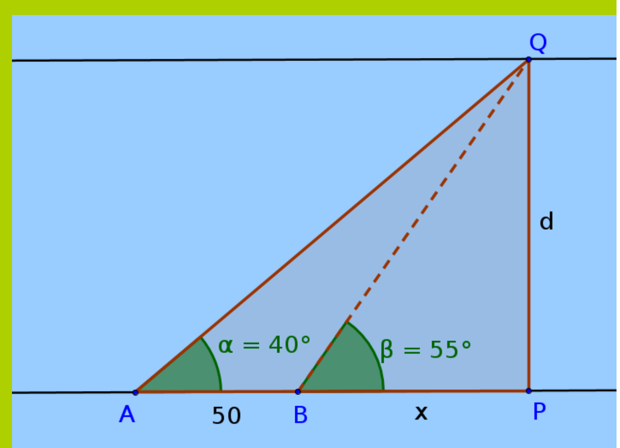
$$cos\ 240^o = -sen\ 30^o = -0{,}5$$

$$tg\ 240^o = \frac{sen 240^o}{cos\ 240^o} \approx \frac{-0{,}87}{-0{,}5} \approx 1{,}63$$

2	

6. Camiñando pola beira dun tramo recto do rio vemos ao outro lado un carballo con un ángulo de 40^o cara a esquerda do noso sentido da marcha. Se avanzamos $50\ m$ na mesma direción, o ángulo aumenta a 55^o . Calcular a anchura do rio.

Se chamamos A á nosa primeira posición, B á segunda, Q á posición do carballo e P á perpendicular do carballo na nosa beira do rio, entón a anchura do rio é $d = \overline{PQ}$ e a distáncia que avanzamos é $x = \overline{AB}$. Forman-se asi dous triángulos rectángulos $\overset{\triangle}{APQ}$ e $\overset{\triangle}{BPQ}$; no primeiro deles temos:



$$tg\ 40^o = \frac{d}{x+50} \iff d = tg\ 40^o \cdot (x+50)$$

E no segundo: $tg\ 55^o = \frac{d}{x} \iff d = tg\ 55^o \cdot x$

Igualando obtemos: $tg\ 55^o \cdot x = tg\ 40^o \cdot (x+50) \iff tg\ 55^o \cdot x - tg\ 40^o \cdot x = tg\ 40^o \cdot 50 \iff$

$$\iff (tg\ 55^o - tg\ 40^o) \cdot x = tg\ 40^o \cdot 50 \iff x = \frac{tg\ 40^o \cdot 50}{tg\ 55^o - tg\ 40^o}$$

E substituíndo: $d = tg\ 55^o \cdot x = \frac{tg\ 55^o \cdot tg\ 40^o \cdot 50}{tg\ 55^o - tg\ 40^o} \approx 101{,}72\ m$, que é a anchura do rio.