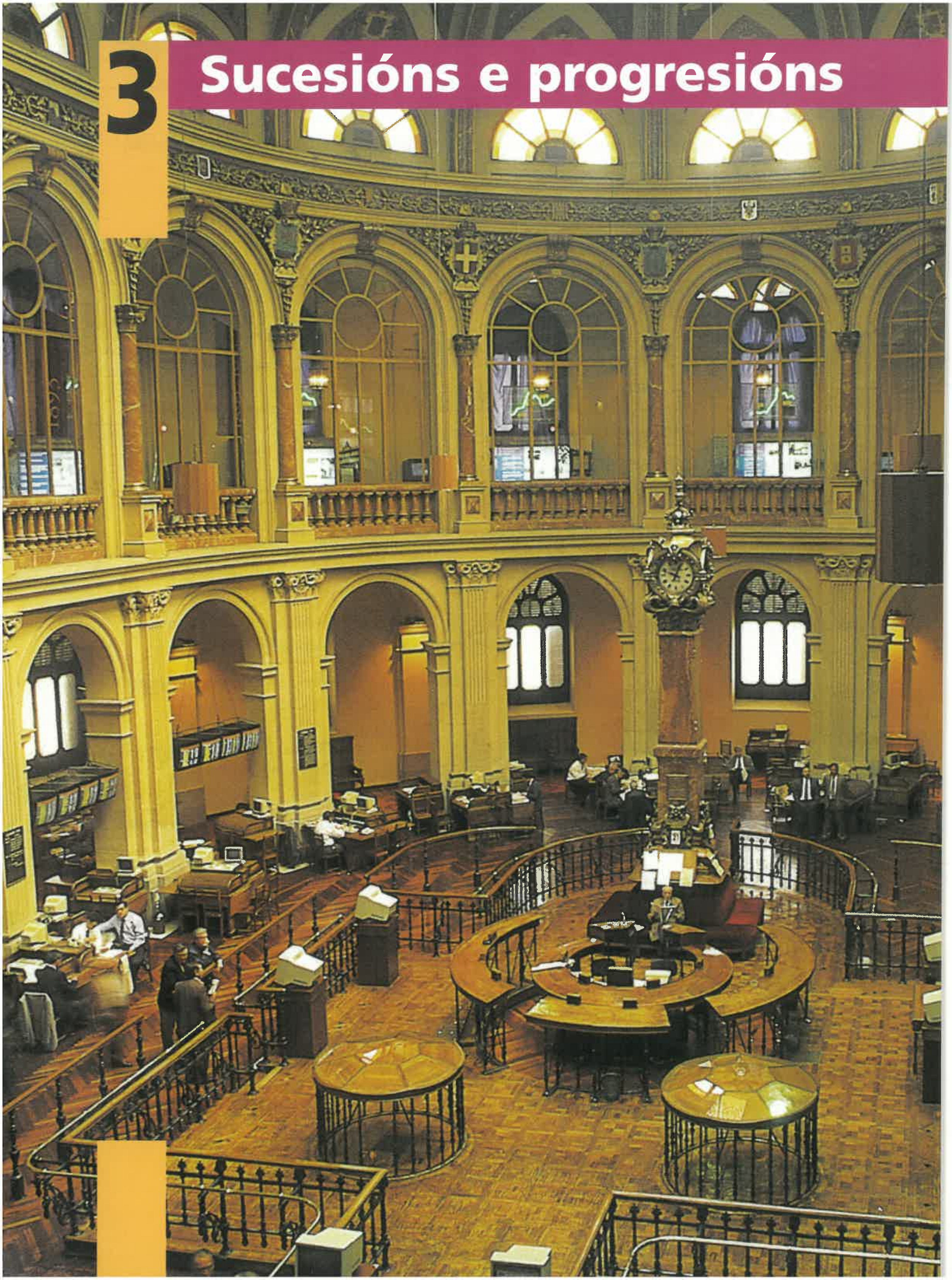
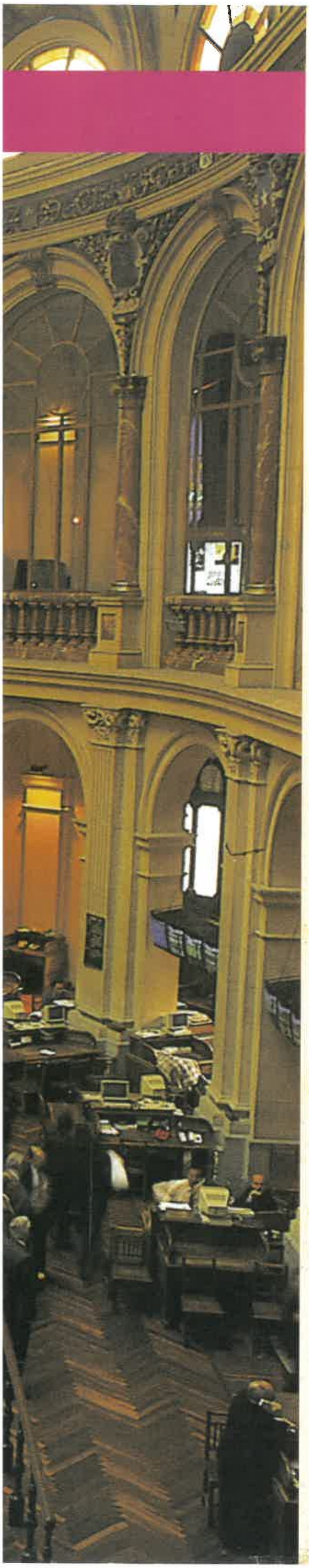
3 Sucesións e progresións





Neste tema estúdanse as sucesións, que son conxuntos de números ordenados. Entre elas están as progresións aritméticas e xeométricas.

Comézase o tema definindo unha sucesión, os seus termos e o termo xeral, que dan paso ao estudo das progresións aritméticas: concepto de progresión aritmética, termo xeral e suma dos termos dunha progresión aritmética.

Continúase co estudo das progresións xeométricas: concepto de progresión xeométrica, termo xeral, suma dos termos dunha progresión xeométrica e sumas dos termos dunha progresión xeométrica indefinida e decrecente en valor absoluto.

O tema finaliza co estudo dunhas aplicacións das progresións: o interese simple e o interese composto.

As progresións utilízanse en diversas situacións da nosa vida cotiá. Un exemplo é o cálculo do interese composto, que é unha progresión xeométrica e que serve para calcular as cantidades que se deben pagar por un préstamo hipotecario.

ORGANIZA AS TÚAS IDEAS

SUCESIÓNS DE NÚMEROS REAIS

son

conxuntos de números

poden ser

progresións aritméticas — aplícanse ao — progresións xeométricas

progresións aritméticas, nas que se calcula:

- termo xeral: $a_n = a_1 + (n-1)d$
- suma: $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

aplícanse ao:

- interese simple
- interese composto

progresións xeométricas, nas que se calcula:

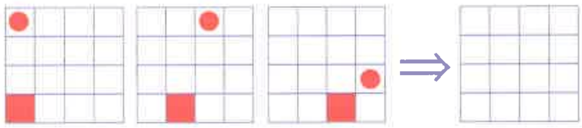
- termo xeral: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$
- suma de n termos: $S_n = \dfrac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$
- suma de infinitos termos: $|r| < 1;\ S = \dfrac{a_1}{1 - r}$

1. Sucesións

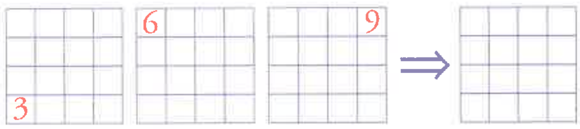
PENSA E CALCULA

Sigue as series seguintes:

a)



b)



1.1. Sucesións de números reais

Unha **sucesión de números reais** é un conxunto de números reais ordenados, é dicir, cada número da sucesión ocupa un lugar determinado.

Exemplo

Os números 2, 4, 6, 8, 10, 12... son un conxunto de números que están ordenados e forman unha sucesión.

Lugar	1º	2º	3º	4º	5º	6º	...
Número	2	4	6	8	10	12	...

Obsérvase que son os números pares e que a regra que seguen é que cada número se obtén sumándolle 2 unidades ao anterior. Pódense seguir calculando indefinidamente os números que compoñen esta sucesión.

1.2. Termos dunha sucesión

Os **termos da sucesión** son cada un dos números que forman a sucesión.

Os termos dunha sucesión ocupan un lugar determinado na sucesión. Para indicar este lugar utilízase unha letra cun subíndice numérico, que indica o devandito lugar.

Exemplo

A sucesión 3, 6, 10, 15, 21... pódese representar por:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \ldots$$

donde:

$a_1 = 3$ Significa que o número **3** ocupa o primeiro lugar da sucesión.

$a_2 = 6$ O número **6** ocupa o segundo lugar da sucesión.

$a_3 = 10$ O número **10** ocupa o terceiro lugar da sucesión.

$a_4 = 15$ O número **15** ocupa o cuarto lugar da sucesión, etcétera.

Evitar erros habituais

Non confundas nunca o subíndice que acompaña á letra a_1, a_2..., que indica o lugar que ocupa o termo, co valor do termo.

1.3. Regularidades

Unha **sucesión** é **regular** cando os seus termos seguen unha determinada regra.

Unha sucesión regular pódese dar de distintas maneiras:

a) Dando os primeiros termos da sucesión

Consiste en dar os tres ou catro primeiros termos da sucesión e, a partir deles, intentar deducir a regra da sucesión.

Exemplo

2, 5, 8, 11…

Obsérvase que cada termo obtense sumando 3 ao anterior. Pódese seguir a sucesión: $a_5 = \mathbf{14}$, $a_6 = \mathbf{17}$, $a_7 = \mathbf{20}$…

b) Dando a lei de formación

Consiste en dar a lei que xera a sucesión.

Exemplo

A sucesión formada polos cadrados perfectos dos números naturais.

Obtense: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64…

c) Dando o termo xeral da sucesión

Consiste en dar unha fórmula que permita atopar calquera termo da sucesión. Esta é a forma usual en matemáticas para dar unha sucesión de números reais.

1.4. Termo xeral dunha sucesión

O **termo xeral dunha sucesión** é unha fórmula que relaciona o lugar **n** que ocupa cada termo co seu valor. Represéntase por $\mathbf{a_n}$

Co termo xeral pódese calcular calquera termo da sucesión substituíndo na fórmula a letra **n** polo lugar que se desexa.

Exemplo

Escribe os tres primeiros termos da sucesión $a_n = 4n + 1$

$$a_1 = 4 \cdot 1 + 1 = 5$$
$$a_2 = 4 \cdot 2 + 1 = 9$$
$$a_3 = 4 \cdot 3 + 1 = 13$$

APLICA A TEORÍA

1 Busca os dez primeiros termos das seguintes sucesións:

a) 3, 8, 13, 18… b) 8, 4, 0, −4…
c) 2, −2, 2, −2… d) 1/2, 1/4, 1/6, 1/8…

2 Busca os dez primeiros termos das seguintes sucesións:

a) 2, 1, 2, 4, 2, 7… b) 1, 1, 2, 3, 5, 8…
c) 2, 1, 4, 3, 6, 5… d) 1, −2, 4, −8…

3 Calcula os catro primeiros termos das seguintes sucesións:

a) $a_n = 3n + 2$ b) $a_n = (n + 1)^2$
c) $a_n = 3 \cdot 2^n$ d) $a_n = (-2)^n$

4 Busca os catro primeiros termos positivos das sucesións seguintes e trata de encontrar mentalmente a fórmula do termo xeral.

a) Números pares. b) Números impares.
c) Múltiplos de 5 d) Cubos perfectos.

2. Progresións aritméticas

PENSA E CALCULA

Calcula mentalmente a suma dos 100 primeiros números naturais. Observa que a suma dos termos equidistantes dos extremos son iguais.

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100$$

$$1 + 100 = 101,\ 2 + 99 = 101,\ 3 + 98 = 101\ldots$$

2.1. Progresión aritmética

Unha **progresión aritmética** é unha sucesión na que cada termo se obtén sumando ao termo anterior un número constante que se chama **diferenza** e que se representa coa letra **d**

A diferenza **d** dunha progresión aritmética calcúlase restando dous termos consecutivos.

Exemplo

A sucesión 3, 7, 11, 15… é unha progresión aritmética.

$$d = a_2 - a_1 = 7 - 3 = 4;\ d = a_3 - a_2 = 11 - 7 = 4$$

A diferenza é $d = 4$, e cada termo obtense do anterior sumando 4

Calculadoras novas

$\boxed{3}\boxed{=}\boxed{\text{Ans}}\boxed{+}\boxed{4}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{\ldots}$

Calculadoras antigas

$\boxed{4}\boxed{+}\boxed{+}\boxed{3}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{\ldots}$

Termos da progresión

$a_1 = 3 \quad d = 4$

$a_2 = a_1 + d = 3 + 4 = 7$

$a_3 = a_2 + d = 7 + 4 = 11$

…

2.2. Termo xeral dunha progresión aritmética

Observa

Cada termo da progresión aritmética é igual ao primeiro termo máis tantas veces a diferenza como termos ten diante; polo tanto, o termo xeral a_n será o primeiro termo máis $n - 1$ veces a diferenza.

O **termo xeral** dunha progresión aritmética é:

$$\mathbf{a_n = a_1 + (n - 1)\,d}$$

Exemplo

Dada a sucesión 2, 5, 8, 11…, calcula o termo xeral.

$a_n = a_1 + (n - 1)\,d$

$a_1 = 2$

$d = 3$

$a_n = 2 + (n - 1) \cdot 3$

$a_n = 2 + 3n - 3$

$a_n = 3n - 1$

2.3. Suma dos termos dunha progresión aritmética

A **suma dos n primeiros termos dunha progresión aritmética** represéntase S_n e vén sendo:

$$\mathbf{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n}$$

Exemplo

Calcula a suma dos 25 primeiros termos da progresión aritmética de termo xeral $a_n = 7n - 5$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \Rightarrow S_{25} = \frac{a_1 + a_{25}}{2} \cdot 25$$

Calcúlase a_1 e a_{25}:

$$a_n = 7n - 5$$

$$a_1 = 7 \cdot 1 - 5 = 2$$

$$a_{25} = 7 \cdot 25 - 5 = 170$$

$$S_{25} = \frac{2 + 170}{2} \cdot 25 = 2\,150$$

Exemplo

Sumar os sete primeiros termos da progresión aritmética:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\ldots$$

$$\begin{aligned} S_7 &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 \\ S_7 &= 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 \\ \hline 2S_7 &= 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 \end{aligned}$$

Obsérvase que a suma dos termos equidistantes dos extremos é igual á suma do primeiro e do último.

$$2S_7 = 7 \cdot 8$$

$$2S_7 = 56$$

$$S_7 = 28$$

APLICA A TEORÍA

5 Busca o termo xeral das seguintes progresións aritméticas:

a) 5, 9, 13, 17… b) 6, 3, 0, –3…

c) 2/3, 1/3, 0, – 1/3… d) 1/2, 1, 3/2, 2…

6 Escribe o termo xeral e os tres primeiros termos da progresión aritmética cuxo primeiro termo é $a_1 = 6$ e $d = 2{,}5$

7 Na progresión 5, 9, 13, 17…, que termo vale 49?

8 Nunha progresión aritmética coñecemos os termos $a_5 = 19$ e $a_8 = 28$. Calcula a diferenza e o primeiro termo.

9 Calcula a suma dos 25 primeiros termos da progresión aritmética cuxo termo xeral é:

$$a_n = 2n + 6$$

10 Calcula a suma dos 12 primeiros termos da progresión aritmética cuxo termo xeral é:

$$a_n = 3n/2 + 2$$

3. Progresións xeométricas

PENSA E CALCULA

Calcula mentalmente os dous termos seguintes de cada unha destas sucesións:

a) 3, 6, 12, 24… b) 20, 10, 5, 5/2… c) 3, 3, 3, 3… d) 5, –5, 5, –5…

3.1. Progresión xeométrica

Unha **progresión xeométrica** é unha sucesión na que cada termo se obtén multiplicando o termo anterior por un número constante que se chama **razón,** e que se representa coa letra **r**

A razón **r** dunha progresión xeométrica calcúlase dividindo dous termos consecutivos.

Termos da progresión

$a_1 = 3, \quad r = 4$

$a_2 = a_1 \cdot r = 3 \cdot 4 = 12$

$a_3 = a_2 \cdot r = 12 \cdot 4 = 48$

$a_4 = a_3 \cdot r = 48 \cdot 4 = 192$

…

Exemplo

A sucesión 3, 12, 48, 192… é xeométrica.

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{12}{3} = 4 \qquad r = \frac{a_3}{a_2} = \frac{48}{12} = 4 \qquad r = \frac{a_4}{a_3} = \frac{192}{48} = 4$$

A razón é r = 4, e cada termo da progresión obtense multiplicando por 4 o anterior.

Calculadoras novas

$\boxed{3}\ \boxed{=}\ \boxed{\text{Ans}}\ \boxed{\times}\ \boxed{4}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{\ldots}$

Calculadoras antigas

$\boxed{4}\ \boxed{\times}\ \boxed{\times}\ \boxed{3}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{\ldots}$

3.2. Termo xeral dunha progresión xeométrica

O **termo xeral** dunha progresión xeométrica é:

$$\mathbf{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$$

Exemplo

Dada a progresión 3, 6, 12, 24…, calcula o termo xeral.

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}; \ a_1 = 3$$

A razón é:

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{3} = 2$$

O termo xeral é:

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

3.3. Suma dos termos dunha progresión xeométrica

A **suma dos n primeiros termos dunha progresión xeométrica** represéntase S_n e vén sendo:

$$\mathbf{S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}, \ r \neq 1}$$

Exemplo

Calcula a suma dos sete primeiros termos da progresión xeométrica 6, 12, 24, 48…

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1} \Rightarrow S_7 = \frac{a_7 \cdot r - a_1}{r - 1}$$

$$a_1 = 6,\ r = \frac{12}{6} = 2$$

$$a_n = 6 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow a_7 = 6 \cdot 2^{7-1} = 6 \cdot 2^6 = 6 \cdot 64 = 384$$

$$S_7 = \frac{384 \cdot 2 - 6}{2 - 1} = 762$$

384 × 2 − 6 = **762**

3.4. Suma dos termos dunha progresión xeométrica indefinida e decrecente en valor absoluto

A **suma de todos os termos dunha progresión xeométrica** con $|r| < 1$ é:

$$\mathbf{S = \frac{a_1}{1 - r}}$$

Exemplo

Calcula a suma dos infinitos termos da progresión xeométrica 3, 1, 1/3…

$$S = \frac{a_1}{1 - r};\ a_1 = 3,\ r = \frac{1}{3}$$

$$S = \frac{3}{1 - 1/3} = \frac{3}{2/3} = 3 : \frac{2}{3} = 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

3 ÷ (1 − 1 ÷ 3) = **4,5**

APLICA A TEORÍA

11 Busca o termo xeral das seguintes progresións xeométricas:

a) 5, 15, 45, 135… b) 6, 3, 3/2, 3/4…

12 Dada unha progresión xeométrica cuxo primeiro termo é $a_1 = 4$ e a razón $r = 5$, calcula:

a) a_6 b) a_{10} c) a_n

13 Na progresión xeométrica 2, 4, 8, 16, 32…, que termo vale 1 024?

14 Busca a razón da progresión xeométrica que ten $a_4 = 135$ e $a_6 = 1\,215$

15 Calcula a suma dos 10 primeiros termos das seguintes progresións xeométricas:

a) 2, 14, 98, 686… b) 3, –6, 12, –24…

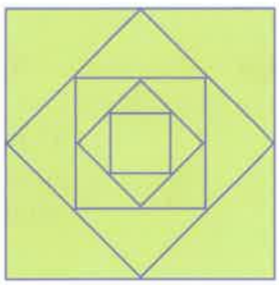
16 Calcula a suma dos infinitos termos das seguintes progresións xeométricas:

a) 1/5, 1/25, 1/125, 1/625…

b) 3, 2, 4/3, 8/9, 16/27…

17 A suma dos infinitos termos dunha progresión xeométrica é 6 e o seu primeiro termo é 4. Calcula a razón.

18 Se nun cadrado de área 8 m^2 se unen os puntos medios, obtense outro cadrado, e así sucesivamente. Calcula a sucesión das áreas dos devanditos cadrados. Que tipo de progresión é?



4. Aplicacións: interese simple e composto

PENSA E CALCULA

Se se depositan nunha cartilla de aforros 1 000 € e se paga un 5% de interese anual, canto diñeiro producen ao cabo dun ano?

Nomenclatura

C = Capital final

c = capital inicial

I = Interese

t = tempo en anos

R = Rédito ou tanto por cento

$r = R/100 \Rightarrow$ Tanto por un

Se $R = 4{,}5\% \Rightarrow r = 0{,}045$

4.1. Interese simple

O **interese** é a cantidade de diñeiro que produce un capital depositado nunha entidade financeira.

O **interese simple** é aquel que non se acumula ao capital para xerar máis intereses. O capital inicial permanece invariable. A súa fórmula é:

$$\mathbf{I = c \cdot r \cdot t}$$

O capital final que se obtén é:

$$\mathbf{C = c + I}$$

Exemplo

Luís deposita 1 000 € durante 3 anos a un 8% de interese. Canto gaña despois dos 3 anos? Cal será o capital final ao cabo dos tres anos?

$I = c \cdot r \cdot t$

$I = 1\,000 \cdot 0{,}08 \cdot 3 = 240$ € $\boxed{1000}\boxed{\times}\boxed{0.08}\boxed{\times}\boxed{3}\boxed{=}\boxed{240}$

$C = c + I \Rightarrow C = 1\,000 + 240 = 1\,240$ €

O interese acumulado é unha **progresión aritmética** de diferenza 80

$a_1 = 80$ €

$a_2 = 160$ €

$a_3 = 240$ €

Períodos de capitalización

Un período de capitalización é o intervalo de tempo ao final do cal se cobran os intereses. Este período pode ser anual, semestral, trimestral, mensual ou diario.

Se o tempo que se deposita o diñeiro é en:

- Trimestres: $I = \dfrac{c \cdot r \cdot t}{4}$
- Meses: $I = \dfrac{c \cdot r \cdot t}{12}$
- Días: $I = \dfrac{c \cdot r \cdot t}{360}$

4.2. Distintos períodos de capitalización

Se o tempo que se deposita o diñeiro non é un ano, cóbrase a parte proporcional do interese anual.

Exemplo

Deposítanse 2 000 € durante 3 anos a un 5% de interese. Se Facenda retén un 18% dos intereses, que interese se obterá ao rematar o devandito período?

O tanto por un será: $0{,}05 \cdot 0{,}82 = 0{,}041$

$I = c \cdot r \cdot t$

$I = 2\,000 \cdot 0{,}041 \cdot 3 = 246$ €

$\boxed{2000}\boxed{\times}\boxed{0.041}\boxed{\times}\boxed{3}\boxed{=}\boxed{246}$

4.3. Interese composto

O **interese composto** é aquel que se acumula ao capital para ir xerando novos intereses. Un capital inicial, **c,** ao **R%** de rédito durante **t** anos, producirá un capital final:

$$\mathbf{C = c(1 + r)^t}, \quad r = \frac{R}{100}$$

O **capital final** é unha **progresión xeométrica** de primeiro termo **c** e a razón é **1 + r**

Exemplo

Depósítanse 1 000 € ao 5% de interese composto durante 3 anos. Que capital teremos ao finalizar ese tempo?

O capital final será:

$$C = c\,(1 + r)^t$$

$$C = 1\,000 \cdot 1{,}05^3 = 1\,157{,}63 \text{ €}$$

$\boxed{1000}\ \boxed{\times}\ \boxed{1.05}\ \boxed{x^3}\ \boxed{=}\ \boxed{1157{,}625}$

4.4. Distintos períodos de capitalización

Se os intereses se aboan **n** veces ao ano cun rédito **r** durante **t** anos, o capital final será:

$$\mathbf{C = c\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot t}}$$

Exemplo

Depósítanse 3 000 € a un interese composto do 7% durante 3 anos, con períodos de capitalización mensuais. Se Facenda retén o 18% dos intereses cando se recupera o capital, calcula o capital final.

O capital final será:

$$C = c\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot t}$$

$$C = 3\,000\left(1 + \frac{0{,}07}{12}\right)^{12 \cdot 3} = 3\,698{,}78 \text{ €}$$

$\boxed{3000}\ \boxed{\times}\ \boxed{(}\ \boxed{1}\ \boxed{+}\ \boxed{0.07}\ \boxed{\div}\ \boxed{12}\ \boxed{)}\ \boxed{\wedge}\ \boxed{(}\ \boxed{12}\ \boxed{\times}\ \boxed{3}\ \boxed{)}\ \boxed{=}\ \boxed{3698{,}78}$

Os intereses son: 3 698,78 – 3 000 = 698,78 €

Facenda retén: 698,78 · 0,18 = 125,78 €

O capital final neto será: 3 698,78 – 125,78 = 3 573 €

APLICA A TEORÍA

19 Nun depósito dunha entidade financeira ofrecen un 6% de interese simple anual. Se se depositan 7 500 € durante 2 anos e Facenda retén o 18%, calcula o capital acumulado ao finalizar o período.

20 Calcula os anos que estivo depositado un capital de 5 000 € ao 3,5% de interese se se xeraron 700 € de intereses, sen o desconto de Facenda.

21 Calcula o rédito ao que se depositaron 18 000 € a interese simple durante 5 anos se, unha vez retido o 18% de Facenda, os intereses xerados son de 2 952 €

22 Depósítanse 6 500 € ao 5% de interese composto durante 4 anos. Facenda retén o 18% dos intereses cando se recupera o capital. Calcula o capital final se os intereses se aboan anualmente.

23 Depósítanse 35 500 € ao 4% de interese composto con pagamento de intereses diarios durante 2 anos. Calcula o capital final se Facenda retén o 18% ao rematar o prazo.

24 Que capital inicial é necesario para que, a interese composto durante 4 anos ao 5% anual e con períodos de capitalización anuais, se acumule un capital final de 15 558,48 €?

Para profundar: demostracións

2.3. Suma dos termos dunha progresión aritmética

A **suma dos n primeiros termos dunha progresión aritmética** represéntase S_n e vén sendo:

$$\mathbf{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n}$$

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n = a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + \dots + a_1 + (n-2)d + a_1 + (n-1)d$

Escríbese S_n en orde inversa e súmanse as dúas expresións obtidas:

$S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_3 + a_2 + a_1 = a_n + a_n - d + a_n - 2d + \dots + a_n - (n-2)d + a_n - (n-1)d$

$$\begin{array}{rl} S_n = & a_1 + a_1 + \cancel{d} + a_1 + \cancel{2d} + \dots + a_1 + \cancel{(n-2)d} + a_1 + \cancel{(n-1)d} \\ S_n = & a_n + a_n - \cancel{d} + a_n - \cancel{2d} + \dots + a_n - \cancel{(n-2)d} + a_n - \cancel{(n-1)d} \\ \hline 2S_n = & (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) \end{array}$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n \Rightarrow S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

3.3. Suma dos termos dunha progresión xeométrica

A **suma dos n primeiros termos dunha progresión xeométrica** represéntase $\mathbf{S_n}$ e vén sendo:

$$\mathbf{S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

Multiplícanse os dous membros desta igualdade pola razón **r** e réstanse as dúas igualdades:

$$\begin{array}{rl} S_n \cdot r = & \cancel{a_1 \cdot r} + \cancel{a_2 \cdot r} + \cancel{a_3 \cdot r} + \dots + \cancel{a_{n-1} \cdot r} + a_n \cdot r \\ -S_n = & -a_1 - \cancel{a_2} - \cancel{a_3} - \cancel{a_4} - \dots - \cancel{a_n} \\ \hline S_n \cdot r - S_n = & -a_1 \qquad + a_n \cdot r \end{array}$$

$$S_n \cdot r - S_n = a_n \cdot r - a_1 \Rightarrow S_n \cdot (r-1) = a_n \cdot r - a_1 \Rightarrow S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}; \ (r \neq 1)$$

3.4. Suma dos termos dunha progresión xeométrica indefinida e decrecente en valor absoluto

A **suma de todos os termos dunha progresión xeométrica** con $\mathbf{|r| < 1}$ é:

$$\mathbf{S = \frac{a_1}{1 - r}}$$

Como nestas progresións os termos se aproximan cada vez máis a cero, pódese dicir que $a_n \cdot r = a_1 \cdot r^n$ é practicamente cero. Observa que $\mathbf{r^n}$ é case cero cando **n** é moi grande.

Ao substituír $a_n \cdot r = 0$ na fórmula $S = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$, obtense $S = \frac{-a_1}{r - 1}$

Se se cambia o signo no numerador e no denominador, e se invirte a orde no denominador, temos $S = \frac{a_1}{1 - r}$, $|r| < 1$

Exercicios e problemas

1. Sucesións

25 Escribe os seis primeiros termos das seguintes sucesións:

a) 1, 9, 17, 25…

b) 2, −4, 8, −16…

c) Os múltiplos de 5

d) Os inversos dos cadrados dos números naturais.

26 Busca os dez primeiros termos das seguintes sucesións:

a) x, 2x, 4x, 8x…

b) 1, 3, 4, 3, 9…

c) 3, 3, 6, 9, 15…

d) O triplo dos números naturais.

27 Calcula os cinco primeiros termos das seguintes sucesións:

a) $a_n = -4n + 2$

b) $a_n = n^2 + 1$

c) $a_n = 2^{-n}$

d) $a_n = (n - 2)^n$

2. Progresións aritméticas

28 Busca o termo xeral das seguintes progresións aritméticas:

a) 7, 11, 15…

b) 3, −2, −7…

c) −7, −3, 1…

d) 1/2, 3/4, 1…

29 Escribe o termo xeral e os tres primeiros termos da progresión aritmética cuxo primeiro termo é $a_1 = 3$ e cuxa diferenza é $d = -15/4$

30 Nunha progresión aritmética, $a_{11} = 3$ e a diferenza é $d = 2/7$. Calcula o primeiro termo.

31 Nunha progresión aritmética o primeiro termo vale 3 e o sexto termo vale 8. Calcula a diferenza.

32 Nas seguintes progresións aritméticas, calcula o termo que ocupa o último valor:

a) 4, 6, 8…, 30

b) 7/2, 5/2, 3/2… , −21/2

33 Nunha progresión aritmética coñecemos os termos $a_5 = 7$ e $a_7 = 25/3$. Calcula a diferenza e o primeiro termo.

34 Calcula a suma dos 15 primeiros termos da progresión aritmética cuxo termo xeral é

$$a_n = 3n + 12$$

35 Calcula a suma dos 12 primeiros termos da progresión aritmética cuxo termo xeral é

$$a_n = n/3 + 4/3$$

3. Progresións xeométricas

36 Busca o termo xeral das seguintes progresións xeométricas:

a) 6, 12, 24…

b) 1/3, 1, 3…

c) −3, 6, −12…

d) 3/4, −1/2, 1/3…

37 Dada unha progresión xeométrica cuxo primeiro termo é $a_1 = 8$ e cuxa razón é $r = 3/4$, calcula:

a) a_6

b) a_{10}

c) a_{20}

d) a_n

38 Nunha progresión xeométrica, $a_7 = 64/81$ e a razón $r = 2/3$. Calcula o primeiro termo.

39 Na progresión xeométrica −5, 10, −20…, que termo vale 640?

40 Nunha progresión xeométrica o primeiro termo é 1/3 e o sétimo termo é 243. Calcula a razón.

41 Busca a razón da progresión xeométrica que ten $a_1 = 27/64$ e $a_8 = 2/81$

42 Calcula a suma dos 12 primeiros termos das seguintes progresións:

a) 4, −8, 16…

b) 1/10, 1/5, 2/5…

43 Calcula a suma dos infinitos termos das seguintes progresións:

a) 9, 3, 1…

b) 9/4, 3/2, 1…

Exercicios e problemas

44 Cantos termos hai que tomar da progresión 5, 10, 20… para que a suma sexa 2 555?

45 A suma dos infinitos termos dunha progresión é 12 e a súa razón r = 1/2. Busca o primeiro termo.

4. Aplicacións: interese simple e composto

46 Nun depósito ofrecen un 3,5% de interese simple por 4 anos. Se se depositan 12 000 € e Facenda retén o 18% dos intereses, calcula o capital acumulado ao finalizar o período.

47 Calcula os anos que estivo depositado un capital de 25 500 € ao 6% de interese se, realizada a retención de Facenda do 18%, xeráronse 5 018,40 € de intereses.

48 Calcula o rédito ou tanto por cento ao que se depositaron 20 000 € a interese simple durante 2 anos se, unha vez retido o 18% de Facenda, os intereses xerados son de 1 640 €

49 Unha entidade financeira ofrece un 3,5% anual por un depósito renovable todos os meses. Se os intereses non se acumulan no depósito e este se renova 5 meses, que interese se obterá por 18 000 € unha vez descontado o 18% de retención de Facenda?

50 Que capital se acumula se se colocan 31 000 € ao 5% de interese composto durante 3 anos se os intereses se aboan trimestralmente e Facenda retén o 18% ao finalizar o período?

51 Que capital inicial é necesario ter depositado para que, a interese composto durante 5 anos ao 6% anual e con períodos de capitalización mensuais, se acumule un capital final de 26 977 €?

Para ampliar

52 Estuda se as seguintes sucesións son progresións aritméticas ou xeométricas e busca o termo xeral:

a) $-3/5, 3/10, 6/5\ldots$

b) $11/3, 35/12, 13/6\ldots$

c) $5/6, 1/2, 3/10\ldots$

d) $3/4, -1/2, 1/3\ldots$

53 Escribe o termo xeral e os tres primeiros termos da progresión aritmética cuxo primeiro termo é $a_1 = 3/4$ e cuxa diferenza é $d = 0,5$

54 Calcula o termo que ocupa o lugar 100 na progresión:

$$-5, -13/3, -11/3\ldots$$

55 Calcula o primeiro termo e a diferenza nas progresións aritméticas nas que:

a) $a_3 = 70$ e $a_6 = 115$

b) $a_5 = 6$ e $a_9 = 7$

56 Calcula a suma dos 12 primeiros termos da progresión aritmética cuxo termo xeral é $a_n = 5n/2 + 1/2$

57 Dada unha progresión xeométrica cuxo primeiro termo é $a_1 = 3/8$ e cuxa razón é $r = 4/3$, calcula:

a) a_5 b) a_{15}

c) a_{30} d) a_n

58 Calcula a suma dos 5 primeiros termos das seguintes progresións:

a) $12, 4, 4/3\ldots$

b) $9/4, 3/2, 1\ldots$

59 Calcula a suma dos infinitos termos das seguintes progresións:

a) $5, 5/4, 5/16\ldots$

b) $\sqrt{2}, 1, 1/\sqrt{2}\ldots$

Exercicios e problemas

60 Nunha progresión xeométrica $a_4 = 125$ e $a_6 = 3\,125$. Calcula o primeiro termo e a razón.

61 O primeiro termo dunha progresión xeométrica é 225, e o cuarto termo é 72/5. Calcula a suma dos seus infinitos termos.

62 Calcula os anos que estivo depositado un capital de 28 500 € ao 4,5% de interese simple se se xeraron 5 258,25 € unha vez retido o 18% de Facenda.

63 Calcula o rédito ao que se depositaron 15 000 € a interese simple durante 3 anos se, unha vez retido o 18% de Facenda, os intereses xerados son de 1 660,50 €

64 Unha entidade financeira ofrece un 4,25% anual por un depósito renovable todos os meses. Se os intereses non se acumulan no depósito e este se renova 3 meses, que interese se obtén por 24 000 € coa retención do 18% de Facenda?

65 Que capital bruto se acumula se se colocan 40 500 € ao 4,5% de interese composto durante 4 anos se os intereses se aboan segundo as modalidades seguintes:

a) Anualmente.

b) Mensualmente.

Con calculadora

66 Calcula os 5 seguintes termos das progresións:

a) 3,27; 3,45; 3,63…

b) 1 000, 1 200, 1 440…

Problemas

67 Continúa as seguintes series de números figurados, ata obter tres termos máis:

a) 1 3 6

b) 1 4 9

68 Calcula a suma dos 15 primeiros múltiplos positivos de 6

69 Calcula a suma dos primeiros 100 números impares.

70 Un móbil avanza 5 metros nun segundo e segue avanzando de maneira que cada segundo avanza 2 metros máis que no segundo anterior. Canto percorrerá nun minuto?

71 Un dependente recibe o primeiro día de traballo unha gratificación de 10 €. Nos días sucesivos, esta gratificación vai aumentando en 1,5 €, de maneira que, na súa última xornada, cobra 143,5 €. Cantos días traballou e canto cobrou en total polas gratificacións?

72 O prezo da primeira entrega dunha colección de minerais é de 2 €. Nas seguintes entregas o prezo sobe 0,03 € máis que na anterior. Se a colección consta de 100 exemplares, canto se pagará polo total da colección?

73 Xurxo cobra 18 € semanais de paga e decide aforrar 1,8 € o primeiro mes e aumentar cada mes 0,75 € máis que o anterior. Canto aforrará nun ano?

74 Fíxose un pozo de 40 m de profundidade. Polo primeiro metro pagáronse 7,5 € e por cada metro sucesivo pagáronse 2,3 € máis que polo anterior. Cal é o custo do pozo?

75 Calcula os lados dun triángulo rectángulo sabendo que están en progresión aritmética e que o menor deles mide 6 cm

76 Quérese saldar semanalmente unha débeda. A primeira semana páganse 5 € e en cada unha das semanas seguintes vanse pagando 4 € máis que na anterior. Se se paga en 30 semanas, a canto ascende o importe da débeda?

77 Os ángulos dun hexágono están en progresión aritmética, e o menor deles mide 40°. Calcula os demais.

78 Nun cadrado únense os puntos medios dos seus lados e obtense outro cadrado inscrito. Neste último cadrado repítese a operación, obténdose outro cadrado inscrito. Se o lado do primeiro cadrado mide 2 cm, calcula a suma das áreas de todos os cadrados.

79 Unha persoa gaña no seu establecemento un 7% máis do que gañou o ano anterior. Se o primeiro ano gañou 28 000 €, canto obterá en media ducia de anos?

80 Déixase caer unha pelota dunha altura de 52 cm. Logo de cada bote no chan, sobe 3/4 cm da altura da que cae. Que lonxitude percorrerá a pelota denantes de chegar ao repouso?

81 Fórmase unha sucesión de círculos concéntricos nos que cada radio é a metade do radio do círculo anterior. Se o primeiro círculo ten un diámetro de 4 cm, calcula a suma das áreas de todos os círculos.

82 Que capital inicial é necesario ter depositado para que, a interese composto durante 3 anos ao 5% anual e con períodos de capitalización trimestrais, se acumule un capital final bruto de 29 692,10 €?

83 Calcula os anos que estivo depositado un capital de 45 000 € ao 6,5% de interese simple se, unha vez feita a retención do 18% de Facenda, xeráronse 7 195,50 €

84 Unha entidade financeira paga o 7,5% do diñeiro depositado se este se mantén 3 anos. Calcula, nos seguintes casos, canto se gañará ao finalizar os tres anos por unha imposición de 10 000 € se Facenda retén o 18%:

a) Os intereses se ingresan nunha conta distinta.

b) Os intereses ingrésanse na mesma conta.

85 Calcula o rédito ao que se depositaron 12 000 € a interese simple durante 18 meses se os intereses xerados, coa retención de Facenda descontada, foron de 664,20 €

Para profundar

86 Comproba que as seguintes expresións están en progresión aritmética e calcula o sétimo termo:

$$x^2 - 2x + 1, \; x^2 + 1 \; \text{e} \; x^2 + 2x + 1$$

87 Nunha progresión aritmética, o primeiro termo e o décimocuarto suman 342. Canto suman o quinto e o décimo termo?

88 Continúa as seguintes series de números figurados ata obter tres termos máis:

a) 1 5 12

b) 1 6 15

89 Nunha progresión aritmética o primeiro termo é 2 e o undécimo é 52. Razoa o que vale o sexto termo.

90 A suma dos infinitos termos dunha progresión xeométrica decrecente é 6 e a suma dos seus dous primeiros termos é 16/3. Calcula o primeiro termo.

91 Dun vaso cheo de leite baléirase a metade e vólvese encher de auga. Retírase a metade do novo contido e vólvese encher con auga. Se este proceso se repite seis veces, que parte de auga contén o vaso?

92 Un depósito ofrece un 4% de interese simple anual, renovable mensualmente e sen acumular os intereses no depósito. Canto tempo se deben depositar 12 000 € para xerar uns intereses netos, é dicir, descontando o 18% de Facenda, de 984 €?

93 Calcula o capital inicial que se debe depositar ao 6% de interese composto con períodos de capitalización mensual, para que, ao cabo de 10 anos, se convertan en 33 204 € brutos.

94 Calcula o tempo que hai que ter un capital depositado nun banco ao 5% con interese simple, para que o capital se duplique.

Así funciona

Menú operacións Operacións

Sumatorio resolver ecuación resolver sistema

Menú símbolos Símbolos

⇒ Implica ↦ Apunta a

Termos dunha sucesión

Emprégase a función **aplicar_función,** que calcula os primeiros termos dunha sucesión dada por unha fórmula (dentro das parénteses ponse a variable, a fórmula e o número de termos). Exemplo:

aplicar_función(n↦4n + 1, 1..10) →

Substituír varias variables nunha fórmula

Escríbense os valores das variables entre chaves e, a continuación, a fórmula entre parénteses. Exemplo:

$\{c \Rightarrow 1000, r \Rightarrow 0.05, t \Rightarrow 3\}\,(c \cdot (1 + r)^t) \rightarrow 1157.6$

Practica

105 Busca os termos xerais das seguintes sucesións e calcula os dez primeiros termos de cada unha delas:

a) 12, 20, 28…

b) 14, 4, –6…

c) 5, 15, 45…

d) 6, 3, 3/2…

106 Calcula os oito primeiros termos das seguintes sucesións:

a) $a_n = 4^n + 2$

b) $a_n = 3n^2 - 5n + 2$

c) $a_n = 4 \cdot (-2/3)^n$

d) $a_n = (-2)^n$

107 Calcula a suma dos 125 primeiros termos da progresión aritmética cuxo termo xeral é $a_n = 4n/5 + 2/3$

108 Calcula a suma dos 7 primeiros termos da progresión xeométrica cuxo termo xeral é $a_n = 3 \cdot 2^n$

109 Calcula a suma dos infinitos termos da seguinte progresión:

3, 1, 1/3…

Enuncia os seguintes problemas e resólveos coa axuda de Wiris:

110 Na progresión 9, 5, 1…, que lugar ocupa o termo que vale –47?

111 Nunha progresión aritmética coñecemos os termos $a_6 = 23/6$ e $a_9 = 35/6$. Calcula a diferenza e o primeiro termo.

112 Na progresión xeométrica 8, 2, 1/2…, que termo vale 1/2 048?

113 Busca a razón da progresión xeométrica que ten $a_4 = 32/9$ e $a_6 = 512/81$

114 Deposítanse 2 000 € durante 3 anos a un 5% de interese. Se Facenda retén un 18% dos intereses, que interese se obtén ao rematar o dito período?

115 Deposítanse 3 000 € a un interese composto do 7% durante 3 anos con períodos de capitalización mensuais. Se Facenda retén o 18% cando se recupera o capital, calcula o capital final.