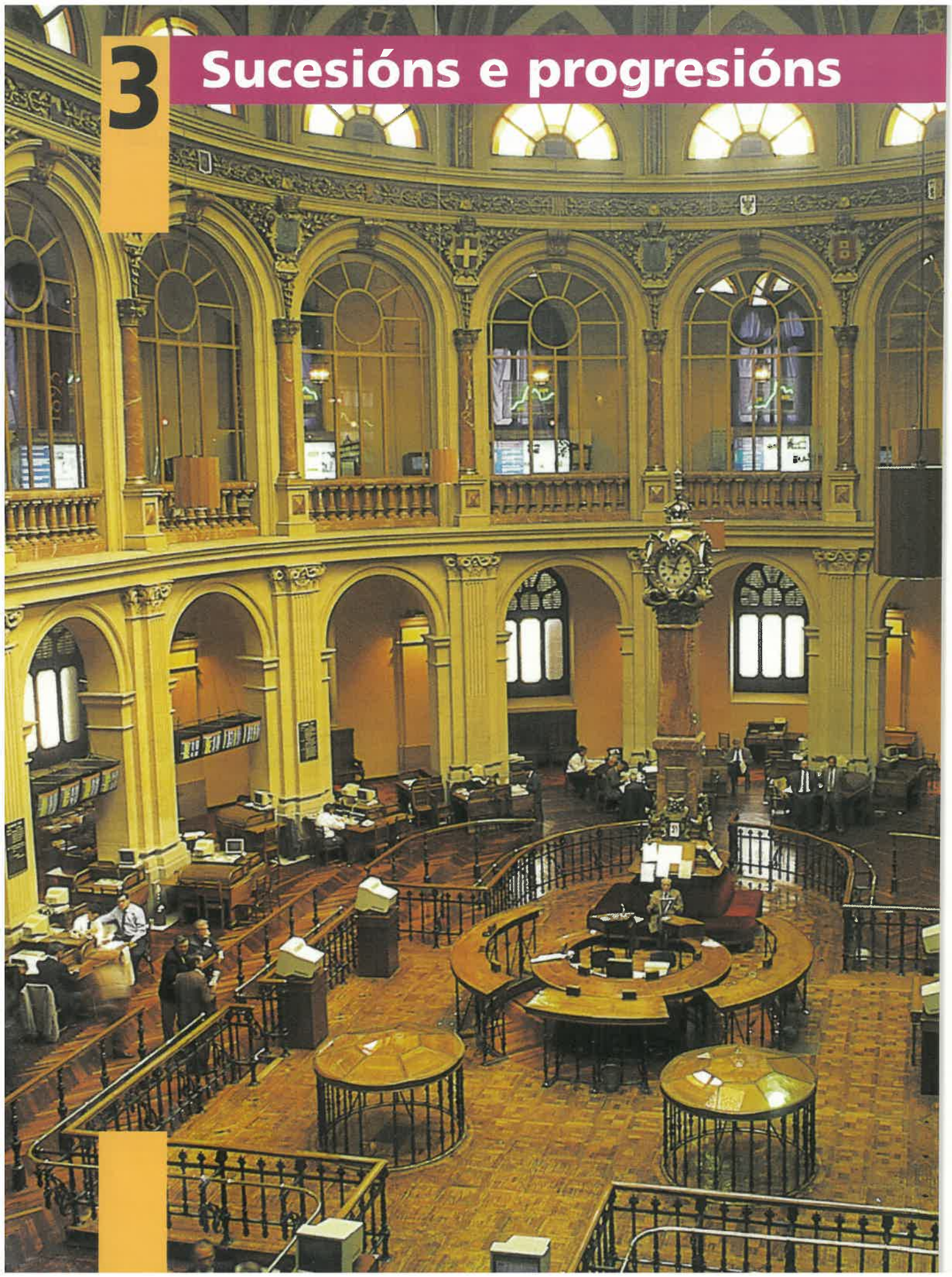


3

Sucesiones e progresi3ns



Neste tema estúdanse as sucesións, que son conxuntos de números ordenados. Entre elas están as progresións aritméticas e xeométricas.

Comézase o tema definindo unha sucesión, os seus termos e o termo xeral, que dan paso ao estudo das progresións aritméticas: concepto de progresión aritmética, termo xeral e suma dos termos dunha progresión aritmética.

Continúase co estudo das progresións xeométricas: concepto de progresión xeométrica, termo xeral, suma dos termos dunha progresión xeométrica e sumas dos termos dunha progresión xeométrica indefinida e decrecente en valor absoluto.

O tema finaliza co estudo dunhas aplicacións das progresións: o interese simple e o interese composto.

As progresións utilízanse en diversas situacións da nosa vida cotiá. Un exemplo é o cálculo do interese composto, que é unha progresión xeométrica e que serve para calcular as cantidades que se deben pagar por un préstamo hipotecario.

ORGANIZA AS TÚAS IDEAS

SUCESIÓN DE NÚMEROS REAIS

son

conxuntos de números

poden ser

progresións
aritméticas

progresións
xeométricas

aplicanse ao

nas que se calcula

nas que se calcula

- termo xeral:
 $a_n = a_1 + (n - 1)d$
- suma:
 $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

- interese simple
- interese composto

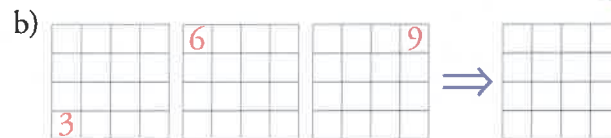
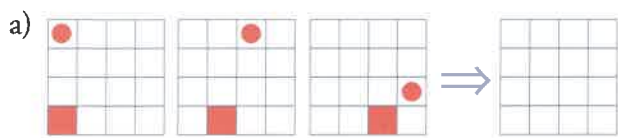
- termo xeral:
 $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$
- suma de n termos:
 $S_n = \frac{a_1 \cdot r - a_1}{r - 1}$
- suma de infinitos termos:
 $|r| < 1; S = \frac{a_1}{1 - r}$

1. Sucesións

PENSA E CALCULA



Sigue as series seguintes:



1.1. Sucesións de números reais

Unha **sucesión de números reais** é un conxunto de números reais ordenados, é dicir, cada número da sucesión ocupa un lugar determinado.

Exemplo

Os números 2, 4, 6, 8, 10, 12... son un conxunto de números que están ordenados e forman unha sucesión.

Lugar	1º	2º	3º	4º	5º	6º	...
Número	2	4	6	8	10	12	...

Obsérvase que son os números pares e que a regra que seguen é que cada número se obtén sumándolle 2 unidades ao anterior. Pódense seguir calculando indefinidamente os números que compoñen esta sucesión.

1.2. Termos dunha sucesión

Os **termos da sucesión** son cada un dos números que forman a sucesión.

Os termos dunha sucesión ocupan un lugar determinado na sucesión. Para indicar este lugar utilízase unha letra cun subíndice numérico, que indica o devandito lugar.

Exemplo

A sucesión 3, 6, 10, 15, 21... pódese representar por:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \dots$$

donde:

- $a_1 = 3$ Significa que o número 3 ocupa o primeiro lugar da sucesión.
- $a_2 = 6$ O número 6 ocupa o segundo lugar da sucesión.
- $a_3 = 10$ O número 10 ocupa o terceiro lugar da sucesión.
- $a_4 = 15$ O número 15 ocupa o cuarto lugar da sucesión, etcétera.

Evitar erros habituais

Non confundas nunca o subíndice que acompaña á letra $a_1, a_2 \dots$, que indica o lugar que ocupa o termo, co valor do termo.

1.3. Regularidades

Unha **sucesión** é **regular** cando os seus termos seguen unha determinada regra.

Unha sucesión regular pódese dar de distintas maneiras:

a) Dando os primeiros termos da sucesión

Consiste en dar os tres ou catro primeiros termos da sucesión e, a partir deles, intentar deducir a regra da sucesión.

Exemplo

2, 5, 8, 11...

Obsérvase que cada termo obtense sumando 3 ao anterior. Pódese seguir a sucesión: $a_5 = 14$, $a_6 = 17$, $a_7 = 20$...

b) Dando a lei de formación

Consiste en dar a lei que xera a sucesión.

Exemplo

A sucesión formada polos cadrados perfectos dos números naturais.

Obtense: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64...

c) Dando o termo xeral da sucesión

Consiste en dar unha fórmula que permita atopar calquera termo da sucesión. Esta é a forma usual en matemáticas para dar unha sucesión de números reais.

1.4. Termo xeral dunha sucesión

O **termo xeral dunha sucesión** é unha fórmula que relaciona o lugar n que ocupa cada termo co seu valor. Representase por a_n

Co termo xeral pódese calcular calquera termo da sucesión substituíndo na fórmula a letra n polo lugar que se desexa.

Exemplo

Escrebe os tres primeiros termos da sucesión $a_n = 4n + 1$

$$a_1 = 4 \cdot 1 + 1 = 5$$

$$a_2 = 4 \cdot 2 + 1 = 9$$

$$a_3 = 4 \cdot 3 + 1 = 13$$

APLICA A TEORÍA

1 Busca os dez primeiros termos das seguintes sucesións:

a) 3, 8, 13, 18...

b) 8, 4, 0, -4...

c) 2, -2, 2, -2...

d) $1/2, 1/4, 1/6, 1/8$...

2 Busca os dez primeiros termos das seguintes sucesións:

a) 2, 1, 2, 4, 2, 7...

b) 1, 1, 2, 3, 5, 8...

c) 2, 1, 4, 3, 6, 5...

d) 1, -2, 4, -8...

3 Calcula os catro primeiros termos das seguintes sucesións:

a) $a_n = 3n + 2$

b) $a_n = (n + 1)^2$

c) $a_n = 3 \cdot 2^n$

d) $a_n = (-2)^n$

4 Busca os catro primeiros termos positivos das sucesións seguintes e trata de encontrar mentalmente a fórmula do termo xeral.

a) Números pares.

b) Números impares.

c) Múltiplos de 5

d) Cubos perfectos.

2. Progresións aritméticas

PENSA E CALCULA



Calcula mentalmente a suma dos 100 primeiros números naturais. Observa que a suma dos termos equidistantes dos extremos son iguais.

$$1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$$

$$1 + 100 = 101, 2 + 99 = 101, 3 + 98 = 101 \dots$$

2.1. Progresión aritmética

Unha **progresión aritmética** é unha sucesión na que cada termo se obtén sumando ao termo anterior un número constante que se chama **diferenza** e que se representa coa letra **d**

A diferenza **d** dunha progresión aritmética calcúlase restando dous termos consecutivos.

Exemplo

A sucesión 3, 7, 11, 15... é unha progresión aritmética.

$$d = a_2 - a_1 = 7 - 3 = 4; \quad d = a_3 - a_2 = 11 - 7 = 4$$

A diferenza é $d = 4$, e cada termo obtense do anterior sumando 4

Calculadoras novas

$$3 = \text{Ans} + 4 = = = \dots$$

Calculadoras antigas

$$4 + + 3 = = = \dots$$

Termos da progresión

$$a_1 = 3 \quad d = 4$$

$$a_2 = a_1 + d = 3 + 4 = 7$$

$$a_3 = a_2 + d = 7 + 4 = 11$$

...

2.2. Termo xeral dunha progresión aritmética

Observa

Cada termo da progresión aritmética é igual ao primeiro termo máis tantas veces a diferenza como termos ten diante; polo tanto, o termo xeral a_n será o primeiro termo máis $n - 1$ veces a diferenza.

O **termo xeral** dunha progresión aritmética é:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

Exemplo

Dada a sucesión 2, 5, 8, 11..., calcula o termo xeral.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_1 = 2$$

$$d = 3$$

$$a_n = 2 + (n - 1) \cdot 3$$

$$a_n = 2 + 3n - 3$$

$$a_n = 3n - 1$$

2.3. Suma dos termos dunha progresión aritmética

A **suma dos n primeiros termos dunha progresión aritmética** represéntase S_n e vén sendo:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Exemplo

Calcula a suma dos 25 primeiros termos da progresión aritmética de termo xeral $a_n = 7n - 5$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \Rightarrow S_{25} = \frac{a_1 + a_{25}}{2} \cdot 25$$

Calcúlase a_1 e a_{25} :

$$a_n = 7n - 5$$

$$a_1 = 7 \cdot 1 - 5 = 2$$

$$a_{25} = 7 \cdot 25 - 5 = 170$$

$$S_{25} = \frac{2 + 170}{2} \cdot 25 = 2\,150$$

Exemplo

Sumar os sete primeiros termos da progresión aritmética:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \dots$$

$$S_7 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$$

$$S_7 = 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

$$2S_7 = 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8$$

Obsérvase que a suma dos termos equidistantes dos extremos é igual á suma do primeiro e do último.

$$2S_7 = 7 \cdot 8$$

$$2S_7 = 56$$

$$S_7 = 28$$

APLICA A TEORÍA

5 Busca o termo xeral das seguintes progresións aritméticas:

a) 5, 9, 13, 17...

b) 6, 3, 0, -3...

c) $2/3, 1/3, 0, -1/3 \dots$

d) $1/2, 1, 3/2, 2 \dots$

6 Escribe o termo xeral e os tres primeiros termos da progresión aritmética cuxo primeiro termo é $a_1 = 6$ e $d = 2,5$

7 Na progresión 5, 9, 13, 17..., que termo vale 49?

8 Nunha progresión aritmética coñecemos os termos $a_5 = 19$ e $a_8 = 28$. Calcula a diferenza e o primeiro termo.

9 Calcula a suma dos 25 primeiros termos da progresión aritmética cuxo termo xeral é:

$$a_n = 2n + 6$$

10 Calcula a suma dos 12 primeiros termos da progresión aritmética cuxo termo xeral é:

$$a_n = 3n/2 + 2$$

3. Progresións xeométricas

PENSA E CALCULA



Calcula mentalmente os dous termos seguintes de cada unha destas sucesións:

- a) 3, 6, 12, 24... b) 20, 10, 5, 5/2... c) 3, 3, 3, 3... d) 5, -5, 5, -5...

3.1. Progresión xeométrica

Unha **progresión xeométrica** é unha sucesión na que cada termo se obtén multiplicando o termo anterior por un número constante que se chama **razón**, e que se representa coa letra **r**

A razón **r** dunha progresión xeométrica calcúlase dividindo dous termos consecutivos.

Exemplo

A sucesión 3, 12, 48, 192... é xeométrica.

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{12}{3} = 4 \quad r = \frac{a_3}{a_2} = \frac{48}{12} = 4 \quad r = \frac{a_4}{a_3} = \frac{192}{48} = 4$$

A razón é $r = 4$, e cada termo da progresión obtense multiplicando por 4 o anterior.

Calculadoras novas

3 [=] Ans × 4 [=] [=] [=] ...

Calculadoras antigas

4 × × 3 [=] [=] ...

Termos da progresión

$$\begin{aligned} a_1 &= 3, \quad r = 4 \\ a_2 &= a_1 \cdot r = 3 \cdot 4 = 12 \\ a_3 &= a_2 \cdot r = 12 \cdot 4 = 48 \\ a_4 &= a_3 \cdot r = 48 \cdot 4 = 192 \\ &\dots \end{aligned}$$

3.2. Termo xeral dunha progresión xeométrica

O **termo xeral** dunha progresión xeométrica é:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Exemplo

Dada a progresión 3, 6, 12, 24..., calcula o termo xeral.

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}; \quad a_1 = 3$$

A razón é:

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{3} = 2$$

O termo xeral é:

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

3.3. Suma dos termos dunha progresión xeométrica

A **suma dos n primeiros termos** dunha progresión xeométrica represéntase **S_n** e vén sendo:

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}, \quad r \neq 1$$

Exemplo

Calcula a suma dos sete primeiros termos da progresión xeométrica 6, 12, 24, 48...

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1} \Rightarrow S_7 = \frac{a_7 \cdot r - a_1}{r - 1}$$

$$a_1 = 6, r = \frac{12}{6} = 2$$

$$a_n = 6 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow a_7 = 6 \cdot 2^{7-1} = 6 \cdot 2^6 = 6 \cdot 64 = 384$$

$$S_7 = \frac{384 \cdot 2 - 6}{2 - 1} = 762 \quad \boxed{384} \times \boxed{2} - \boxed{6} = \boxed{762}$$

3.4. Suma dos termos dunha progresión xeométrica indefinida e decrecente en valor absoluto

A suma de todos os termos dunha progresión xeométrica con $|r| < 1$ é:

$$S = \frac{a_1}{1 - r}$$

Exemplo

Calcula a suma dos infinitos termos da progresión xeométrica 3, 1, 1/3...

$$S = \frac{a_1}{1 - r}; a_1 = 3, r = \frac{1}{3}$$

$$S = \frac{3}{1 - 1/3} = \frac{3}{2/3} = 3 : \frac{2}{3} = 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\boxed{3} \div \boxed{\left(\boxed{1} - \boxed{1} \div \boxed{3} \right)} = \boxed{4,5}$$

APLICA A TEORÍA

- 11 Busca o termo xeral das seguintes progresións xeométricas:

a) 5, 15, 45, 135... b) 6, 3, 3/2, 3/4...

- 12 Dada unha progresión xeométrica cuxo primeiro termo é $a_1 = 4$ e a razón $r = 5$, calcula:

a) a_6 b) a_{10} c) a_n

- 13 Na progresión xeométrica 2, 4, 8, 16, 32..., que termo vale 1024?

- 14 Busca a razón da progresión xeométrica que ten $a_4 = 135$ e $a_6 = 1215$

- 15 Calcula a suma dos 10 primeiros termos das seguintes progresións xeométricas:

a) 2, 14, 98, 686... b) 3, -6, 12, -24...

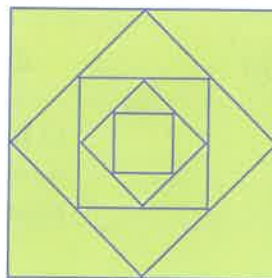
- 16 Calcula a suma dos infinitos termos das seguintes progresións xeométricas:

a) 1/5, 1/25, 1/125, 1/625...

b) 3, 2, 4/3, 8/9, 16/27...

- 17 A suma dos infinitos termos dunha progresión xeométrica é 6 e o seu primeiro termo é 4. Calcula a razón.

- 18 Se nun cadrado de área 8 m^2 se unen os puntos medios, obtense outro cadrado, e así sucesivamente. Calcula a sucesión das áreas dos devanditos cadrados. Que tipo de progresión é?



4. Aplicacións: interese simple e composto

PENSA E CALCULA



Se se depositan nunha cartilla de aforros 1 000 € e se paga un 5% de interese anual, canto diñeiro producen ao cabo dun ano?

Nomenclatura

C = Capital final
 c = capital inicial
 I = Interese
 t = tempo en anos
 R = Rédito ou tanto por cento
 $r = R/100 \Rightarrow$ Tanto por un
Se $R = 4,5\% \Rightarrow r = 0,045$

O interese acumulado é unha **progresión aritmética** de diferenza 80

$$a_1 = 80 \text{ €}$$

$$a_2 = 160 \text{ €}$$

$$a_3 = 240 \text{ €}$$

Períodos de capitalización

Un período de capitalización é o intervalo de tempo ao final do cal se cobran os intereses. Este período pode ser anual, semestral, trimestral, mensual ou diario.

Se o tempo que se deposita o diñeiro é en:

• Trimestres: $I = \frac{c \cdot r \cdot t}{4}$

• Meses: $I = \frac{c \cdot r \cdot t}{12}$

• Días: $I = \frac{c \cdot r \cdot t}{360}$

4.1. Interese simple

O **interese** é a cantidade de diñeiro que produce un capital depositado nunha entidade financeira.

O **interese simple** é aquel que non se acumula ao capital para xerar máis intereses. O capital inicial permanece invariable. A súa fórmula é:

$$I = c \cdot r \cdot t$$

O capital final que se obtén é:

$$C = c + I$$

Exemplo

Luís deposita 1 000 € durante 3 anos a un 8% de interese. Canto gaña despois dos 3 anos? Cal será o capital final ao cabo dos tres anos?

$$I = c \cdot r \cdot t$$

$$I = 1\,000 \cdot 0,08 \cdot 3 = 240 \text{ €} \quad \boxed{1000} \times \boxed{0.08} \times \boxed{3} = \boxed{240}$$

$$C = c + I \Rightarrow C = 1\,000 + 240 = 1\,240 \text{ €}$$

4.2. Distintos períodos de capitalización

Se o tempo que se deposita o diñeiro non é un ano, cóbrase a parte proporcional do interese anual.

Exemplo

Deposítanse 2 000 € durante 3 anos a un 5% de interese. Se Facenda retén un 18% dos intereses, que interese se obterá ao rematar o devandito período?

O tanto por un será: $0,05 \cdot 0,82 = 0,041$

$$I = c \cdot r \cdot t$$

$$I = 2\,000 \cdot 0,041 \cdot 3 = 246 \text{ €}$$

$$\boxed{2000} \times \boxed{0.041} \times \boxed{3} = \boxed{246}$$

4.3. Interese composto

O **interese composto** é aquel que se acumula ao capital para ir xerando novos intereses. Un capital inicial, c , ao $R\%$ de rédito durante t anos, producirá un capital final:

$$C = c(1 + r)^t, \quad r = \frac{R}{100}$$

O **capital final** é unha **progresión xeométrica** de primeiro termo c e a razón é $1 + r$

Exemplo

Deposítanse 1 000 € ao 5% de interese composto durante 3 anos. Que capital teremos ao finalizar ese tempo?

O capital final será:

$$C = c(1 + r)^t$$

$$C = 1\,000 \cdot 1,05^3 = 1\,157,63 \text{ €}$$

$$1000 \times 1.05^3 = 1157,625$$

4.4. Distintos períodos de capitalización

Se os intereses se aboan n veces ao ano cun rédito r durante t anos, o capital final será:

$$C = c \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{n \cdot t}$$

Exemplo

Deposítanse 3 000 € a un interese composto do 7% durante 3 anos, con períodos de capitalización mensuais. Se Facenda retén o 18% dos intereses cando se recupera o capital, calcula o capital final.

O capital final será:

$$C = c \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{n \cdot t}$$

$$C = 3\,000 \left(1 + \frac{0,07}{12} \right)^{12 \cdot 3} = 3\,698,78 \text{ €}$$

$$3000 \times \left(1 + \frac{0.07}{12} \right)^{12 \times 3} = 3698,78$$

Os intereses son: $3\,698,78 - 3\,000 = 698,78 \text{ €}$

Facenda retén: $698,78 \cdot 0,18 = 125,78 \text{ €}$

O capital final neto será: $3\,698,78 - 125,78 = 3\,573 \text{ €}$

APLICA A TEORÍA

19 Nun depósito dunha entidade financeira ofrecen un 6% de interese simple anual. Se se depositan 7 500 € durante 2 anos e Facenda retén o 18%, calcula o capital acumulado ao finalizar o período.

20 Calcula os anos que estivo depositado un capital de 5 000 € ao 3,5% de interese se se xeraron 700 € de intereses, sen o desconto de Facenda.

21 Calcula o rédito ao que se depositaron 18 000 € a interese simple durante 5 anos se, unha vez retido o 18% de Facenda, os intereses xerados son de 2 952 €

22 Deposítanse 6 500 € ao 5% de interese composto durante 4 anos. Facenda retén o 18% dos intereses cando se recupera o capital. Calcula o capital final se os intereses se aboan anualmente.

23 Deposítanse 35 500 € ao 4% de interese composto con pagamento de intereses diarios durante 2 anos. Calcula o capital final se Facenda retén o 18% ao rematar o prazo.

24 Que capital inicial é necesario para que, a interese composto durante 4 anos ao 5% anual e con períodos de capitalización anuais, se acumule un capital final de 15 558,48 €?



Para profundar: demostracións

2.3. Suma dos termos dunha progresión aritmética

A suma dos n primeiros termos dunha progresión aritmética represéntase S_n e vén sendo:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n = a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + \dots + a_1 + (n-2)d + a_1 + (n-1)d$$

Escríbese S_n en orde inversa e súmanse as dúas expresións obtidas:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_3 + a_2 + a_1 = a_n + a_n - d + a_n - 2d + \dots + a_n - (n-2)d + a_n - (n-1)d$$

$$\begin{array}{r} S_n = a_1 + a_1 + \cancel{d} + a_1 + \cancel{2d} + \dots + a_1 + \cancel{(n-2)d} + a_1 + \cancel{(n-1)d} \\ S_n = a_n + a_n - \cancel{d} + a_n - \cancel{2d} + \dots + a_n - \cancel{(n-2)d} + a_n - \cancel{(n-1)d} \\ \hline 2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) \end{array}$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n \Rightarrow S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

3.3. Suma dos termos dunha progresión xeométrica

A suma dos n primeiros termos dunha progresión xeométrica represéntase S_n e vén sendo:

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

Multiplícanse os dous membros desta igualdade pola razón r e réstanse as dúas igualdades:

$$\begin{array}{r} S_n \cdot r = \cancel{a_1 \cdot r} + \cancel{a_2 \cdot r} + \cancel{a_3 \cdot r} + \dots + \cancel{a_{n-1} \cdot r} + a_n \cdot r \\ -S_n = -a_1 - \cancel{a_2} - \cancel{a_3} - \dots - \cancel{a_n} \\ \hline S_n \cdot r - S_n = -a_1 + a_n \cdot r \end{array}$$

$$S_n \cdot r - S_n = a_n \cdot r - a_1 \Rightarrow S_n \cdot (r - 1) = a_n \cdot r - a_1 \Rightarrow S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}; (r \neq 1)$$

3.4. Suma dos termos dunha progresión xeométrica indefinida e decrecente en valor absoluto

A suma de todos os termos dunha progresión xeométrica con $|r| < 1$ é:

$$S = \frac{a_1}{1 - r}$$

Como nestas progresións os termos se aproximan cada vez máis a cero, pódese dicir que $a_n \cdot r = a_1 \cdot r^n$ é practicamente cero. Observa que r^n é case cero cando n é moi grande.

Ao substituír $a_n \cdot r = 0$ na fórmula $S = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$, obtense $S = \frac{-a_1}{r - 1}$

Se se cambia o signo no numerador e no denominador, e se invirte a orde no denominador, temos $S = \frac{a_1}{1 - r}$, $|r| < 1$



1. Sucesións

- 25 Escribe os seis primeiros termos das seguintes sucesións:
- 1, 9, 17, 25...
 - 2, -4, 8, -16...
 - Os múltiplos de 5
 - Os inversos dos cadrados dos números naturais.
- 26 Busca os dez primeiros termos das seguintes sucesións:
- $x, 2x, 4x, 8x, \dots$
 - 1, 3, 4, 3, 9...
 - 3, 3, 6, 9, 15...
 - O triplo dos números naturais.
- 27 Calcula os cinco primeiros termos das seguintes sucesións:
- $a_n = -4n + 2$
 - $a_n = n^2 + 1$
 - $a_n = 2^{-n}$
 - $a_n = (n - 2)^n$

2. Progresións aritméticas

- 28 Busca o termo xeral das seguintes progresións aritméticas:
- 7, 11, 15...
 - 3, -2, -7...
 - 7, -3, 1...
 - $1/2, 3/4, 1, \dots$
- 29 Escribe o termo xeral e os tres primeiros termos da progresión aritmética cuxo primeiro termo é $a_1 = 3$ e cuxa diferenza é $d = -15/4$
- 30 Nunha progresión aritmética, $a_{11} = 3$ e a diferenza é $d = 2/7$. Calcula o primeiro termo.
- 31 Nunha progresión aritmética o primeiro termo vale 3 e o sexto termo vale 8. Calcula a diferenza.
- 32 Nas seguintes progresións aritméticas, calcula o termo que ocupa o último valor:
- 4, 6, 8..., 30
 - $7/2, 5/2, 3/2, \dots, -21/2$

- 33 Nunha progresión aritmética coñecemos os termos $a_5 = 7$ e $a_7 = 25/3$. Calcula a diferenza e o primeiro termo.

- 34 Calcula a suma dos 15 primeiros termos da progresión aritmética cuxo termo xeral é

$$a_n = 3n + 12$$

- 35 Calcula a suma dos 12 primeiros termos da progresión aritmética cuxo termo xeral é

$$a_n = n/3 + 4/3$$

3. Progresións xeométricas

- 36 Busca o termo xeral das seguintes progresións xeométricas:

- 6, 12, 24...
- $1/3, 1, 3, \dots$
- 3, 6, -12...
- $3/4, -1/2, 1/3, \dots$

- 37 Dada unha progresión xeométrica cuxo primeiro termo é $a_1 = 8$ e cuxa razón é $r = 3/4$, calcula:

- a_6
- a_{10}
- a_{20}
- a_n

- 38 Nunha progresión xeométrica, $a_7 = 64/81$ e a razón $r = 2/3$. Calcula o primeiro termo.

- 39 Na progresión xeométrica -5, 10, -20..., que termo vale 640?

- 40 Nunha progresión xeométrica o primeiro termo é $1/3$ e o sétimo termo é 243. Calcula a razón.

- 41 Busca a razón da progresión xeométrica que ten $a_1 = 27/64$ e $a_8 = 2/81$

- 42 Calcula a suma dos 12 primeiros termos das seguintes progresións:

- 4, -8, 16...
- $1/10, 1/5, 2/5, \dots$

- 43 Calcula a suma dos infinitos termos das seguintes progresións:

- 9, 3, 1...
- $9/4, 3/2, 1, \dots$

Exercicios e problemas

44 Cantos termos hai que tomar da progresión 5, 10, 20... para que a suma sexa 2 555?

45 A suma dos infinitos termos dunha progresión é 12 e a súa razón $r = 1/2$. Busca o primeiro termo.

4. Aplicacións: interese simple e composto

46 Nun depósito ofrecen un 3,5% de interese simple por 4 anos. Se se depositan 12 000 € e Facenda retén o 18% dos intereses, calcula o capital acumulado ao finalizar o período.

47 Calcula os anos que estivo depositado un capital de 25 500 € ao 6% de interese se, realizada a retención de Facenda do 18%, xeráronse 5 018,40 € de intereses.

48 Calcula o rédito ou tanto por cento ao que se depositaron 20 000 € a interese simple duran-

te 2 anos se, unha vez retido o 18% de Facenda, os intereses xerados son de 1 640 €

49 Unha entidade financeira ofrece un 3,5% anual por un depósito renovable todos os meses. Se os intereses non se acumulan no depósito e este se renova 5 meses, que interese se obterá por 18 000 € unha vez descontado o 18% de retención de Facenda?

50 Que capital se acumula se se colocan 31 000 € ao 5% de interese composto durante 3 anos se os intereses se aboan trimestralmente e Facenda retén o 18% ao finalizar o período?

51 Que capital inicial é necesario ter depositado para que, a interese composto durante 5 anos ao 6% anual e con períodos de capitalización mensuais, se acumule un capital final de 26 977 €?

Para ampliar

52 Estuda se as seguintes sucesións son progresións aritméticas ou xeométricas e busca o termo xeral:

a) $-3/5, 3/10, 6/5...$

b) $1/3, 35/12, 13/6...$

c) $5/6, 1/2, 3/10...$

d) $3/4, -1/2, 1/3...$

53 Escribe o termo xeral e os tres primeiros termos da progresión aritmética cuxo primeiro termo é $a_1 = 3/4$ e cuxa diferenza é $d = 0,5$

54 Calcula o termo que ocupa o lugar 100 na progresión:

$$-5, -13/3, -11/3...$$

55 Calcula o primeiro termo e a diferenza nas progresións aritméticas nas que:

a) $a_3 = 70$ e $a_6 = 115$

b) $a_5 = 6$ e $a_9 = 7$

56 Calcula a suma dos 12 primeiros termos da progresión aritmética cuxo termo xeral é $a_n = 5n/2 + 1/2$

57 Dada unha progresión xeométrica cuxo primeiro termo é $a_1 = 3/8$ e cuxa razón é $r = 4/3$, calcula:

a) a_5

b) a_{15}

c) a_{30}

d) a_n

58 Calcula a suma dos 5 primeiros termos das seguintes progresións:

a) 12, 4, $4/3...$

b) $9/4, 3/2, 1...$

59 Calcula a suma dos infinitos termos das seguintes progresións:

a) $5, 5/4, 5/16...$

b) $\sqrt{2}, 1, 1/\sqrt{2}...$



Exercicios e problemas

- 60 Nunha progresión xeométrica $a_4 = 125$ e $a_6 = 3125$. Calcula o primeiro termo e a razón.
- 61 O primeiro termo dunha progresión xeométrica é 225, e o cuarto termo é $72/5$. Calcula a suma dos seus infinitos termos.
- 62 Calcula os anos que estivo depositado un capital de 28 500 € ao 4,5% de interese simple se se xeraron 5 258,25 € unha vez retido o 18% de Facenda.
- 63 Calcula o rédito ao que se depositaron 15 000 € a interese simple durante 3 anos se, unha vez retido o 18% de Facenda, os intereses xerados son de 1 660,50 €
- 64 Unha entidade financeira ofrece un 4,25% anual por un depósito renovable todos os meses. Se os intereses non se acumulan no depósito e

este se renova 3 meses, que interese se obtén por 24 000 € coa retención do 18% de Facenda?

- 65 Que capital bruto se acumula se se colocan 40 500 € ao 4,5% de interese composto durante 4 anos se os intereses se aboan segundo as modalidades seguintes:
- a) Anualmente.
b) Mensualmente.

Con calculadora

- 66 Calcula os 5 seguintes termos das progresións:
- a) 3,27; 3,45; 3,63...
b) 1 000, 1 200, 1 440...

Problemas

- 67 Continúa as seguintes series de números figurados, ata obter tres termos máis:

a) 1 3 6

b) 1 4 9

- 68 Calcula a suma dos 15 primeiros múltiplos positivos de 6
- 69 Calcula a suma dos primeiros 100 números impares.
- 70 Un móbil avanza 5 metros nun segundo e segue avanzando de maneira que cada segundo avanza 2 metros máis que no segundo anterior. Canto percorrerá nun minuto?
- 71 Un dependente recibe o primeiro día de traballo unha gratificación de 10 €. Nos días sucesivos, esta gratificación vai aumentando en 1,5 €, de maneira que, na súa última xornada, cobra 143,5 €. Cantos días traballou e canto cobrou en total polas gratificacións?

- 72 O prezo da primeira entrega dunha colección de minerais é de 2 €. Nas seguintes entregas o prezo sobe 0,03 € máis que na anterior. Se a colección consta de 100 exemplares, canto se pagará polo total da colección?

- 73 Xurxo cobra 18 € semanais de paga e decide aforrar 1,8 € o primeiro mes e aumentar cada mes 0,75 € máis que o anterior. Canto aforrará nun ano?

- 74 Fíxose un pozo de 40 m de profundidade. Polo primeiro metro pagáronse 7,5 € e por cada metro sucesivo pagáronse 2,3 € máis que polo anterior. Cal é o custo do pozo?

- 75 Calcula os lados dun triángulo rectángulo sabendo que están en progresión aritmética e que o menor deles mide 6 cm

- 76 Quérese saldar semanalmente unha débeda. A primeira semana páganse 5 € e en cada unha das semanas seguintes vanse pagando 4 € máis que na anterior. Se se paga en 30 semanas, a canto ascende o importe da débeda?



Exercicios e problemas

- 77** Os ángulos dun hexágono están en progresión aritmética, e o menor deles mide 40° . Calcula os demais.
- 78** Nun cadrado únense os puntos medios dos seus lados e obtense outro cadrado inscrito. Neste último cadrado repítese a operación, obténdose outro cadrado inscrito. Se o lado do primeiro cadrado mide 2 cm, calcula a suma das áreas de todos os cadrados.
- 79** Unha persoa gaña no seu establecemento un 7% máis do que gañou o ano anterior. Se o primeiro ano gañou 28 000 €, canto obterá en media ducia de anos?
- 80** Déixase caer unha pelota dunha altura de 52 cm. Logo de cada bote no chan, sobe $\frac{3}{4}$ cm da altura da que cae. Que lonxitude percorrerá a pelota antes de chegar ao repouso?
- 81** Fórmase unha sucesión de círculos concéntricos nos que cada radio é a metade do radio do círculo anterior. Se o primeiro círculo ten un diámetro de 4 cm, calcula a suma das áreas de todos os círculos.
- 82** Que capital inicial é necesario ter depositado para que, a interese composto durante 3 anos ao 5% anual e con períodos de capitalización trimestrais, se acumule un capital final bruto de 29 692,10 €?
- 83** Calcula os anos que estivo depositado un capital de 45 000 € ao 6,5% de interese simple se, unha vez feita a retención do 18% de Facenda, xeráronse 7 195,50 €
- 84** Unha entidade financeira paga o 7,5% do diñeiro depositado se este se mantén 3 anos. Calcula, nos seguintes casos, canto se gañará ao finalizar os tres anos por unha imposición de 10 000 € se Facenda retén o 18%:
- Os intereses se ingresan nunha conta distinta.
 - Os intereses ingrénsanse na mesma conta.
- 85** Calcula o rédito ao que se depositaron 12 000 € a interese simple durante 18 meses se os intereses xerados, coa retención de Facenda descontada, foron de 664,20 €

Para profundar

- 86** Comproba que as seguintes expresións están en progresión aritmética e calcula o sétimo termo:
- $$x^2 - 2x + 1, x^2 + 1 \text{ e } x^2 + 2x + 1$$
- 87** Nunha progresión aritmética, o primeiro termo e o décimocuarto suman 342. Canto suman o quinto e o décimo termo?
- 88** Continúa as seguintes series de números figurados ata obter tres termos máis:



- 89** Nunha progresión aritmética o primeiro termo é 2 e o undécimo é 52. Razona o que vale o sexto termo.
- 90** A suma dos infinitos termos dunha progresión xeométrica decrecente é 6 e a suma dos seus dous primeiros termos é $16/3$. Calcula o primeiro termo.
- 91** Dun vaso cheo de leite baléirase a metade e vólvese encher de auga. Retírase a metade do novo contido e vólvese encher con auga. Se este proceso se repite seis veces, que parte de auga contén o vaso?
- 92** Un depósito ofrece un 4% de interese simple anual, renovable mensualmente e sen acumular os intereses no depósito. Canto tempo se deben depositar 12 000 € para xerar uns intereses netos, é dicir, descontando o 18% de Facenda, de 984 €?
- 93** Calcula o capital inicial que se debe depositar ao 6% de interese composto con períodos de capitalización mensual, para que, ao cabo de 10 anos, se convertan en 33 204 € brutos.
- 94** Calcula o tempo que hai que ter un capital depositado nun banco ao 5% con interese simple, para que o capital se duplique.

Táboa de cotas mensuais por 1 000 € para amortizacións de créditos hipotecarios





3. SUCESIÓNS E PROGRESIÓNS

Paso a paso

Axusta a configuración: na barra de menú elixe **Opcións/Axustes de Modo.../Simplificación/Restablecer**

- 99** Calcula os dez primeiros termos da seguinte sucesión:

$$a_n = 4n + 1$$

Solución:

- a) Na **Entrada de Expresións** escribe:
vector (4n + 1, n, 10)

- b) Preme  **Introducir e Simplificar**

[5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41]

- 100** Dada a seguinte sucesión, calcula a suma dos 25 primeiros termos:

$$a_n = 7n - 5$$

Solución:

- a) Na **Entrada de Expresións** escribe:
7n-5

- b) Preme  **Introducir Expresión**

- c) Na barra de ferramentas elixe  **Calcular sumatorios**, escribe en **Límite inferior:** 1, e en **Límite superior:** 25 e fai *clic* no botón **Simplificar**

2150

Enuncia os seguintes problemas e resólveos coa axuda de DERIVE:

- 101** Na progresión $a_n = 3n + 4$, que termo vale 52?

Solución:

Formulación: $3n + 4 = 52$

- a) Na **Entrada de Expresións** escribe:
3n + 4 = 52

- b) Preme  **Introducir Expresión**

- c) Na barra de ferramentas elixe  **Resolver ou despxar** e fai *clic* no botón **Resolver:**

$n = 16$

- 102** Nunha progresión xeométrica, $a_4 = 135$ e $a_6 = 1215$. Encontra o primeiro termo e a razón da progresión.

Solución:

Formulación: chamamos **a** ao primeiro termo e **r** á razón.

$$a \cdot r^3 = 135$$

$$a \cdot r^5 = 1215$$

- a) Elixo na barra de menús **Resolver/Sistema...**

Selecciona en **Número:** 2

- b) Escribe a primeira ecuación:

$$ar^3 = 135$$

- c) Escribe a segunda ecuación:

$$ar^5 = 1215$$

- d) Fai *clic* no botón **Resolver**

$$[a = 5 \wedge r = 3, a = -5 \wedge r = -3]$$

Obtéñense dúas posibles solucións.

- 103** Depóstanse 1 000 € ao 5% de interese composto durante 3 anos. Que capital teremos ao rematar ese tempo?

Solución:

Formulación: $C = c(1 + r)^t$

- a) Na **Entrada de Expresións** escribe:

$$c(1 + r)^t$$

- b) Preme  **Substituír variables** e en **Novo Valor** elixe para **c**, 1 000; para **r**, 0.05 e para **t**, 3. Fai *clic* no botón **Simplificar**

- c) Na barra de ferramentas elixe  **Aproximar**

1157.625

Capital final: 1 157,63 €

- 104** **Internet.** Abre a páxina web: www.xerais.es e elixe **Matemáticas, curso e tema.**

Así funciona

Termos dunha sucesión

Emprégase a función **vector**, que calcula os primeiros termos dunha sucesión dada por unha fórmula (dentro das parénteses ponse a fórmula, a variable e o número de termos).

Aproximar valores: elíxese na barra de ferramentas  **Aproximar**

Resolver ecuacións: elíxese na barra de ferramentas  **Resolver ou despexar**

Substituír valores: elíxese na barra de ferramentas  **Substituír variables**

Suma de sucesións: elíxese na barra de ferramentas  **Calcular sumatorios**

Resolver sistemas: elíxese na barra de menús **Resolver/Sistema...**

Practica

105 Encontra os termos xerais das seguintes sucesións e calcula os dez primeiros termos de cada unha delas:

- a) 12, 20, 28...
- b) 14, 4, -6...
- c) 5, 15, 45...
- d) 6, 3, 3/2...

106 Calcula os oito primeiros termos das seguintes sucesións:

- a) $a_n = 4^n + 2$
- b) $a_n = 3n^2 - 5n + 2$
- c) $a_n = 4 \cdot (-2/3)^n$
- d) $a_n = (-2)^n$

107 Calcula a suma dos 125 primeiros termos da progresión aritmética cuxo termo xeral é $a_n = 4n/5 + 2/3$

108 Calcula a suma dos 7 primeiros termos da progresión xeométrica cuxo termo xeral é $a_n = 3 \cdot 2^n$

109 Calcula a suma dos infinitos termos da seguinte progresión:

3, 1, 1/3...

Enuncia os seguintes problemas e resólveos coa axuda de DERIVE:

110 Na progresión 9, 5, 1..., que lugar ocupa o termo que vale -47?

111 Nunha progresión aritmética coñecemos os termos $a_6 = 23/6$ e $a_9 = 35/6$. Calcula a diferenza e o primeiro termo.

112 Na progresión xeométrica 8, 2, 1/2..., que termo vale 1/2 048?

113 Busca a razón da progresión xeométrica que ten $a_4 = 32/9$ e $a_6 = 512/81$

114 Depóstanse 2 000 € durante 3 anos a un 5% de interese. Se Facenda retén un 18% dos intereses, que interese se obtén ao rematar o dito período?

115 Depóstanse 3 000 € a un interese composto do 7% durante 3 anos con períodos de capitalización mensuais. Se Facenda retén o 18% cando se recupera o capital, calcula o capital final.



3. SUCESIÓN E PROGRESIÓN

Paso a paso

- 99** Calcula os dez primeiros termos da seguinte sucesión:

$$a_n = 4n + 1$$

Solución:

- a) Escribe (o símbolo Apunta a, está en)

aplicar_función(n → 4n + 1, 1..10) →

- b) Fai clic en **Calcular**

3. Sucesións e progresións
 Xiana Outeiro Vilar
 Brais Méndez Eiras
 Paso a paso
Exercicio 99
aplicar_función(n → 4n + 1, 1..10) → {5,9,13,17,21,25,29,33,37,41}

- 100** Dada a seguinte sucesión, calcula a suma dos 25 primeiros termos:

$$a_n = 7n - 5$$

Solución:

- a) Na barra de menús , elixe

- b) Completa os cadros de texto e preme **Calcular**

Exercicio 100
 $\sum_{n=1}^{25} (7n - 5) \rightarrow 2150$

Enuncia os seguintes problemas e resólveos coa axuda de Wiris:

- 101** Na progresión $a_n = 3n + 4$, que termo vale 52?

Solución:

Formulación: $3n + 4 = 52$

- a) Para escribir a ecuación, elixe en a opción **resolver ecuación** e escribe cada un dos membros.

- b) Preme **Calcular**

Problema 101
resolver(3n + 4 = 52) → {{n=16}}

- 102** Nunha progresión xeométrica, $a_4 = 135$ e $a_6 = 1215$. Busca o primeiro termo e a razón da progresión.

Solución:

Formulación: chamamos **a** ao primeiro termo e **r** á razón.

$$a \cdot r^3 = 135$$

$$a \cdot r^5 = 1215$$

- a) Para introducir o sistema de ecuacións, elixe en a opción **resolver sistema** e no cadro de texto **Ecuacións** escribe 2

- b) Escribe cada un dos membros das dúas ecuacións.

- c) Preme **Calcular**

Problema 102
resolver $\begin{cases} a \cdot r^3 = 135 \\ a \cdot r^5 = 1215 \end{cases} \rightarrow \{ \{a=-5, r=-3\}, \{a=5, r=3\} \}$
 Obtéñense dúas solucións posibles.

- 103** Depóstanse 1 000 € ao 5% de interese composto durante 3 anos. Que capital teremos ao rematar ese tempo?

Solución:

Formulación: $C = c(1 + r)^t$

- a) Escribe os valores das variables entre chaves (o símbolo **Implica** está en) e, a continuación, a fórmula entre parénteses.

- b) Preme **Calcular**

Problema 103
{c → 1000, r → 0.05, t → 3} (c · (1 + r)^t) → 1157.6
Capital final: 1 157,6 €

- 104** **Internet.** Abre a páxina web: www.xerais.es e elixe **Matemáticas**, **curso** e **tema**.

Así funciona

Menú operacións

Operacións



Sumatorio

resolver ecuación

resolver sistema ▼

Menú símbolos

Símbolos



Implica



Apunta a

Termos dunha sucesión

Emprégase a función **aplicar_función**, que calcula os primeiros termos dunha sucesión dada por unha fórmula (dentro das parénteses pónse a variable, a fórmula e o número de termos). Exemplo:

aplicar_función($n \rightarrow 4n + 1, 1..10$) →

Substituír varias variables nunha fórmula

Escríbense os valores das variables entre chaves e, a continuación, a fórmula entre parénteses. Exemplo:

{ $c \Rightarrow 1000, r \Rightarrow 0.05, t \Rightarrow 3$ }($c \cdot (1 + r)^t$) → 1157.6

Practica

105 Busca os termos xerais das seguintes sucesións e calcula os dez primeiros termos de cada unha delas:

- a) 12, 20, 28...
- b) 14, 4, -6...
- c) 5, 15, 45...
- d) 6, 3, 3/2...

106 Calcula os oito primeiros termos das seguintes sucesións:

- a) $a_n = 4^n + 2$
- b) $a_n = 3n^2 - 5n + 2$
- c) $a_n = 4 \cdot (-2/3)^n$
- d) $a_n = (-2)^n$

107 Calcula a suma dos 125 primeiros termos da progresión aritmética cuxo termo xeral é $a_n = 4n/5 + 2/3$

108 Calcula a suma dos 7 primeiros termos da progresión xeométrica cuxo termo xeral é $a_n = 3 \cdot 2^n$

109 Calcula a suma dos infinitos termos da seguinte progresión:

3, 1, 1/3...

Enuncia os seguintes problemas e resólveos coa axuda de Wiris:

110 Na progresión 9, 5, 1..., que lugar ocupa o termo que vale -47?

111 Nunha progresión aritmética coñecemos os termos $a_6 = 23/6$ e $a_9 = 35/6$. Calcula a diferenza e o primeiro termo.

112 Na progresión xeométrica 8, 2, 1/2..., que termo vale 1/2 048?

113 Busca a razón da progresión xeométrica que ten $a_4 = 32/9$ e $a_6 = 512/81$

114 Depósitanse 2 000 € durante 3 anos a un 5% de interese. Se Facenda retén un 18% dos intereses, que interese se obtén ao rematar o dito período?

115 Depósitanse 3 000 € a un interese composto do 7% durante 3 anos con períodos de capitalización mensuais. Se Facenda retén o 18% cando se recupera o capital, calcula o capital final.