

Obxectivos

Nesta quincena aprenderás a:

- Coñecer e interpretar as funcións e as distintas formas de presentalas.
- Recoñecer o dominio e o percorrido dunha función.
- Determinar se unha función é continua ou descontinua.
- Calcular a taxa de variación e a taxa de variación media dunha función nun intervalo.
- Determinar o crecemento ou decrecemento dunha función e calcular os seus máximos e mínimos.
- Recoñecer os puntos de inflexión.
- Comprobar a simetría dalgunhas funcións respecto á orixe e ao eixe OY.
- Recoñecer se unha función é periódica.

1. Funcións reais páx. 132

Concepto de función
Gráfico dunha función
Dominio e percorrido
Funcións definidas a anacos

2. Propiedades das funcións páx. 136

Continuidade e descontinuidades
Periodicidade
Simetrías

3. Taxa de variación e crecemento páx. 138

Taxa de variación
Crecemento e decrecemento
Máximos e mínimos
Concavidade e puntos de inflexión

Exercicios para practicar

Para saber máis

Resumo

Auto-avaliación

Actividades para enviarlle ao titor

Antes de empezar

A linguaxe das gráficas



Das distintas formas en que se pode presentar unha función, mediante un enunciado, unha táboa, unha expresión alxébrica ou unha gráfica, esta última é a que nos permite ver dunha soa ollada o seu comportamento global, de aí a súa importancia. Neste tema aprenderás a recoñecer e interpretar as súas características principais.



Investiga

Imaxina que montas nunha noria cuxo raio mide 30 m e para subir hai que ascender 5 m desde o chan. A noria comeza a xirar, como é a gráfica da función que dá a altura á que te encontras segundo o ángulo de xiro? Ti vas na cabina laranxa e uns amigos na verde, como será a súa gráfica?

Funcións e gráficas

1. Funcións reais

Concepto de función

Unha función é unha **correspondencia** entre dous conxuntos numéricos, de tal forma que a cada elemento do conxunto inicial lle corresponde un elemento e só un do conxunto final.

Relaciónanse así dúas variables numéricas que adoitan designarse con x e y .

$$f: x \rightarrow y=f(x)$$

- ✓ x é a variable independente
- ✓ y é a variable dependente



O gráfico describe o percorrido da 9ª Etapa da Volta Ciclista 2007, indicando os km totais e a altitude nos puntos principais do traxecto.

Á esquerda aparece a gráfica anterior trazada sobre uns eixes cartesianos, para simplificala uníronse os puntos principais mediante segmentos. Trátase dunha función que dá a altitude segundo os km percorridos, observa a táboa de valores.

Gráfica dunha función

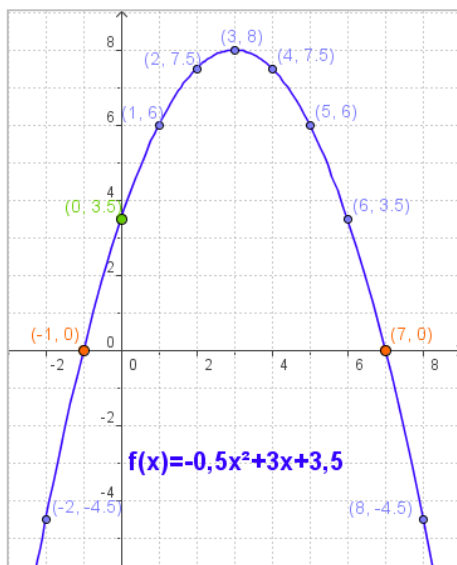
Para ver o comportamento dunha función, $f: x \rightarrow y$, recorremos á súa **representación gráfica** sobre os eixes cartesianos, no eixe de abscisas (OX) a variable independente e no de ordenadas (OY) a dependente; sendo as coordenadas de cada punto da gráfica: $(x, f(x))$.

Na figura está representada a función:

$$f(x) = 0,5x^2 + 3x + 3,5$$

Facendo unha táboa de valores, represéntanse os puntos obtidos, x no eixe de abscisas (OX), $f(x)$ no de ordenadas (OY).

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	-4,5	0	3,5	6	7,5	8	7,5	6	3,5	0	-4,5



Hai uns puntos que teñen especial interese, os que a gráfica corta aos eixes coordenados. Para calculalos:

- ✓ Corte co eixe OY:
Os puntos do eixe de ordenadas teñen abscisa 0, abonda con facer $x=0$ na fórmula da función.
- ✓ Corte co eixe OX:
Os puntos do eixe de abscisas teñen $y=0$. Resólvese a ecuación $f(x)=0$

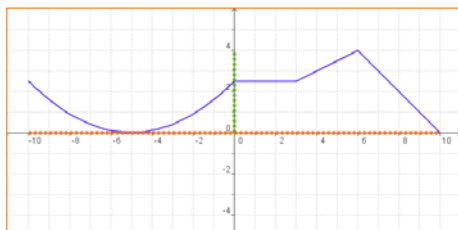
Cortes cos eixes

EIXE OY: $f(0)=3,5$ Punto $(0, 3,5)$

EIXE OX: Resolvendo a ecuación:
 $0,5x^2 + 3x + 3,5 = 0$

Resulta:
$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 7}}{-2 \cdot 0,5} = 3 \pm 4 = \begin{matrix} 7 \\ -1 \end{matrix}$$

Puntos $(7, 0)$ $(-1, 0)$



Dom $f = [-10, 10]$

Calcular Dominios

- Se a expresión analítica da función é un polinomio, o dominio son todos os números reais.

$$f(x) = -x^4 + 4x^2 + 1$$

Dom $f = \mathbb{R}$

Im $f = (-\infty, 5]$

- Se a expresión analítica da función é un cociente, o dominio son todos os reais excepto os que anulan o denominador.

$$f(x) = \frac{2}{x-1}$$

Dom $f = \mathbb{R} - \{1\}$

Im $f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

- Se a expresión analítica da función é unha raíz cadrada, o dominio está formado polos números reais para os que o radicando é positivo ou cero.

$$f(x) = \sqrt{x+3}$$

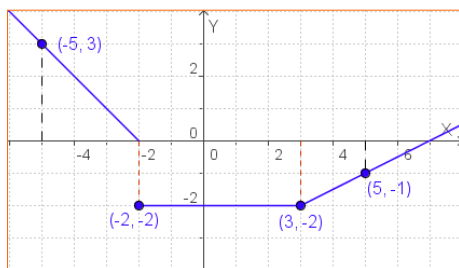
Dom $f = [-3, +\infty)$

Im $f = [0, +\infty)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

Dom $f = (-2, +\infty)$

Im $f = (0, +\infty)$



$$f(x) = \begin{cases} -x - 2 & x < -2 \\ -2 & -2 \leq x \leq 3 \\ 0,5x - 3,5 & x > 3 \end{cases}$$

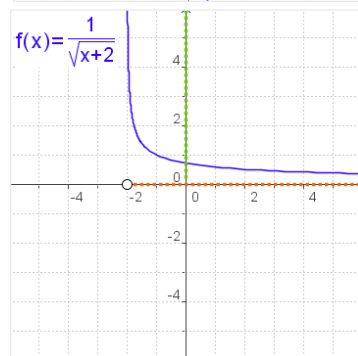
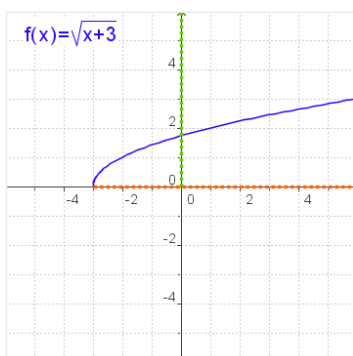
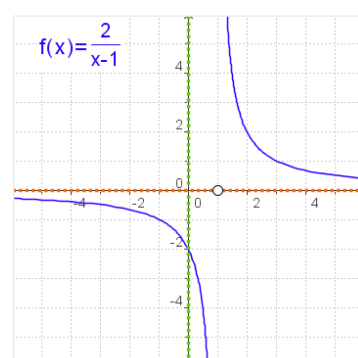
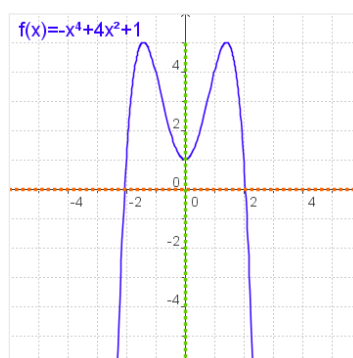
Dominio e percorrido

Dada unha función $y=f(x)$

- ✓ Chámase **dominio** de f ao conxunto de valores que toma a variable independente, x . Indícase como **Dom f** .

O dominio está formado, por tanto, polos valores de x para os que existe a función, é dicir, para os que hai un $f(x)$.

- ✓ O **percorrido** é o conxunto de valores que pode tomar a variable dependente, y , isto é o conxunto das imaxes. Representase como **Im f** .



Funcións definidas a anacos

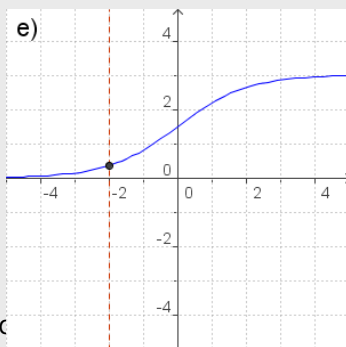
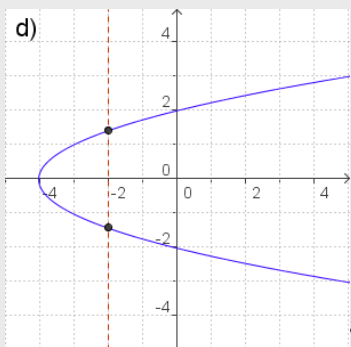
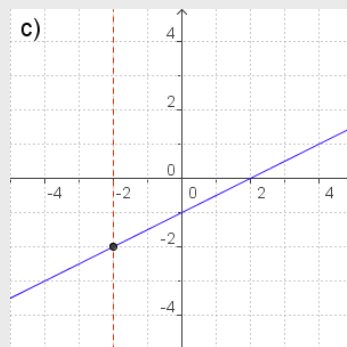
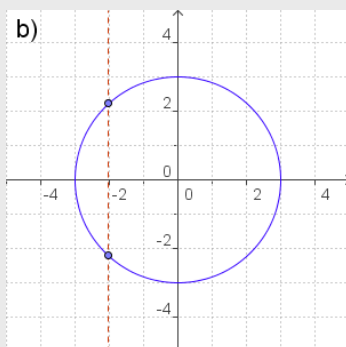
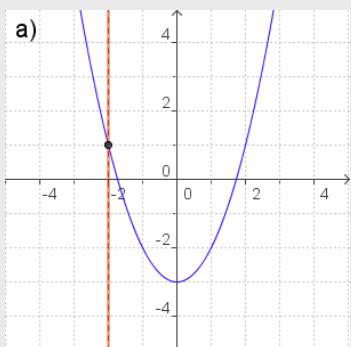
Hai un tipo de funcións que veñen definidas con distintas expresións alxébricas segundo os valores de x , dise que están **definidas a anacos**.

Para describir analiticamente unha función formada por anacos doutras funcións, danse as expresións dos distintos tramos, por orde de esquerda a dereita, indicando en cada tramo os valores de x para os que a función está definida.

Na figura podes ver un exemplo deste tipo de funcións e a súa representación gráfica.

EXERCICIOS resoltos

5. Das seguintes gráficas indica as que corresponden a unha función e as que non.

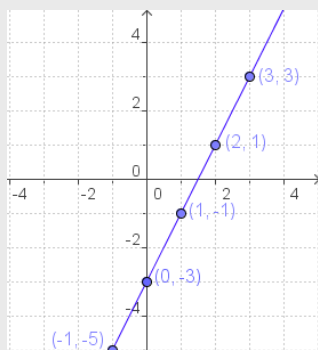


- Son gráficas dunha función a), c) e e), xa que a cada x do dominio correspóndelle un único valor de y.
- Non son gráficas dunha función b) e d).

6.

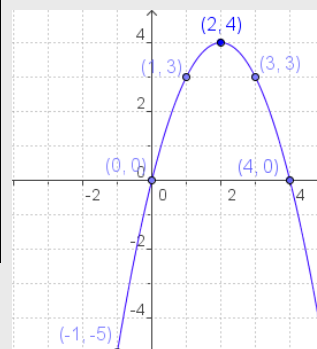
a) $f(x) = 2x - 3$

x	f(x)
0	-3
1	-1
2	1
3	3
-1	-5
-2	-7



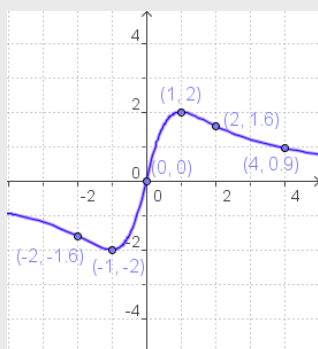
b) $f(x) = -x^2 + 4x$

x	f(x)
0	0
1	3
2	4
3	3
4	0
-1	-5



c) $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$

x	f(x)
0	0
1	2
-1	-2
2	1,67
-2	-1,67
4	0,9



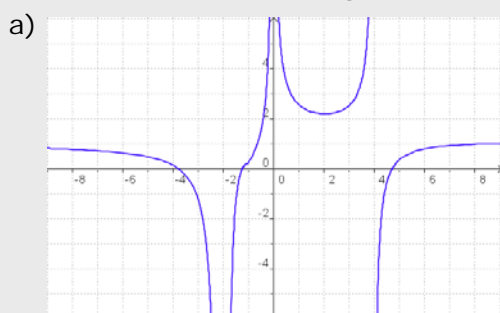
• LEMBRA

Para facer unha táboa de valores, a partir da expresión dunha función, substitúe na fórmula o x polos valores que desexes, opera e calcula os correspondentes de $y=f(x)$. En xeral procura alternar valores positivos e negativos.

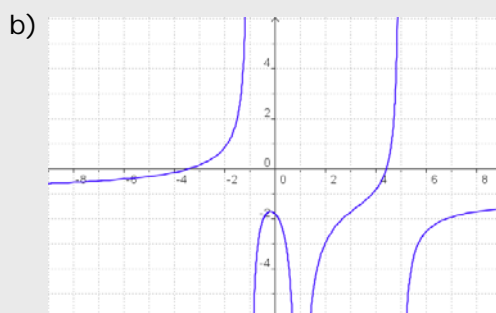
Debuxa os puntos (x,y) así obtidos, e úneos.

EXERCICIOS resoltos

3. Calcula o dominio das seguintes funcións.



$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 0, 4\}$$



$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 1, 5\}$$

Nos puntos indicados, en ambos os casos, non se pode encontrar $f(x)$ na gráfica.

c) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x$

Dom $f = \mathbb{R}$ xa que é un polinomio

d) $f(x) = \frac{x}{x-2}$

Dom $f = \mathbb{R} - \{2\}$

e) $f(x) = \sqrt{x-5}$

$$x-5 \geq 0, \quad x \geq 5 \Rightarrow \text{Dom } f = [5, +\infty)$$

f) $f(x) = \sqrt{5-x}$

$$5-x \geq 0, \quad 5 \geq x \Rightarrow \text{Dom } f = (-\infty, 5]$$

g) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x+4}}$

$$x+4 > 0, \quad x > -4 \Rightarrow \text{Dom } f = (-4, +\infty)$$

h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$

$$2-x > 0, \quad 2 > x \Rightarrow \text{Dom } f = (-\infty, 2)$$

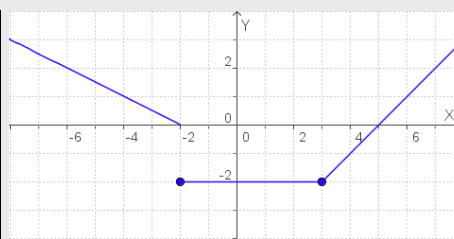
(Nestes casos -4 e 2, respectivamente, non son do dominio xa que anulan o denominador)

4. Nas seguintes funcións, definidas a anacos, calcula as imaxes dos valores de x indicados.

a) $f(x) = \begin{cases} -0,5x-1 & \text{se } x < -2 \\ -2 & \text{se } -2 \leq x \leq 3 \\ x-5 & \text{se } x > 3 \end{cases}$

$x = -4$ substitúese arriba ($-4 < -2$)
 $x = -2, x = 1$ e $x = 3$ substitúense na do medio, xa que están en $[-2, 3]$.
 $x = 6$ substitúese abaixo pois $6 > 3$.

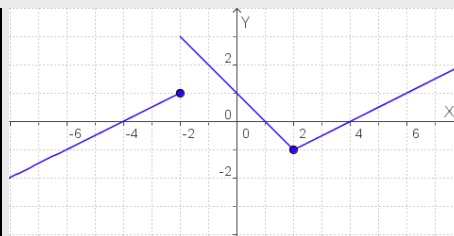
x	f(x)
-4	1
-2	-2
1	-2
3	-2
6	1



c) $f(x) = \begin{cases} 0,5x+2 & \text{se } x \leq -2 \\ -x+1 & \text{se } -2 < x < 2 \end{cases}$

$x = -6, x = -2$ substitúese arriba.
 $x = 0$ substitúese na do medio, xa que están en $-2 < 0 < 2$.
 $x = 2, x = 4$ substitúese abaixo.

x	f(x)
-6	-1
-2	3
0	1
2	-1
4	0



Funcións e gráficas

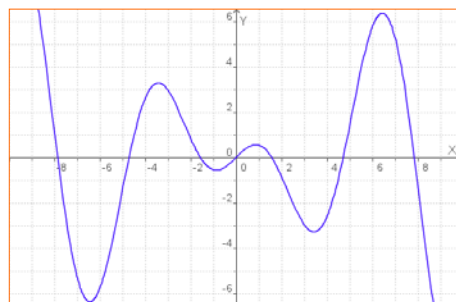
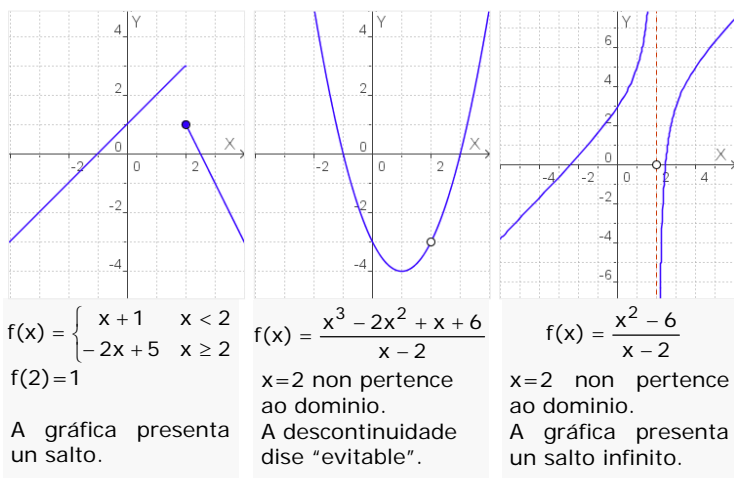
2. Propiedades das funcións

Continuidade

A primeira idea de función **continua** é a que pode ser representada dun só trazo, sen levantar o lapis do papel.

Cando unha función non é continua nun punto dise que presenta unha **descontinuidade**.

As tres funcións debuxadas debaixo son descontinuas en $x=2$, pero teñen distintos tipos de descontinuidade.



Unha función $y=f(x)$ é continua en $x=a$ se:

- A función está definida en $x=a$, existe $f(a)=b$.
- As imaxes dos valores próximos a a tenden a b .

Hai varias razóns polas que unha función non é continua nun punto:

- Presenta un salto.
- A función non está definida nese punto, ou se o está queda separado, hai un "burato" na gráfica.
- A función non está definida e o seu valor crece (ou decrece) indefinidamente cando nos achegamos ao punto.

Funcións periódicas

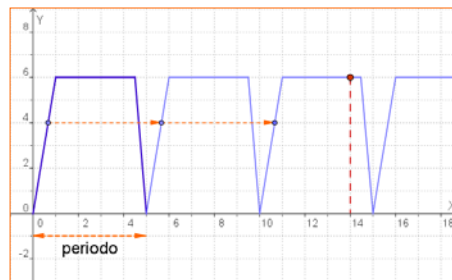
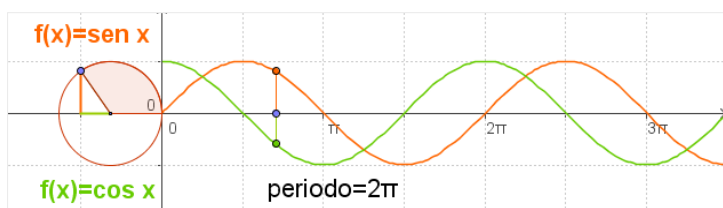
Na natureza e no teu contorno habitual hai fenómenos que se repiten a intervalos regulares, como o caso das mareas, os péndulos e resortes, sono...

As funcións que describen este tipo de fenómenos chámanse **periódicas**

Unha **función** é **periódica** cando o seu valor se repite cada vez que a variable independente percorre un certo intervalo. O valor deste intervalo chámase **período**.

$$f(x + \text{período}) = f(x)$$

Dúas funcións periódicas importantes:



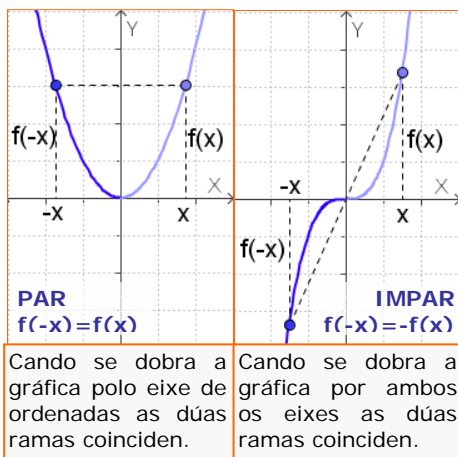
Unha cisterna énchese e baléirase automaticamente expulsando 6 litros de auga cada 5 minutos, seguindo o ritmo da gráfica. Cando o depósito está baleiro comeza o enchido, que custa 1 minuto, permanece cheo 3,5 minutos e baléirase en 0,5 minutos. Este proceso repítese periodicamente.

Para coñecer o volume de auga no depósito en cada instante coñecer o que ocorre nestes primeiros 5 minutos. Así aos 14 minutos, a cantidade de auga é: $f(14) = f(4 + 2 \cdot 5) = f(4) = 6$

Ao dividir $14:5$, cociente=2 resto=5

En xeral, se o período é 5:

$$f(x + 5 \cdot n) = f(x)$$



Simetrías

A gráfica dalgúñas funcións pode presentar algún tipo de simetría que se é estudada previamente, facilita o seu debuxo.

- ✓ Unha función é **simétrica** respecto ao **eixe OY**, se $f(-x)=f(x)$.
Neste caso a función dise **PAR**.
- ✓ Unha función é **simétrica** respecto á **orixe de coordenadas** cando $f(-x)=-f(x)$.
Neste caso a función dise **IMPAR**.

Observa os gráficos para recoñecelas.

EXERCICIOS resoltos

5. Calcula o valor de k para que as seguintes funcións sexan continuas no punto en que cambiar a gráfica:

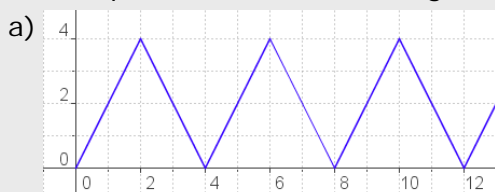
a) $f(x) = \begin{cases} 0,5x + k & x \leq 4 \\ x - 3 & x > 4 \end{cases}$

$f(4) = 0,5 \cdot 4 + k = 2 + k$
Se se define no outro tramo sería:
 $f(4) = 4 - 3 = 1$
como ambos os tramos deben coincidir:
 $2 + k = 1 \Rightarrow k = 1 - 2 = -1$

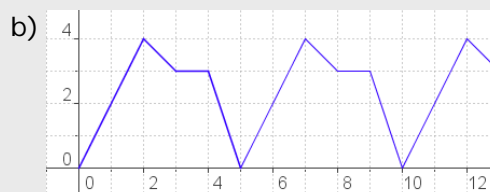
b) $f(x) = \begin{cases} k & x \leq 1 \\ -x + 1 & x > 1 \end{cases}$

$f(1) = k$
Se estivese definida no outro tramo sería:
 $f(1) = -1 + 1 = 0$
como ambos os tramos deben coincidir:
 $k = 0$

6. Cal é o período das funcións seguintes?. En cada caso calcula $f(45)$.

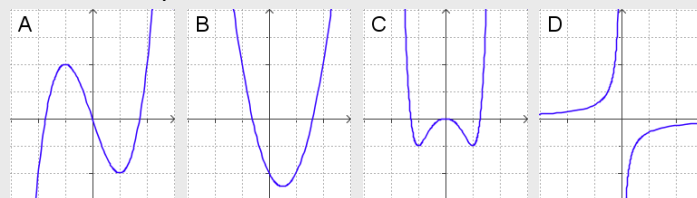


Período = 4
 $45 = 4 \cdot 11 + 1 \quad f(45) = f(1) = 2$



Período = 5
 $45 = 5 \cdot 9 \quad f(45) = f(0) = 0$

7. De entre as seguintes gráficas selecciona as que corresponden a funcións pares e a funcións impares.



Par: C
Impares: A e D
B non é par nin impar

8. As funcións seguintes (corresponden ás de ex7) son pares ou impares?

a) $f(x) = x^3 - 3x$ $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$ IMPAR

b) $f(x) = 2x^2 - 2x - 2$ $f(-x) = 2(-x)^2 - 2(-x) - 2 = 2x^2 + 2x - 2$ Nin PAR nin IMPAR

c) $f(x) = x^6 - x^4 - x^2$ $f(-x) = (-x)^6 - (-x)^4 - (-x)^2 = 2x^6 - x^4 - x^2 = f(x)$ PAR

d) $f(x) = -1/x$ $f(-x) = -1/(-x) = 1/x = -f(x)$ IMPAR

Funcións e gráficas

3. Taxa de variación e crecemento

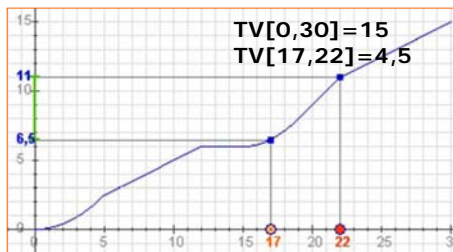
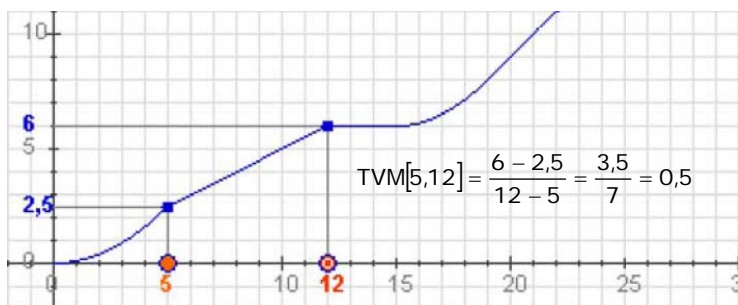
Taxa de variación dunha función

A **taxa de variación** ou **incremento** dunha función é o aumento ou diminución que experimenta unha función ao pasar a variable independente dun valor a outro.

$$TV[x_1, x_2] = f(x_2) - f(x_1)$$

De máis utilidade resulta calcular a chamada **taxa de variación media**, que nos indica a variación relativa da función respecto á variable independente:

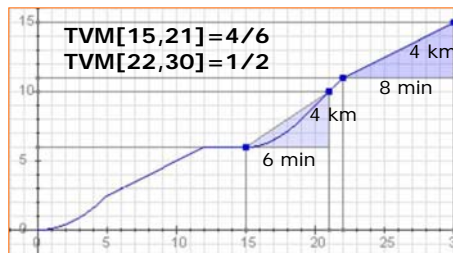
$$TVM[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



A gráfica representa a distancia en km percorrida dun ciclista en función do tempo, en minutos, empregado.

A TV corresponde á distancia percorrida nun intervalo de tempo.

A TVM é a velocidade media nun intervalo de tempo determinado.



Crecemento e decrecemento

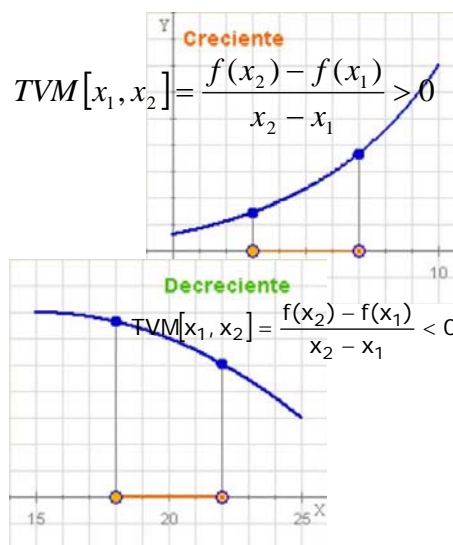
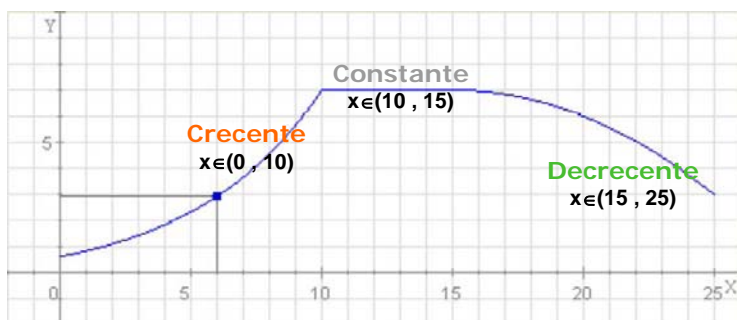
Unha característica das funcións que se pode visualizar facilmente nas gráficas é a monotonía. Cando ao aumentar o valor de x aumenta o valor de $y=f(x)$, a gráfica "ascende" e dise que a función é **crecente**. Se pola contra ao aumentar x diminúe e, a gráfica "descende", e a función **decrece**. Precisando un pouco máis:

Unha **función** é **crecente** nun intervalo, cando dados dos puntos calquera do mesmo

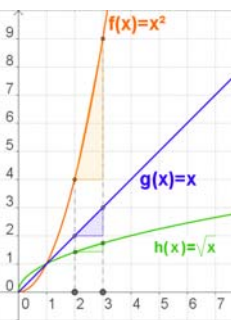
- Se $x_1 < x_2$ entón $f(x_1) < f(x_2)$

E será **decrecente**:

- Se $x_1 < x_2$ entón $f(x_1) > f(x_2)$



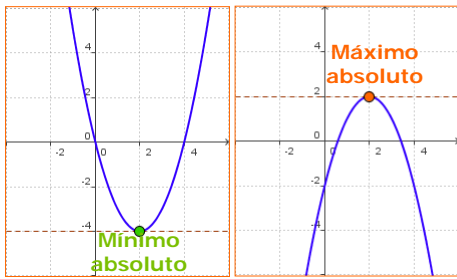
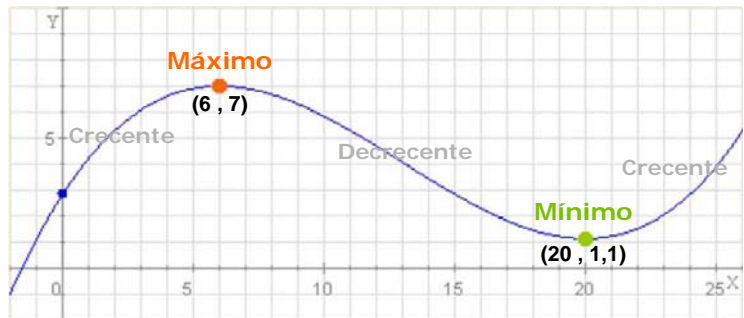
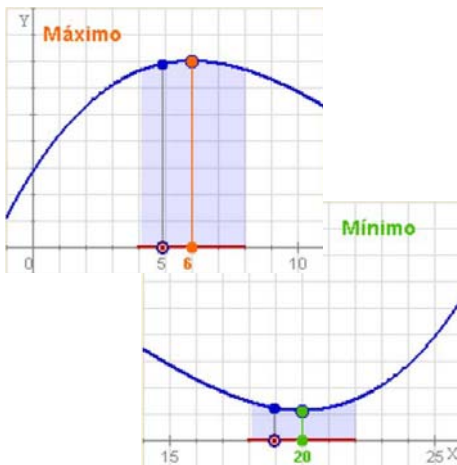
Todas as funcións non crecen ou decrecen, da mesma maneira. $f(x) = x^2$ é a que crece máis á prisa, $g(x) = x$ ten un crecemento lineal, $h(x) = \sqrt{x}$ crece máis lentamente.



Máximos e mínimos

Dada unha función continua nun punto $x=a$, dise que presenta un **máximo relativo**, se á esquerda do dito punto a función é crecente e á dereita a función é decrecente.

Se, polo contrario, a función é decrecente á esquerda e crecente á dereita hai un **mínimo relativo**.



Se se verifica que $f(a) > f(x)$ para calquera valor x do dominio, e non só para os valores de "arredor", fálase de **máximo absoluto** en $x=a$.

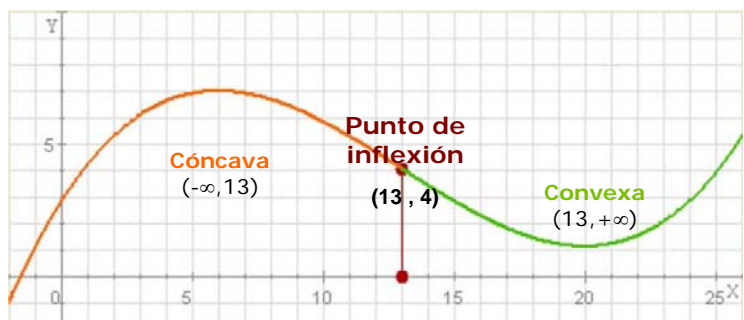
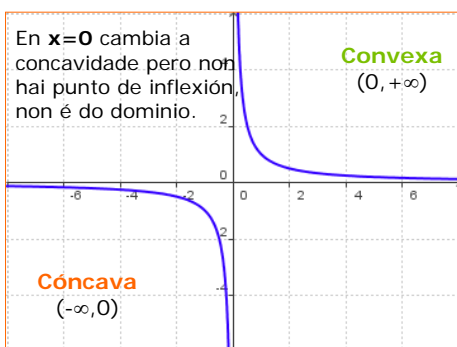
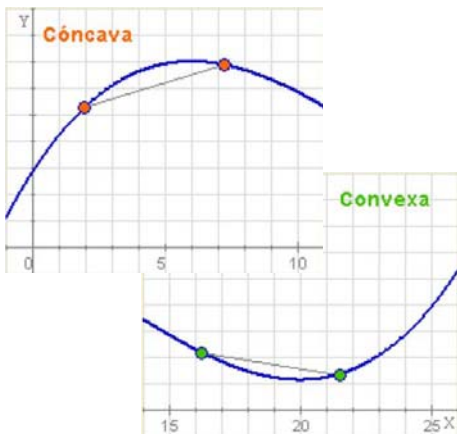
E analogamente dise que en a hai un **mínimo absoluto** se $f(a) < f(x)$ para calquera x do dominio.

Concavidade, convexidade e puntos de inflexión

Outra característica de interese nas gráficas das funcións é a concavidade, estudar os intervalos nos que a gráfica se curva cara abaixo ou cara arriba.

- ✓ Unha función é **cóncava** nun intervalo se o segmento que une dous puntos calquera da curva queda debaixo dela, e **convexa** se queda por riba.

Os puntos do dominio nos que a función pasa de cóncava a convexa ou viceversa, chámanse **puntos de inflexión**.



EXERCICIOS resoltos

9. Calcula a taxa de variación media das funcións seguintes entre os puntos indicados. Comproba na figura que nas funcións cuxo gráfico é unha recta a TVM é constante. ****Triángulos semellantes**



a) $y=2x+3$

$$TVM[1,3] = \frac{9-5}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$$

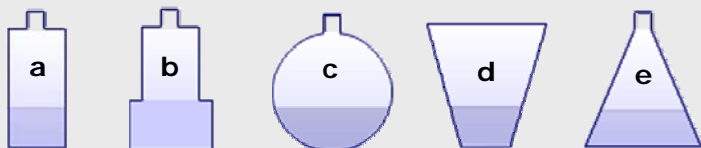
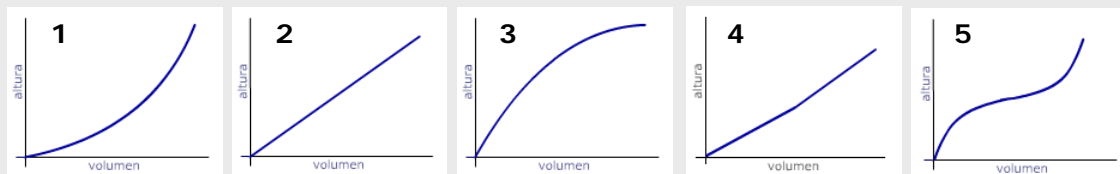
b) $y=0,5x+3$

$$TVM[1,3] = \frac{4,5-3,5}{2} = 0,5$$

$$TVM[-5,-2] = \frac{-1+7}{-2+5} = \frac{6}{3} = 2$$

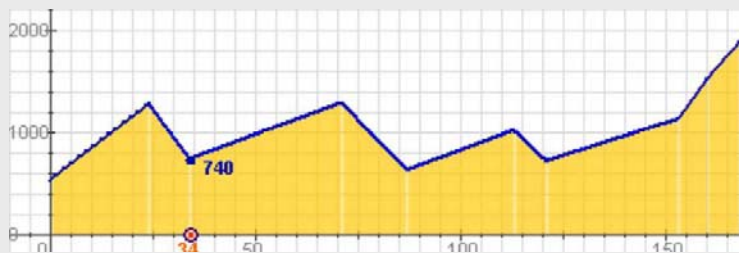
$$TVM[-3,0] = \frac{3-1,5}{3} = 0,5$$

10. As gráficas representan como enchen dos distintos recipientes, que gráfica corresponde a cada un? ****Volume**



- a → 2
- b → 4
- c → 5
- d → 3
- e → 1

11. Lembra a función que daba o "perfil" dunha etapa da Volta, que viches no primeiro capítulo, a) escribe os intervalos de crecemento ou decrecemento; b) En que punto quilométrico se alcanzan os máximos relativos?, que valor toman?, e os mínimos?; c) Hai máximo ou mínimo absoluto? ****Saída**



km	0	24	34	71	87	113	121	153	160	168
alt	540	1280	740	1290	630	1020	720	1130	1520	1882



- a)
 Crecente: $(0,24) \cup (34,71) \cup (87,113) \cup (121,168)$
 Decrecente: $(24,34) \cup (71,87) \cup (113,121)$

- b)
 MÁX: $x=24, y=1280$
 $x=71, y=1290$
 $x=113, y=1020$
 MÍN: $x=34, y=740$
 $x=87, y=630$
 $x=121, y=720$

- c)
 Neste caso a función ten máximo e mínimo absolutos, que se alcanzan nos extremos do dominio, mín en $x=0$ de valor 540 m, máx en $x=168$ de valor 1882 m.



Para practicar

1. Considera a función que a cada n° lle asigna o seu cadrado menos 1. Escribe a súa expresión analítica e calcula a imaxe de -1, 1 e 2. Calcula tamén os cortes cos eixes.

2. Considera a función que a cada n° lle asigna á súa metade máis 3. Escribe a súa expresión analítica e calcula a imaxe de -1, 1 e 3. Calcula tamén os cortes cos eixes.

3. Considera a función que a cada n° lle asigna o seu dobre menos 5. Escribe a súa expresión analítica e calcula a imaxe de -2, -1 e 1. Calcula tamén os cortes cos eixes.

4. Calcula o dominio das seguintes funcións:

a) $f(x) = -2x^2 + 5x - 6$

b) $f(x) = \frac{2x}{2x - 4}$

c) $f(x) = \sqrt{-4x^2 + 12}$

d) $f(x) = \sqrt{4x^2 + 20}$

e) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x - 4}}$

5. Estuda a continuidade das seguintes funcións:

a) $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$ b) $f(x) = \frac{-x}{x+3}$

6. Estuda a continuidade das seguintes funcións nos puntos que se indica:

a) $f(x) = \begin{cases} x+2 & x \leq 1 \\ -x+2 & x > 1 \end{cases}$ en $x=1$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & x \leq 0 \\ x+2 & x > 0 \end{cases}$ en $x=0$

c) $f(x) = \begin{cases} -x+3 & x \leq -1 \\ 4 & x > -1 \end{cases}$ en $x=-1$

d) $f(x) = \begin{cases} -x+3 & x \leq -1 \\ 4 & x > -1 \end{cases}$ en $x=-1$

7. Estuda a simetría das funcións:

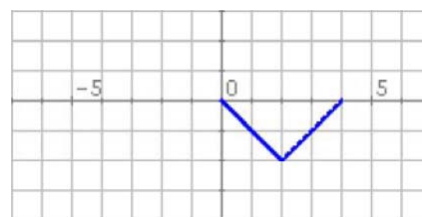
a) $f(x) = x^3 + 2x$ b) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{5x^2}$

c) $f(x) = 2\sqrt{x^2 + 1}$ d) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

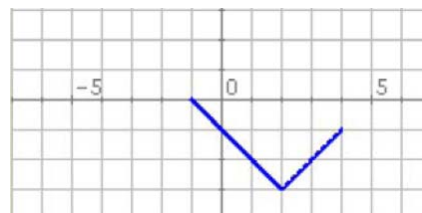
e) $f(x) = \frac{4x^2 + 1}{2x}$ f) $f(x) = x^4 - 3x^2 - 3$

8. En cada caso a gráfica representa un tramo ou período dunha función periódica, representa outros tramos, indica o período e calcula a imaxe do punto de abscisa que se indica:

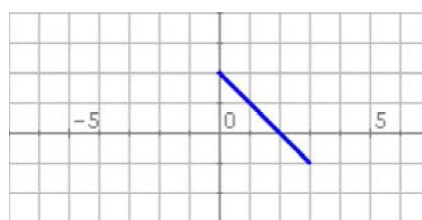
a) $f(-2)$



b) $f(-3)$

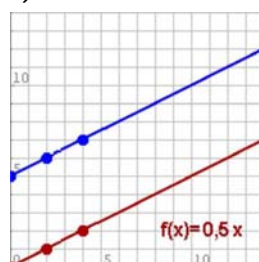


c) $f(-1)$

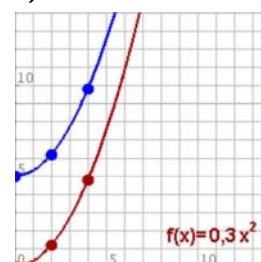


9. Calcula as TVM das funcións da gráfica nos intervalos $[0, 4]$ e $[2, 4]$.

a)

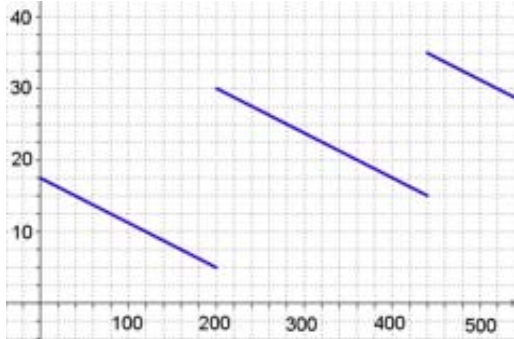


b)



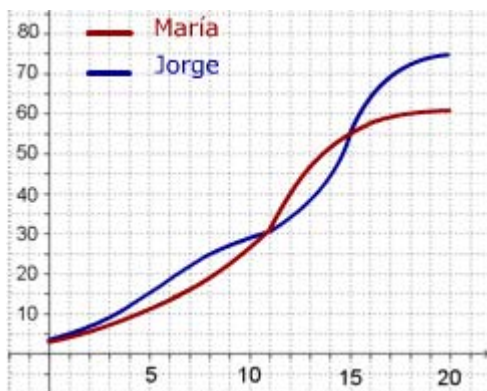
Funcións e gráficas

10. O gráfico mostra como varía a gasolina que hai no meu coche durante unha viaxe de 520 km por unha autovía.



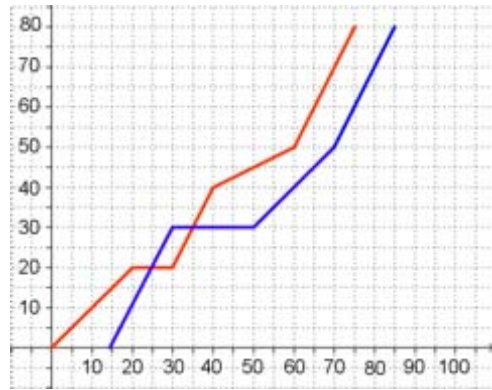
- Canta gasolina había ao cabo de 240 km? No depósito caben 40 litros, cando estaba cheo máis de medio depósito?
- En cantas gasolinas parei?, en que gasolera botei máis gasolina? Se non parara antes, onde había de quedar sen gasolina?
- Canta gasolina usei nos primeiros 200 km? Canta en toda a viaxe? Canta gasolina gasta o coche cada 100 km nesta autovía?

11. María e Jorge son dúas persoas máis ou menos típicas. Na gráfica podes comparar como creceu o seu peso nos seus primeiros 20 anos.



- Canto pesaba Jorge aos 8 anos?, e María aos 12? Cando superou Jorge os 45 kg?
- A que idade pesaban os dous igual? Cando pesaba Jorge máis que María?, e María máis que Jorge?
- Cal foi a media en kg/ano de aumento de peso de ambos os dous entre os 11 e 15 anos? En que período creceu cada un máis rapidamente?

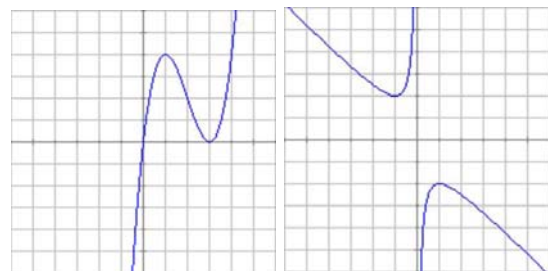
12. O gráfico dá o espazo percorrido por dous coches que realizan un mesmo traxecto.



- Cal é a distancia percorrida? Se o primeiro coche saíu ás 10:00, a que hora saíu o 2º? Canto lle custou a cada un facer o percorrido?
- Canto tempo e onde estivo parado cada coche? En que km adiantou o 2º ao 1º?, e o 1º ao 2º?
- Que velocidade media levaron no traxecto total?, en que tramo a velocidade de cada coche foi maior?

13. As gráficas seguintes corresponden ás funcións I e II.

I) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ II) $f(x) = -\frac{x^2 + 1}{x}$



Calcula en cada unha:

- O dominio.
- Os puntos de corte cos eixes.
- Os valores de x para os que a función é positiva e negativa.
- Os intervalos de crecemento e decrecemento.
- Os máximos e mínimos.
- Cantos puntos de inflexión teñen?
- Os intervalos de concavidade e convexidade.



A primeira función

O primeiro en construír unha función foi **Galileo** (1564-1642). Desde o alto da torre inclinada de Pisa tirou dúas bólas, unha de ferro e outra de madeira e comprobou que a pesar da diferenza de peso, as dúas chegaban ao chan á vez; descubriera a lei de caída dos corpos.

Continuando o seu estudo e empregando un curioso aparello, comprobou que o espazo percorrido depende do cadrado do tempo, escribindo a primeira función da historia. Pulsando aquí podes ler máis sobre o tema.

A primeira definición formal de función débese a **Euler**, quen no libro *Introductio in analysis infinitorum*, publicado en 1748, di:

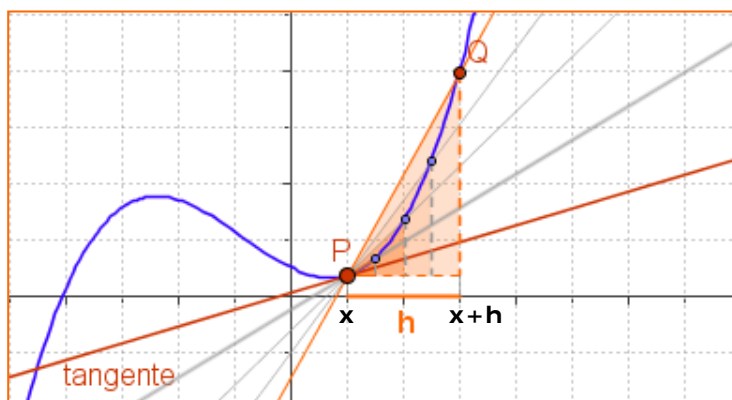
“Unha función dunha cantidade variable é unha expresión analítica composta de calquera maneira a partir da cantidade variable e de números ou cantidades constantes”. En 1755 en *Institutiones calculi differentialis*, volve sobre o tema achegándose máis á que hoxe utilizamos.

Unha función curiosa

A chamada función de Dirichlet, é a que a cada número real l le asigna o 1 se é racional e o 0 se é irracional. É discontinua en todos os seus puntos.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

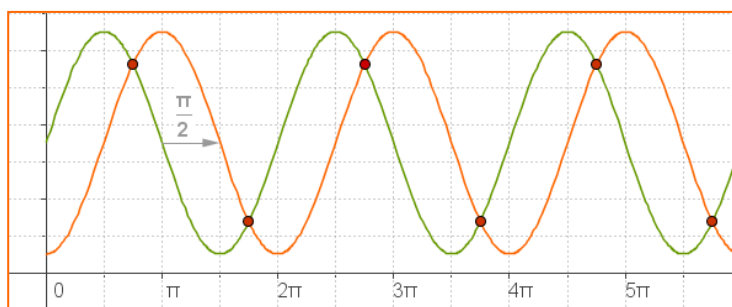
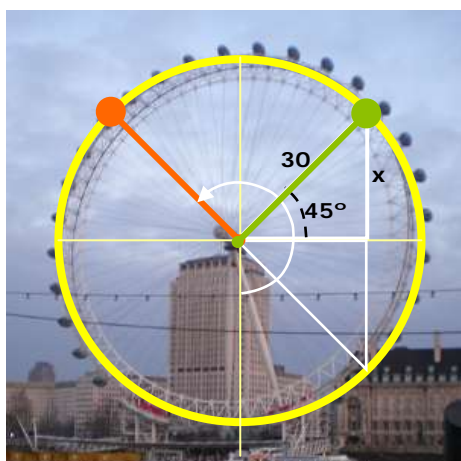
Tanxente, taxa de variación media e derivada



Cando o punto $P \rightarrow Q$, a recta secante PQ tende á recta **tanxente** á curva $y=f(x)$ en P . A pendente da secante é a TVM $[P,Q]$ que tende á da tanxente.

É a **derivada** da función que estudarás en cursos posteriores.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



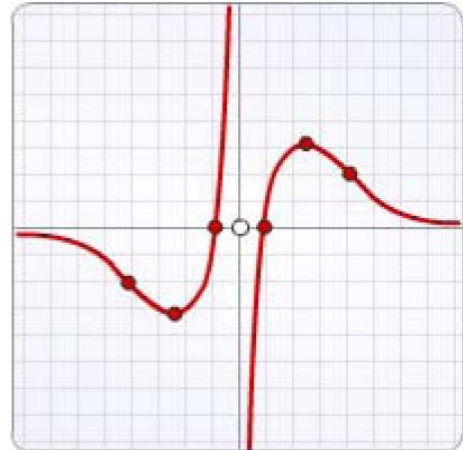
Observa as dúas gráficas, ambas funcións son periódicas de período 2π , a gráfica verde está desfasada $\pi/2$ respecto á laranxa; fíxate onde alcanzan os máximos e os mínimos. Cando coinciden as dúas gráficas, a que altura están?,
 $x = r \cdot \sin 45^\circ = 21,21$ m; 1) $35 - 21,21 = 13,79$ 2) $35 + 21,21 = 56,21$

Funcións e gráficas



Lembra o máis importante

- ✓ Unha **función** é unha relación entre dúas variables x e y , de modo que a cada valor da variable independente, x , asócialle un único valor da variable e , a dependente.
- ✓ O **dominio** dunha función é o conxunto de todos os posibles valores que pode tomar x .
- ✓ A **gráfica** dunha función é o conxunto de puntos $(x, f(x))$ representados no plano.
- ✓ Unha función é **continua** se pode representarse cun só trazo. É **descontinua** nun punto se presenta un "salto" ou non está definida nese punto.
- ✓ Unha función é **periódica** de período t , se a súa gráfica se repite cada t unidades, $f(x+t)=f(x)$.
- ✓ Unha función é **simétrica** respecto ao eixe OY, función par, se $f(x)=f(-x)$; e é simétrica respecto da orixe, función impar, se $f(-x)=-f(x)$.
- ✓ A **taxa de variación** dunha función entre dous puntos é a diferenza: $TV[x_1, x_2]=f(x_2)-f(x_1)$
A **taxa de variación media** é:
$$TVM[x_1, x_2]=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$
- ✓ Unha función é **crecente** nun intervalo, cando dados dous puntos calquera do mesmo
 - Se $x_1 < x_2$ entón $f(x_1) < f(x_2)$E é **decrecente**
 - Se $x_1 < x_2$ entón $f(x_1) > f(x_2)$
- ✓ Unha función continua nun punto $x=a$, presenta un **máximo** relativo, se á esquerda do dito punto é crecente e á dereita é decrecente. Se, polo contrario, é decrecente antes e crecente despois hai un **mínimo** relativo.
- ✓ A gráfica dunha función pode ser **cóncava** (cara abaixo) ou **convexa** (cara arriba). Os puntos do dominio nos que cambia a concavidade, chámanse **puntos de inflexión**.



Dominio

Todos os reais excepto o 0

Continuidade

Non é continua, en 0 presenta unha descontinuidade de salto infinito.

Simetría

É simétrica respecto da orixe de coordenadas, función impar.

Cortes cos eixes

Ao eixe de abscisas en $(-1,0)$ e $(1,0)$; non corta o eixe de ordenadas.

Crecedemento e decrecemento

É crecente en $(-\infty, -2,5) \cup (2,5, +\infty)$
É decrecente en $(-2,5, 0) \cup (0, 2,5)$

Máximos e mínimos

Máximo en $(2,5, 3)$;
Mínimo en $(-2,5, 3)$

Concavidade e convexidade

Puntos de inflexión

É cóncava en $(-\infty, -3) \cup (0, 3)$
É convexa en $(-3, 0) \cup (3, +\infty)$
 $(-3,0)$ e $(3,0)$ son puntos de inflexión.
En $x=0$ cambia a concavidade pero non hai punto de inflexión xa que non é do dominio.

Auto-avaliación



1. Calcula a imaxe de $x=0$ na función:

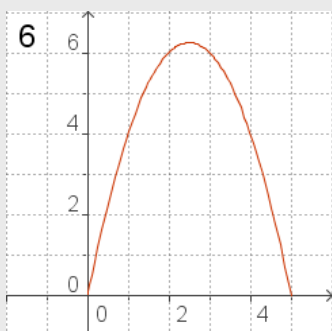
$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \leq 3 \\ 5 & x > 3 \end{cases}$$

2. Calcula o dominio da función:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$$

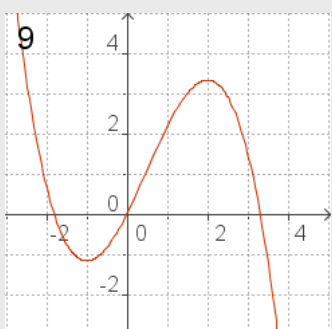
3. Cal dos puntos seguintes: $(1,-2)$ $(3,-15)$ $(4,-26)$ non pertence á gráfica da función $f(x) = -x^2 - 3x + 2$?

4. Calcula os puntos de corte cos eixes coordenados da recta $y = -0,25x - 0,75$.



5. Se $y=f(x)$ é unha función impar e $f(3)=-2$, canto vale $f(-3)$?

6. A gráfica mostra o primeiro tramo dunha función periódica de período 5 e expresión $f(x) = -x^2 + 5x$ ($0 \leq x < 5$). Calcula $f(28)$.

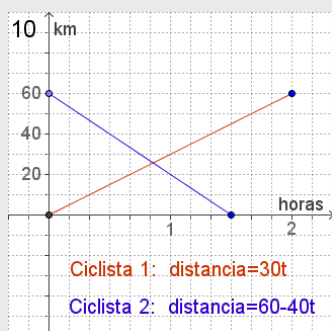


7. Descubre o valor de k para que a función sexa continua en $x=3$.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + k & x \leq 3 \\ 6 & x > 3 \end{cases}$$

8. Calcula a TVM $[-3,0]$ da función $f(x) = -0,25x^2 - 3x + 1$.

9. Determina o intervalo en que a función da gráfica é crecente.



10. Un ciclista sae dun punto A cara a outro B distante 60 km a unha velocidade constante de 30 km/h. Á vez outro ciclista sae de B en dirección a A, a 40 km/h. Observa a gráfica e calcula a cantos km do punto A se cruzan na estrada.

Funcións e gráficas

Solucións dos exercicios para practicar

1. $f(x)=x^2-1$ $f(-1)=0$, $f(2)=3$, $f(1)=0$
Corte OY: -1 Corte OX: 1 e -1

2. $y = \frac{x}{2} + 3$

$f(-1)=2,5$ $f(1)=3,5$ $f(3)=4,5$
Corte OY: 3 Corte OX: -6

3. $f(x)=2x-5$
 $f(-2)=-9$, $f(-1)=-7$, $f(1)=-5$
Corte OY: -5 Corte OX: 2,5

4. a) É un polinomio, $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$
b) Todos os reais excepto o 2
c) $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$
d) Todos os reais
e) $(2, +\infty)$

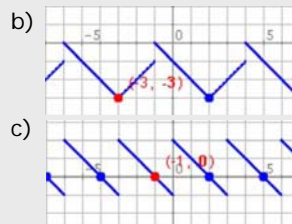
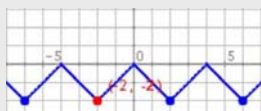
5. a) É descontinua en $x=3$
b) É descontinua en $x=-3$

6. a) Descontinua en 1.
á esq.: 3; á der.: 1
b) Continua en 0.
á esq.: 2; á der.: 2
c) Continua en -1.
á esq.: 4; á der.: 4
c) Continua en -1.
á esq.: 4; á der.: 4

7. a) e) son impares; b) c) e f) son pares; d) non é par nin impar

8. a) $\text{TVM}[0,4]=\text{TVM}[2,4]=0,5$
b) $\text{TVM}[0,4]=1,2$; $\text{TVM}[2,4]=1,8$

9. a)



10. a) 27,5 litros; entre os km 200 e 360 e do 440 ata o 520.
b) En dúas, unha no km 200 e outra no 440; botei máis na 1ª; aos 280 km
c) 12,5 l; 32,5 l; 6,25 l/100 km
11. a) J. 25 kg, M. 35 kg ; aos 14 anos
b) aos 11 (30 kg) e aos 15 (55 kg)
J máis que M: ata os 11 e desde os 15;
M máis que J: dos 11 a 15
c) 25kg; 6,25 kg/ano; M entre os 11 e 12 (10 kg/ano); J entre os 12-14 (10 kg/ano)
12. a) 80 km; ás 10:15; 75 e 70 min
b) 10 min en km 20, 20 min en km 30; en o km 20 e en 30 respectivamente.
c) 64 km/h e 68,6 km/h; 1º: min 60-75
2º: min 15-30 e min 70-85
13. I) a) \mathbb{R} ; b) $(0,0)(3,0)$
c) $e>0 (0, +\infty)$; $e<0 (-\infty, 0)$;
d) crec: $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$, decrec: $(1, 3)$;
e) máx $x=1$, mín $x=3$;
f) Un; conc: $(-\infty, 2)$ conv: $(2, +\infty)$
II) a) $\mathbb{R}-\{0\}$; b) Non corta
c) $e<0 (0, +\infty)$; $e>0 (-\infty, 0)$;
d) decrec: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, crec: $(-1, 0) \cup (0, 1)$;
e) máx $x=1$, mín $x=-1$;
f) Ningún; conv: $(-\infty, 0)$ conc: $(0, +\infty)$

Solucións AUTO-AVALIACIÓN

1. $f(0) = -1$
2. $\mathbb{R} - \{2, -2\}$
3. $(3, -15)$
4. $(0, -0,75)$ $(-3, 0)$
5. $f(-3) = 2$
6. $f(28) = f(3) = 6$
7. $k = 0$
8. $\text{TVM}[-3, 0] = -2,25$
9. $(-3, 1)$
10. A partir de 4,25 min a A.

Non esquezas enviarlle as actividades ao titor ►