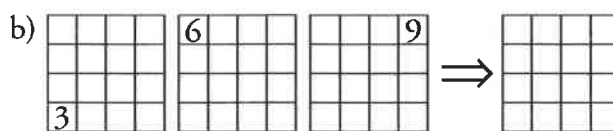
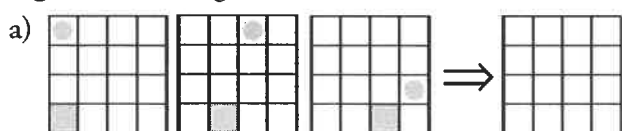




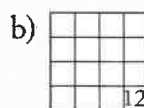
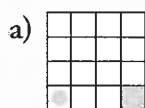
1. Sucesións

PENSA E CALCULA

Sigue as series seguintes:



Solución:



APLICA A TEORÍA

1 Busca os dez primeiros termos das seguintes sucesións:

- a) 3, 8, 13, 18... b) 8, 4, 0, -4...
c) 2, -2, 2, -2... d) 1/2, 1/4, 1/6, 1/8...

Solución:

- a) 3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43, 48
b) 8, 4, 0, -4, -8, -12, -16, -20, -24, -28
c) 2, -2, 2, -2, 2, -2, 2, -2, 2, -2
d) 1/2, 1/4, 1/6, 1/8, 1/10, 1/12, 1/14, 1/16, 1/18, 1/20

2 Busca os dez primeiros termos das seguintes sucesións:

- a) 2, 1, 2, 4, 2, 7... b) 1, 1, 2, 3, 5, 8...
c) 2, 1, 4, 3, 6, 5... d) 1, -2, 4, -8...

Solución:

- a) 2, 1, 2, 4, 2, 7, 2, 10, 2, 13
b) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55
c) 2, 1, 4, 3, 6, 5, 8, 7, 10, 9
d) 1, -2, 4, -8, 16, -32, 64, -128, 256, -512

3 Calcula os catro primeiros termos das seguintes sucesións:

- a) $a_n = 3n + 2$ b) $a_n = (n + 1)^2$
c) $a_n = 3 \cdot 2^n$ d) $a_n = (-2)^n$

Solución:

- a) 5, 8, 11, 14
b) 4, 9, 16, 25
c) 6, 12, 24, 48
d) -2, 4, -8, 16

4 Busca os catro primeiros termos positivos das sucesións seguintes e trata de encontrar mentalmente a fórmula do termo xeral.

- a) Números pares. b) Números impares.
c) Múltiplos de 5 d) Cubos perfectos.

Solución:

- a) 2, 4, 6, 8 $\Rightarrow a_n = 2n$
b) 1, 3, 5, 7 $\Rightarrow a_n = 2n - 1$
c) 5, 10, 15, 20 $\Rightarrow a_n = 5n$
d) 1, 8, 27, 64 $\Rightarrow a_n = n^3$

2. Progresións aritméticas

PENSA E CALCULA

Calcula mentalmente a suma dos 100 primeiros números naturais. Observa que a suma dos termos equidistantes dos extremos son iguais.

$$1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$$
$$1 + 100 = 101, \quad 2 + 99 = 101, \quad 3 + 98 = 101 \dots$$

Solución:

$$101 \cdot 50 = 5050$$

APLICA A TEORÍA

5 Busca o termo xeral das seguintes progresións aritméticas:

- a) 5, 9, 13, 17... b) 6, 3, 0, -3...
c) $2/3, 1/3, 0, -1/3 \dots$ d) $1/2, 1, 3/2, 2 \dots$

Solución:

- a) $a_1 = 5, d = 4$
 $a_n = 5 + 4(n-1) = 4n + 1$
b) $a_1 = 6, d = -3$
 $a_n = 6 - 3(n-1) = -3n + 9$
c) $a_1 = 2/3, d = -1/3$
 $a_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}(n-1) = 1 - \frac{n}{3}$
d) $a_1 = 1/2, d = 1/2$
 $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{n}{2}$

6 Escribe o termo xeral e os tres primeiros termos da progresión aritmética cuxo primeiro termo é $a_1 = 6$ e $d = 2,5$

Solución:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_n = 6 + 2,5(n-1) = 2,5n + 3,5$$

6; 8,5; 11

7 Na progresión 5, 9, 13, 17..., que termo vale 49?

Solución:

$$a_1 = 5, d = 4$$
$$a_n = 4n + 1$$
$$4n + 1 = 49 \Rightarrow n = 12$$

8 Nunha progresión aritmética coñecemos os termos $a_5 = 19$ e $a_8 = 28$. Calcula a diferenza e o primeiro termo.

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} a_1 + 4d = 19 \\ a_1 + 7d = 28 \end{array} \right\}$$

Restando á 2ª ecuación a 1ª:

$$3d = 9 \Rightarrow d = 3$$
$$a_1 + 4 \cdot 3 = 19 \Rightarrow a_1 = 7$$

9 Calcula a suma dos 25 primeiros termos da progresión aritmética cuxo termo xeral é:

$$a_n = 2n + 6$$

Solución:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$
$$a_1 = 2 + 6 = 8$$
$$a_{25} = 50 + 6 = 56$$
$$S = \frac{8 + 56}{2} \cdot 25 = 800$$

10 Calcula a suma dos 12 primeiros termos da progresión aritmética cuxo termo xeral é:

$$a_n = 3n/2 + 2$$

Solución:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$
$$a_1 = 3/2 + 2 = 7/2$$
$$a_{12} = 18 + 2 = 20$$
$$S = \frac{7/2 + 20}{2} \cdot 12 = 141$$

3. Progresións xeométricas

PENSA E CALCULA

Calcula mentalmente os dous termos seguintes de cada unha destas sucesións:

- a) 3, 6, 12, 24... b) 20, 10, 5, 5/2... c) 3, 3, 3, 3... d) 5, -5, 5, -5...

Solución:

- a) 48, 96 b) 5/4, 5/8 c) 3, 3 d) 5, -5

APLICA A TEORÍA

- 11** Busca o termo xeral das seguintes progresións xeométricas:

- a) 5, 15, 45, 135... b) 6, 3, 3/2, 3/4...

Solución:

- a) $a_1 = 5, r = 3 \Rightarrow a_n = 5 \cdot 3^{n-1}$
 b) $a_1 = 6, r = 1/2 \Rightarrow a_n = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

- 12** Dada unha progresión xeométrica cuxo primeiro termo é $a_1 = 4$ e a razón $r = 5$, calcula:

- a) a_6 b) a_{10} c) a_n

Solución:

- a) $a_6 = 4 \cdot 5^5$ b) $a_{10} = 4 \cdot 5^9$ c) $a_n = 4 \cdot 5^{n-1}$

- 13** Na progresión xeométrica 2, 4, 8, 16, 32..., que termo vale 1 024?

Solución:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2, r = 2 \text{ e } a_n = 2 \cdot 2^{n-1} \\ 2 \cdot 2^{n-1} &= 1024 \\ 2^n &= 2^{10} \\ n &= 10 \end{aligned}$$

- 14** Busca a razón da progresión xeométrica que ten $a_4 = 135$ e $a_6 = 1215$

Solución:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot r^3 &= 135 \\ a_1 \cdot r^5 &= 1215 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right.$$

Dividindo a 2ª ecuación entre a 1ª:

$$r^2 = 9 \Rightarrow r = \pm 3$$

- 15** Calcula a suma dos 10 primeiros termos das seguintes progresións xeométricas:

- a) 2, 14, 98, 686... b) 3, -6, 12, -24...

Solución:

- a) $a_1 = 2, r = 7, a_{10} = 2 \cdot 7^9$

$$S_{10} = \frac{2 \cdot 7^9 \cdot 7 - 2}{7 - 1} = 94\,158\,416$$

 b) $a_1 = 3, r = -2, a_{10} = 3 \cdot (-2)^9$

$$S_{10} = \frac{3 \cdot (-2)^9 \cdot (-2) - 3}{(-2) - 1} = -1\,023$$

- 16** Calcula a suma dos infinitos termos das seguintes progresións xeométricas:

- a) 1/5, 1/25, 1/125, 1/625...
 b) 3, 2, 4/3, 8/9, 16/27...

Solución:

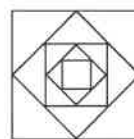
- a) $a_1 = 1/5, r = 1/5 \Rightarrow |1/5| < 1 \Rightarrow S = \frac{1/5}{1 - 1/5} = 1/4$
 b) $a_1 = 3, r = 2/3 \Rightarrow |2/3| < 1 \Rightarrow S = \frac{3}{1 - 2/3} = 9$

- 17** A suma dos infinitos termos dunha progresión xeométrica é 6 e o seu primeiro termo é 4. Calcula a razón.

Solución:

$$\frac{4}{1 - r} = 6 \Rightarrow r = 1/3$$

- 18** Se nun cadrado de área 8 m^2 se unen os puntos medios, obtense outro cadrado, e así sucesivamente. Calcula a sucesión das áreas dos devanditos cadrados. Que tipo de progresión é?



Solución:

8, 4, 2, 1... É unha progresión xeométrica decrecente de razón: $r = 1/2$

4. Aplicacións: interese simple e composto

PENSA E CALCULA

Se se depositan nunha cartilla de aforros 1 000 € e se paga un 5% de interese anual, canto diñeiro producen ao cabo dun ano?

Solución:

50 €

APLICA A TEORÍA

- 19** Nun depósito dunha entidade financeira ofrecen un 6% de interese simple anual. Se se depositan 7 500 € durante 2 anos e Facenda retén o 18%, calcula o capital acumulado ao finalizar o período.

Solución:

Tanto por un final: $0,06 \cdot 0,82 = 0,0492$

$$I = c \cdot r \cdot t$$

$$I = 7\,500 \cdot 0,0492 \cdot 2 = 738 \text{ €}$$

$$C = 7\,500 + 738 = 8\,238 \text{ €}$$

- 20** Calcula os anos que estivo depositado un capital de 5 000 € ao 3,5% de interese se se xeraron 700 € de intereses, sen o desconto de Facenda.

Solución:

$$I = c \cdot r \cdot t \Rightarrow t = \frac{I}{c \cdot r}$$

$$t = \frac{700}{5\,000 \cdot 0,035} = 4 \text{ anos}$$

- 21** Calcula o rédito ao que se depositaron 18 000 € a interese simple durante 5 anos se, unha vez retido o 18% de Facenda, os intereses xerados son de 2 952 €

Solución:

$$I = c \cdot r \cdot t \Rightarrow r = \frac{I}{c \cdot t}$$

$$r = \frac{2\,952}{18\,000 \cdot 5} = 0,0328$$

O rédito bruto:

$$r = 0,0328 : 0,82 = 0,04 \Rightarrow R = 4\%$$

- 22** Depositáanse 6 500 € ao 5% de interese composto durante 4 anos. Facenda retén o 18% dos intereses cando se recupera o capital. Calcula o capital final se os intereses se aboan anualmente.

Solución:

$$C = c(1 + r)^t \Rightarrow C = 6\,500 \cdot 1,05^4 = 7\,900,79 \text{ €}$$

$$\text{Os intereses son: } 7\,900,79 - 6\,500 = 1\,400,79 \text{ €}$$

$$\text{Facenda retén: } 1\,400,79 \cdot 0,18 = 252,14 \text{ €}$$

O capital final neto será:

$$7\,900,79 - 252,14 = 7\,648,65 \text{ €}$$

- 23** Depositáanse 35 500 € ao 4% de interese composto con pagamento de intereses diarios durante 2 anos. Calcula o capital final se Facenda retén o 18% ao rematar o prazo.

Solución:

$$C = c \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot t}$$

$$C = 35\,500 \left(1 + \frac{0,04}{360}\right)^{360 \cdot 2} = 38\,456,52 \text{ €}$$

$$\text{Os intereses son: } 38\,456,52 - 35\,500 = 2\,956,52 \text{ €}$$

$$\text{Facenda retén: } 2\,956,52 \cdot 0,18 = 532,17 \text{ €}$$

O capital final neto será:

$$38\,456,52 - 532,17 = 37\,924,35 \text{ €}$$

- 24** Que capital inicial é necesario para que, a interese composto durante 4 anos ao 5% anual e con períodos de capitalización anuais, se acumule un capital final de 15 558,48 €?

Solución:

$$C = c(1 + r)^t \Rightarrow c = \frac{C}{(1 + r)^t} \Rightarrow c = \frac{15\,558,48}{1,05^4}$$

$$c = 12\,800 \text{ €}$$

Exercicios e problemas

1. Sucesións

25 Escribe os seis primeiros termos das seguintes sucesións:

- a) 1, 9, 17, 25...
- b) 2, -4, 8, -16...
- c) Os múltiplos de 5
- d) Os inversos dos cadrados dos números naturais.

Solución:

- a) 1, 9, 17, 25, 33, 41
- b) 2, -4, 8, -16, 32, -64
- c) 0, 5, 10, 15, 20, 25
- d) 1, 1/4, 1/9, 1/16, 1/25, 1/36

26 Busca os dez primeiros termos das seguintes sucesións:

- a) $x, 2x, 4x, 8x, \dots$
- b) 1, 3, 4, 3, 9...
- c) 3, 3, 6, 9, 15...
- d) O triplo dos números naturais.

Solución:

- a) $x, 2x, 4x, 8x, 16x, 32x, 64x, 128x, 256x, 512x$
- b) 1, 3, 4, 3, 9, 3, 16, 3, 25, 3
- c) 3, 3, 6, 9, 15, 24, 39, 63, 102, 165
- d) 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27

27 Calcula os cinco primeiros termos das seguintes sucesións:

- a) $a_n = -4n + 2$
- b) $a_n = n^2 + 1$
- c) $a_n = 2^{-n}$
- d) $a_n = (n - 2)^n$

Solución:

- a) -2, -6, -10, -14, -18
- b) 2, 5, 10, 17, 26
- c) 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32
- d) -1, 0, 1, 16, 243

2. Progresións aritméticas

28 Busca o termo xeral das seguintes progresións aritméticas:

- a) 7, 11, 15...
- b) 3, -2, -7...
- c) -7, -3, 1...
- d) 1/2, 3/4, 1...

Solución:

- a) $a_1 = 7, d = 4 \Rightarrow a_n = 7 + 4(n - 1) = 4n + 3$
- b) $a_1 = 3, d = -5 \Rightarrow a_n = 3 - 5(n - 1) = -5n + 8$
- c) $a_1 = -7, d = 4 \Rightarrow a_n = -7 + 4(n - 1) = 4n - 11$
- d) $a_1 = \frac{1}{2}, d = 1/4 \Rightarrow a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(n - 1) = \frac{n + 1}{4}$

29 Escribe o termo xeral e os tres primeiros termos da progresión aritmética cuxo primeiro termo é $a_1 = 3$ e cuxa diferenza é $d = -15/4$

Solución:

$$a_n = 3 - \frac{15}{4}(n - 1) = \frac{-15n + 27}{4}$$
$$3, -3/4, -9/2$$

30 Nunha progresión aritmética, $a_{11} = 3$ e a diferenza é $d = 2/7$. Calcula o primeiro termo.

Solución:

$$a_{11} = 3, d = 2/7$$
$$a_1 + \frac{2}{7}(11 - 1) = 3 \Rightarrow a_1 = 1/7$$

31 Nunha progresión aritmética o primeiro termo vale 3 e o sexto termo vale 8. Calcula a diferenza.

Solución:

$$a_1 = 3, a_6 = 8$$
$$a_6 = a_1 + d(6 - 1)$$
$$8 = 3 + 5d$$
$$d = 1$$

32 Nas seguintes progresións aritméticas, calcula o termo que ocupa o último valor:

- a) 4, 6, 8, ..., 30
- b) 7/2, 5/2, 3/2, ..., -21/2

Solución:

- a) $a_1 = 4, d = 2, a_n = 30$
 $a_n = a_1 + d(n - 1)$
 $30 = 4 + 2(n - 1)$
 $n = 14$
- b) $a_1 = 7/2, d = -1, a_n = -21/2$
 $a_n = a_1 + d(n - 1)$
 $-21/2 = 7/2 - (n - 1)$
 $n = 15$

- 33** Nunha progresión aritmética coñecemos os termos $a_5 = 7$ e $a_7 = 25/3$. Calcula a diferenza e o primeiro termo.

Solución:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$7 = a_1 + (5-1)d \Rightarrow a_1 + 4d = 7$$

$$25/3 = a_1 + (7-1)d \Rightarrow a_1 + 6d = \frac{25}{3}$$

Restándolle á 2ª ecuación a 1ª:

$$2d = \frac{4}{3} \Rightarrow d = \frac{2}{3}$$

$$a_1 + 4 \cdot \frac{2}{3} = 7 \Rightarrow a_1 = \frac{13}{3}$$

- 34** Calcula a suma dos 15 primeiros termos da progresión aritmética cuxo termo xeral é $a_n = 3n + 12$

Solución:

$$a_1 = 3 + 12 = 15$$

$$a_{15} = 3 \cdot 15 + 12 = 57$$

$$S_{15} = \frac{15 + 57}{2} \cdot 15 = 540$$

- 35** Calcula a suma dos 12 primeiros termos da progresión aritmética cuxo termo xeral é $a_n = n/3 + 4/3$

Solución:

$$a_1 = 1/3 + 4/3 = 5/3$$

$$a_{12} = 12/3 + 4/3 = 16/3$$

$$S_{12} = \frac{5/3 + 16/3}{2} \cdot 12 = 42$$

3. Progresións xeométricas

- 36** Busca o termo xeral das seguintes progresións xeométricas:

- a) 6, 12, 24...
- b) 1/3, 1, 3...
- c) -3, 6, -12...
- d) 3/4, -1/2, 1/3...

Solución:

$$a) a_1 = 6, r = 2, a_n = 6 \cdot 2^{n-1}$$

$$b) a_1 = \frac{1}{3}, r = 3, a_n = \frac{1}{3} \cdot 3^{n-1} = 3^{n-2}$$

$$c) a_1 = -3, r = -2, a_n = -3 \cdot (-2)^{n-1}$$

$$d) a_1 = \frac{3}{4}, r = -2/3, a_n = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

- 37** Dada unha progresión xeométrica cuxo primeiro termo é $a_1 = 8$ e cuxa razón é $r = 3/4$, calcula:

- a) a_6
- b) a_{10}
- c) a_{20}
- d) a_n

Solución:

$$a) a_6 = 8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5$$

$$b) a_{10} = 8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9$$

$$c) a_{20} = 8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{19}$$

$$d) a_n = 8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

- 38** Nunha progresión xeométrica, $a_7 = 64/81$ e a razón $r = 2/3$. Calcula o primeiro termo.

Solución:

$$a_7 = a_1 \cdot r^{7-1}$$

$$\frac{64}{81} = a_1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 \Rightarrow \frac{2^6}{3^4} = a_1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6$$

$$a_1 = 3^2 = 9$$

- 39** Na progresión xeométrica -5, 10, -20..., que termo vale 640?

Solución:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

$$a_1 = -5, r = -2$$

$$640 = -5 \cdot (-2)^{n-1}$$

$$-128 = (-2)^{n-1}$$

$$(-2)^7 = (-2)^{n-1}$$

$$n-1 = 7 \Rightarrow n = 8$$

Exercicios e problemas

- 40 Nunha progresión xeométrica o primeiro termo é $1/3$ e o sétimo termo é 243. Calcula a razón.

Solución:

$$\begin{aligned}a_n &= a_1 \cdot r^{n-1} \\ 243 &= 1/3 \cdot r^{7-1} \\ r^6 &= 729 \\ r^6 &= 3^6 \\ r &= \pm 3\end{aligned}$$

- 41 Busca a razón da progresión xeométrica que ten $a_1 = 27/64$ e $a_8 = 2/81$

Solución:

$$\begin{aligned}a_n &= a_1 \cdot r^{n-1} \\ \frac{2}{81} &= \frac{27}{64} \cdot r^{8-1} \\ r^7 &= \left(\frac{2}{3}\right)^7 \\ r &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

- 42 Calcula a suma dos 12 primeiros termos das seguintes progresións:

- a) 4, -8, 16...
b) $1/10, 1/5, 2/5, \dots$

Solución:

a) $a_1 = 4, r = -2$

$$a_{12} = 4 \cdot (-2)^{11}$$

$$S_{12} = \frac{4 \cdot (-2)^{11} \cdot (-2) - 4}{-2 - 1} = -5460$$

b) $a_1 = \frac{1}{10}, r = 2$

$$a_{12} = \frac{1}{10} \cdot 2^{11}$$

$$S_{12} = \frac{1/10 \cdot 2^{11} \cdot 2 - 1/10}{2 - 1} = \frac{819}{2}$$

- 43 Calcula a suma dos infinitos termos das seguintes progresións:

- a) 9, 3, 1...
b) $9/4, 3/2, 1, \dots$

Solución:

a) $a_1 = 9, r = \frac{1}{3}$

$$S = \frac{9}{1 - (1/3)} = \frac{27}{2}$$

b) $a_1 = \frac{9}{4}, r = \frac{2}{3}$

$$S = \frac{9/4}{1 - (2/3)} = \frac{27}{4}$$

- 44 Cantos termos hai que tomar da progresión 5, 10, 20... para que a suma sexa 2555?

Solución:

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$$

$$a_1 = 5, r = 2$$

$$a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$$

$$\frac{5 \cdot 2^{n-1} \cdot 2 - 5}{2 - 1} = 2555$$

$$5(2^n - 1) = 2555$$

$$2^n = 512$$

$$2^n = 2^9$$

$$n = 9$$

- 45 A suma dos infinitos termos dunha progresión é 12 e a súa razón $r = 1/2$. Busca o primeiro termo.

Solución:

$$S = \frac{a_1}{1 - r}$$

$$12 = \frac{a_1}{1 - 1/2}$$

$$a_1 = 6$$

4. Aplicacións: interese simple e composto

- 46 Nun depósito ofrecen un 3,5% de interese simple por 4 anos. Se se depositan 12 000 € e Facenda retén o 18% dos intereses, calcula o capital acumulado ao finalizar o período.

Solución:

O tanto por un final: $0,035 \cdot 0,82 = 0,0287$

$$I = c \cdot r \cdot t$$

$$I = 12\,000 \cdot 0,0287 \cdot 4 = 1\,377,60 \text{ €}$$

$$C = 12\,000 + 1\,377,60 = 13\,377,60 \text{ €}$$

- 47 Calcula os anos que estivo depositado un capital de 25 500 € ao 6% de interese se, realizada a retención de Facenda do 18%, xeráronse 5 018,40 € de intereses.

Solución:

Interese bruto: $5\,018,40 : 0,82 = 6\,120 \text{ €}$

$$I = c \cdot r \cdot t \Rightarrow t = \frac{I}{c \cdot r}$$

$$t = \frac{6\,120}{25\,500 \cdot 0,06} = 4 \text{ anos}$$

- 48 Calcula o rédito ou tanto por cento ao que se depositaron 20 000 € a interese simple durante 2 anos se, unha vez retido o 18% de Facenda, os intereses xerados son de 1 640 €

Solución:

Interese bruto: $1\,640 : 0,82 = 2\,000 \text{ €}$

$$I = c \cdot r \cdot t \Rightarrow r = \frac{I}{c \cdot t}$$

$$r = \frac{2\,000}{20\,000 \cdot 2} = 0,05 \Rightarrow R = 5\%$$

- 49 Unha entidade financeira ofrece un 3,5% anual por un depósito renovable todos os meses. Se os intereses non se acumulan no depósito e este se renova 5 meses, que interese se obterá por 18 000 € unha vez descontado o 18% de retención de Facenda?

Solución:

Tanto por un final: $0,035 \cdot 0,82 = 0,0287$

$$I = c \cdot r \cdot \frac{t}{n}$$

$$I = 18\,000 \cdot 0,0287 \cdot 5/12 = 215,25 \text{ €}$$

- 50 Que capital se acumula se se colocan 31 000 € ao 5% de interese composto durante 3 anos se os intereses se aboan trimestralmente e Facenda retén o 18% ao finalizar o período?

Solución:

$$C = c \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot t}$$

$$C = 31\,000 \left(1 + \frac{0,05}{4}\right)^{4 \cdot 3} = 35\,983,39 \text{ €}$$

Os intereses son: $35\,983,39 - 31\,000 = 4\,983,39 \text{ €}$

Facenda retén: $4\,983,39 \cdot 0,18 = 897,01 \text{ €}$

O capital final neto será:

$$35\,983,39 - 897,01 = 35\,086,38 \text{ €}$$

- 51 Que capital inicial é necesario ter depositado para que, a interese composto durante 5 anos ao 6% anual e con períodos de capitalización mensuais, se acumule un capital final de 26 977 €?

Solución:

$$C = c \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot t}$$

$$c \left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^{12 \cdot 5} = 26\,977$$

$$1,005^{60} c = 26\,977$$

$$c = 26\,977 : 1,005^{60}$$

$$c = 20\,000 \text{ €}$$

Para ampliar

- 52** Estuda se as seguintes sucesións son progresións aritméticas ou xeométricas e busca o termo xeral:

- a) $-3/5, 3/10, 6/5, \dots$
 b) $11/3, 35/12, 13/6, \dots$
 c) $5/6, 1/2, 3/10, \dots$
 d) $3/4, -1/2, 1/3, \dots$

Solución:

a) $a_1 = -3/5, d = 9/10$

Progresión aritmética de termo xeral:

$$a_n = -\frac{3}{5} + \frac{9}{10}(n-1) = \frac{9n-15}{10}$$

b) $a_1 = 11/3, d = -3/4$

Progresión aritmética de termo xeral:

$$a_n = \frac{11}{3} - \frac{3}{4}(n-1) = \frac{53-9n}{12}$$

c) $a_1 = 5/6, r = 3/5$

Progresión xeométrica de termo xeral:

$$a_n = 5/9 \cdot (3/5)^{n-1}$$

d) $a_1 = 3/4, r = -2/3$

Progresión xeométrica de termo xeral:

$$a_n = 3/4 \cdot (-2/3)^{n-1}$$

- 53** Escribe o termo xeral e os tres primeiros termos da progresión aritmética cuxo primeiro termo é $a_1 = 3/4$ e cuxa diferenza é $d = 0,5$

Solución:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = 3/4 + 0,5(n-1) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}(n-1)$$

$$a_n = \frac{2n+1}{4}$$

$$3/4, 5/4, 7/4$$

- 54** Calcula o termo que ocupa o lugar 100 na progresión:

$$-5, -13/3, -11/3, \dots$$

Solución:

$$a_n = -5, d = 2/3$$

$$a_{100} = -5 + (100-1)2/3 = -5 + 66 = 61$$

$$a_{100} = 61$$

- 55** Calcula o primeiro termo e a diferenza nas progresións aritméticas nas que:

a) $a_3 = 70$ e $a_6 = 115$

b) $a_5 = 6$ e $a_9 = 7$

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} a) \ a_1 + 2d = 70 \\ \quad a_1 + 5d = 115 \end{array} \right\}$$

Restándolle á 2ª ecuación a 1ª:

$$3d = 45 \Rightarrow d = 15$$

$$a_1 + 2 \cdot 15 = 70 \Rightarrow a_1 = 70 - 30 = 40$$

$$\left. \begin{array}{l} b) \ a_1 + 4d = 6 \\ \quad a_1 + 8d = 7 \end{array} \right\}$$

Restándolle á 2ª ecuación a 1ª:

$$4d = 1 \Rightarrow d = 1/4$$

$$a_1 + 4 \cdot \frac{1}{4} = 6 \Rightarrow a_1 = 5$$

- 56** Calcula a suma dos 12 primeiros termos da progresión aritmética cuxo termo xeral é $a_n = 5n/2 + 1/2$

Solución:

$$a_1 = 3$$

$$a_{12} = 30 + 1/2 = 61/2$$

$$S = \frac{3 + 61/2}{2} \cdot 12 = 201$$

- 57** Dada unha progresión xeométrica cuxo primeiro termo é $a_1 = 3/8$ e cuxa razón é $r = 4/3$, calcula:

a) a_5

b) a_{15}

c) a_{30}

d) a_n

Solución:

$$a) \ a_5 = \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^4 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3$$

$$b) \ a_{15} = \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{14} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{13}$$

$$c) \ a_{30} = \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{29} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{28}$$

$$d) \ a_n = \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-2}$$

- 58** Calcula a suma dos 5 primeiros termos das seguintes progresións:

- a) 12, 4, $4/3$...
b) $9/4$, $3/2$, 1...

Solución:

a) $a_1 = 12, r = 1/3$
 $a_5 = 12 \cdot (1/3)^4$
 $S_5 = \frac{12(1/3)^4 \cdot 1/3 - 12}{1/3 - 1} = \frac{484}{27}$

b) $a_1 = 9/4, r = 2/3$
 $a_5 = 9/4 \cdot (2/3)^4 = 4/9$
 $S_5 = \frac{4/9 \cdot 2/3 - 9/4}{2/3 - 1} = \frac{211}{36}$

- 59** Calcula a suma dos infinitos termos das seguintes progresións:

- a) 5, $5/4$, $5/16$...
b) $\sqrt{2}$, 1, $1/\sqrt{2}$...

Solución:

a) $a_1 = 5, r = 1/4$
 $S = \frac{5}{1 - 1/4} = \frac{20}{3}$

b) $a_1 = \sqrt{2}, r = 1/\sqrt{2}$
 $S = \frac{\sqrt{2}}{1 - 1/\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2} - 1}$

- 60** Nunha progresión xeométrica $a_4 = 125$ e $a_6 = 3\,125$. Calcula o primeiro termo e a razón.

Solución:

$$\left. \begin{aligned} a_1 \cdot r^3 &= 125 \\ a_1 \cdot r^5 &= 3\,125 \end{aligned} \right\}$$

Dividindo a 2ª ecuación entre a 1ª:

$$r^2 = 25 \Rightarrow r = \pm 5$$

$$\text{Si } r = 5 \Rightarrow a_1 = 1$$

$$\text{Si } r = -5 \Rightarrow a_1 = -1$$

- 61** O primeiro termo dunha progresión xeométrica é 225, e o cuarto termo é $72/5$. Calcula a suma dos seus infinitos termos.

Solución:

$$\begin{aligned} 225 \cdot r^3 &= 72/5 \\ r^3 &= 8/125 = (2/5)^3 \\ r &= 2/5 \\ S &= \frac{225}{1 - 2/5} = 375 \end{aligned}$$

- 62** Calcula os anos que estivo depositado un capital de 28 500 € ao 4,5% de interese simple se se xeraron 5 258,25 € unha vez retido o 18% de Facenda.

Solución:

$$\text{Interese bruto: } 5\,258,25 : 0,82 = 6\,412,50 \text{ €}$$

$$I = c \cdot r \cdot t \Rightarrow t = \frac{I}{c \cdot r}$$

$$t = \frac{6\,412,50}{28\,500 \cdot 0,045} = 5 \text{ anos}$$

- 63** Calcula o rédito ao que se depositaron 15 000 € a interese simple durante 3 anos se, unha vez retido o 18% de Facenda, os intereses xerados son de 1 660,50 €

Solución:

$$\text{Interese bruto: } 1\,660,50 : 0,82 = 2\,025 \text{ €}$$

$$I = c \cdot r \cdot t \Rightarrow r = \frac{I}{c \cdot t}$$

$$r = \frac{2\,025}{15\,000 \cdot 3} = 0,045 \Rightarrow R = 4,5\%$$

- 64** Unha entidade financeira ofrece un 4,25% anual por un depósito renovable todos os meses. Se os intereses non se acumulan no depósito e este se renova 3 meses, que interese se obtén por 24 000 € coa retención do 18% de Facenda?

Solución:

$$\text{Tanto por un final: } 0,0425 \cdot 0,82 = 0,03485$$

$$I = c \cdot r \cdot \frac{t}{n}$$

$$I = 24\,000 \cdot 0,03485 \cdot 3/12 = 209,10 \text{ €}$$

Exercicios e problemas

- 65** Que capital bruto se acumula se se colocan 40 500 € ao 4,5% de interese composto durante 4 anos se os intereses se aboan segundo as modalidades seguintes:

- a) Anualmente.
b) Mensualmente.

Solución:

a) $C = c(1 + r)^t$

$$C = 40\,500 \cdot 1,045^4 = 48\,297 \text{ €}$$

b) $C = c\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot t}$

$$C = 40\,500 \left(1 + \frac{0,045}{12}\right)^{12 \cdot 4} = 48\,470,98 \text{ €}$$

Con calculadora

- 66** Calcula os 5 seguintes termos das progresións:
a) 3,27; 3,45; 3,63... b) 1 000, 1 200, 1 440...

Solución:

a) $a_1 = 3,27; d = 0,18$

$$3,27; 3,45; 3,63; 3,81; 3,99; 4,17; 4,35; 4,53 \dots$$

b) $a_1 = 1\,000; r = 1,2$

$$1\,000; 1\,200; 1\,440; 1\,728; 2\,073,6; 2\,488,32;$$

$$2\,985,984; 3\,583,1808$$

Problemas

- 67** Continúa as seguintes series de números figurados, ata obter tres termos máis:

a) $\begin{matrix} \bullet \\ | \end{matrix}$ $\begin{matrix} \bullet & \bullet \\ | & | \end{matrix}$ $\begin{matrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ | & | & | \end{matrix}$ b) $\begin{matrix} \bullet \\ | \end{matrix}$ $\begin{matrix} \bullet & \bullet \\ | & | \end{matrix}$ $\begin{matrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ | & | & | \end{matrix}$

Solución:

a)

$$\begin{matrix} \bullet \\ | \end{matrix} \quad \begin{matrix} \bullet & \bullet \\ | & | \end{matrix} \quad \begin{matrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ | & | & | \end{matrix} \quad \begin{matrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ | & | & | & | \end{matrix} \quad \begin{matrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ | & | & | & | & | \end{matrix} \quad \begin{matrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ | & | & | & | & | & | \end{matrix}$$

b)

$$\begin{matrix} \bullet \\ | \end{matrix} \quad \begin{matrix} \bullet & \bullet \\ | & | \end{matrix} \quad \begin{matrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ | & | & | \end{matrix} \quad \begin{matrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ | & | & | & | \end{matrix} \quad \begin{matrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ | & | & | & | & | \end{matrix} \quad \begin{matrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ | & | & | & | & | & | \end{matrix}$$

- 68** Calcula a suma dos 15 primeiros múltiplos positivos de 6

Solución:

$$6, 12, 18 \dots$$

$$a_1 = 6, d = 6$$

$$a_{15} = 6 + 6(15 - 1) = 90$$

$$S_{15} = \frac{6 + 90}{2} \cdot 15 = 720$$

- 69** Calcula a suma dos primeiros 100 números impares.

Solución:

$$1, 3, 5, 7 \dots$$

$$a_1 = 1, d = 2$$

$$a_{100} = 1 + (100 - 1) \cdot 2 = 199$$

$$S_{100} = \frac{1 + 199}{2} \cdot 100 = 10\,000$$

- 70** Un móbil avanza 5 metros nun segundo e segue avanzando de maneira que cada segundo avanza 2 metros máis que no segundo anterior. Canto percorrerá nun minuto?

Solución:

$$5, 7, 9 \dots$$

$$a_1 = 5, d = 2$$

$$a_{60} = 5 + (60 - 1) \cdot 2 = 123 \text{ m}$$

$$S_{60} = \frac{5 + 123}{2} \cdot 60 = 3\,840 \text{ m}$$

- 71** Un dependente recibe o primeiro día de traballo unha gratificación de 10 €. Nos días sucesivos, esta gratificación vai aumentando en 1,5 €, de maneira que, na súa última xornada, cobra 143,5 €. Cantos días traballou e canto cobrou en total polas gratificacións?

Solución:

$$a_1 = 10 \text{ €}, d = 1,5 \text{ €}$$

$$10 + 1,5(n - 1) = 143,5$$

$$1,5n + 8,5 = 143,5$$

$$n = 90 \text{ días}$$

$$S_{90} = \frac{10 + 143,5}{2} \cdot 90 = 6\,907,5 \text{ €}$$

- 72** O prezo da primeira entrega dunha colección de minerais é de 2 €. Nas seguintes entregas o prezo sobe 0,03 € máis que na anterior. Se a colección consta de 100 exemplares, canto se pagará polo total da colección?

Solución:

$$a_1 = 2 \text{ €}, d = 0,03 \text{ €}$$

$$a_{100} = 2 + 99 \cdot 0,03 = 4,97 \text{ €}$$

$$S_{100} = \frac{2 + 4,97}{2} \cdot 100 = 348,5 \text{ €}$$

- 73** Xurxo cobra 18 € semanais de paga e decide aforrar 1,8 € o primeiro mes e aumentar cada mes 0,75 € máis que o anterior. Canto aforrará nun ano?

Solución:

$$a_1 = 1,8 \text{ €}, d = 0,75 \text{ €}$$

$$a_{12} = 1,8 + 11 \cdot 0,75 = 10,05 \text{ €}$$

$$S_{12} = \frac{1,8 + 10,05}{2} \cdot 12 = 71,1 \text{ €}$$

- 74** Fíxose un pozo de 40 m de profundidade. Polo primeiro metro pagáronse 7,5 € e por cada metro sucesivo pagáronse 2,3 € máis que polo anterior. Cal é o custo do pozo?

Solución:

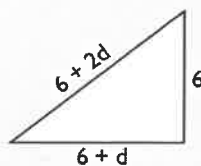
$$a_1 = 7,5 \text{ €}, d = 2,3 \text{ €}$$

$$a_{40} = 7,5 + 39 \cdot 2,3 = 97,2 \text{ €}$$

$$S_{40} = \frac{7,5 + 97,2}{2} \cdot 40 = 2\,094 \text{ €}$$

- 75** Calcula os lados dun triángulo rectángulo sabendo que están en progresión aritmética e que o menor deles mide 6 cm

Solución:



$$a_1 = 6$$

$$a_2 = 6 + d$$

$$a_3 = 6 + 2d$$

$$(6 + 2d)^2 = (6 + d)^2 + 6^2$$

$$3d^2 + 12d - 36 = 0 \Rightarrow d^2 + 4d - 12 = 0$$

$$d = 2$$

$$d = -6 \text{ (Solución non válida)}$$

Os lados son: 6 cm, 8 cm, 10 cm

- 76** Quérese saldar semanalmente unha débeda. A primeira semana páganse 5 € e en cada unha das semanas seguintes vanse pagando 4 € máis que na anterior. Se se paga en 30 semanas, a canto ascende o importe da débeda?

Solución:

$$a_1 = 5 \text{ €}, d = 4 \text{ €}$$

$$a_{30} = 5 + 29 \cdot 4 = 121 \text{ €}$$

$$S_{30} = \frac{5 + 121}{2} \cdot 30 = 1\,890 \text{ €}$$

- 77** Os ángulos dun hexágono están en progresión aritmética, e o menor deles mide 40°. Calcula os demais.

Solución:

$$a_1 = 40^\circ$$

$$a_6 = 40 + 5d$$

$$S_6 = \frac{40 + 40 + 5d}{2} \cdot 6$$

$$\frac{80 + 5d}{2} \cdot 6 = 720$$

$$240 + 15d = 720$$

$$d = 32^\circ$$

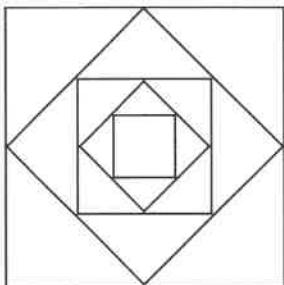
Os ángulos son:

$$40^\circ, 72^\circ, 104^\circ, 136^\circ, 168^\circ, 200^\circ$$

Exercicios e problemas

- 78** Nun cadrado únense os puntos medios dos seus lados e obtense outro cadrado inscrito. Neste último cadrado repítese a operación, obténdose outro cadrado inscrito. Se o lado do primeiro cadrado mide 2 cm, calcula a suma das áreas de todos os cadrados.

Solución:



A sucesión de áreas é: 4, 2, 1, 1/2...

$$a_1 = 4, r = 1/2$$

$$S = \frac{4}{1 - 1/2} = 8 \text{ cm}^2$$

- 79** Unha persoa gaña no seu establecemento un 7% máis do que gañou o ano anterior. Se o primeiro ano gañou 28 000 €, canto obterá en media ducia de anos?

Solución:

$$a_1 = 28\,000 \text{ €}$$

$$r = 1,07$$

$$a_6 = 28\,000 \cdot 1,07^5 = 39\,271,45 \text{ €}$$

$$S_6 = \frac{39\,271,45 \cdot 1,07 - 28\,000}{1,07 - 1} = 200\,292,16 \text{ €}$$

- 80** Déixase caer unha pelota dunha altura de 52 cm. Logo de cada bote no chan, sobe 3/4 cm da altura da que cae. Que lonxitude percorrerá a pelota denantes de chegar ao repouso?

Solución:

Percorre de baixada:

$$a_1 = 52 \text{ cm}, r = 3/4$$

$$S = \frac{52}{1 - 3/4} = 208 \text{ m}$$

Percorre de subida:

$$a_1 = 39 \text{ cm}, r = 3/4$$

$$S = \frac{39}{1 - 3/4} = 156 \text{ m}$$

$$\text{Percorre en total: } 208 + 156 = 364 \text{ cm} = 3,64 \text{ m}$$

- 81** Fórmase unha sucesión de círculos concéntricos nos que cada radio é a metade do radio do círculo anterior. Se o primeiro círculo ten un diámetro de 4 cm, calcula a suma das áreas de todos os círculos.

Solución:

$$a_1 = 4\pi \text{ cm}^2$$

$$a_2 = \pi \text{ cm}^2$$

$$a_3 = \pi/4 \text{ cm}^2$$

Obtense unha progresión xeométrica de razón:

$$r = 1/4$$

$$S = \frac{4\pi}{1 - 1/4} = 16\pi/3 \text{ cm}^2 = 16,76 \text{ cm}^2$$

- 82** Que capital inicial é necesario ter depositado para que, a interese composto durante 3 anos ao 5% anual e con períodos de capitalización trimestrais, se acumule un capital final bruto de 29 692,10 €?

Solución:

$$C = c \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot t} \Rightarrow c = \frac{C}{\left(1 + \frac{r}{n}\right)^t}$$

$$c = \frac{29\,692,1}{\left(1 + \frac{0,05}{4}\right)^{4 \cdot 3}} = \frac{29\,692,1}{1,0125^{12}}$$

$$c = 25\,580 \text{ €}$$

- 83** Calcula os anos que estivo depositado un capital de 45 000 € ao 6,5% de interese simple se, unha vez feita a retención do 18% de Facenda, xeráronse 7 195,50 €

Solución:

$$\text{Interese bruto: } 7\,195,50 : 0,82 = 8\,775 \text{ €}$$

$$I = c \cdot r \cdot t \Rightarrow t = \frac{I}{c \cdot r}$$

$$t = \frac{8\,775}{45\,000 \cdot 0,065} = 3 \text{ anos}$$

- 84** Unha entidade financeira paga o 7,5% do diñeiro depositado se este se mantén 3 anos. Calcula, nos seguintes casos, canto se gañará ao finalizar os tres anos por unha imposición de 10 000 € se Facenda retén o 18%:

- Os intereses ingrésanse nunha conta distinta.
- Os intereses ingrésanse na mesma conta.

Solución:

a) O interese é simple.

$$O \text{ tanto por un final: } 0,075 \cdot 0,82 = 0,0615$$

$$I = c \cdot r \cdot t$$

$$I = 10\,000 \cdot 0,0615 \cdot 3 = 1\,845 \text{ €}$$

b) O interese é composto.

$$C = c(1 + r)^t$$

$$C = 10\,000 \cdot 1,075^3 = 12\,423$$

$$\text{Os intereses son: } 12\,423 - 10\,000 = 2\,423 \text{ €}$$

Coa retención de Facenda:

$$2\,423 \cdot 0,82 = 1\,986,86 \text{ €}$$

- 85** Calcula o rédito ao que se depositaron 12 000 € a interese simple durante 18 meses se os intereses xerados, coa retención de Facenda descontada, foron de 664,20 €

Solución:

$$\text{Interese bruto: } 664,20 : 0,82 = 810 \text{ €}$$

$$I = c \cdot r \cdot \frac{t}{n} \Rightarrow r = \frac{I \cdot n}{c \cdot t}$$

$$r = \frac{810 \cdot 12}{12\,000 \cdot 18} = 0,045 \Rightarrow R = 4,5\%$$

Para profundar

- 86** Comproba que as seguintes expresións están en progresión aritmética e calcula o sétimo termo:

$$x^2 - 2x + 1, \quad x^2 + 1 \quad \text{e} \quad x^2 + 2x + 1$$

Solución:

$$d = a_2 - a_1 = x^2 + 1 - (x^2 - 2x + 1) = 2x$$

$$d = a_3 - a_2 = x^2 + 2x + 1 - (x^2 + 1) = 2x$$

Están en progresión aritmética de diferenza: $d = 2x$

$$a_7 = a_1 + 6d = x^2 - 2x + 1 + 12x = x^2 + 10x + 1$$

- 87** Nunha progresión aritmética, o primeiro termo e o décimocuarto suman 342. Canto suman o quinto e o décimo termo?

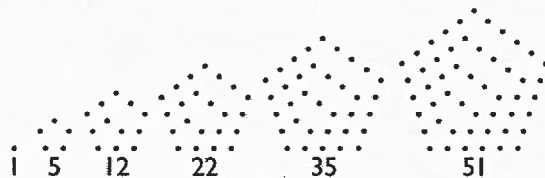
Solución:

Os termos equidistantes dunha progresión aritmética suman o mesmo. Logo sumarán 342

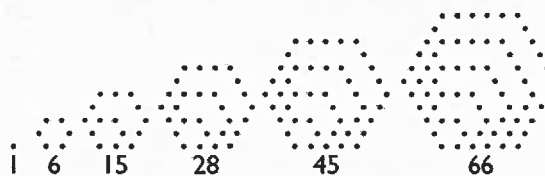
- 88** Continúa as seguintes series de números figurados ata obter tres termos máis:

**Solución:**

a)



b)



- 89** Nunha progresión aritmética o primeiro termo é 2 e o undécimo é 52. Razona o que vale o sexto termo.

Solución:

$$1 + 11 = 12; 12 : 2 = 6$$

O sexto termo é o termo central do primeiro e o undécimo. Logo:

$$a_6 = \frac{2 + 52}{2} = 27$$

- 90** A suma dos infinitos termos dunha progresión xeométrica decrecente é 6 e a suma dos seus dous primeiros termos é 16/3. Calcula o primeiro termo.

Solución:

$$6 = \frac{a_1}{1 - r} \Rightarrow a_1 = 6(1 - r)$$

$$a_1 + a_1 \cdot r = 16/3 \Rightarrow a_1(1 + r) = 16/3$$

Sustituindo a_1 na 2ª ecuación:

$$6(1 - r)(1 + r) = 16/3$$

$$6(1 - r^2) = 16/3$$

$$r^2 = 1/9$$

$$r = \pm 1/3$$

$$\text{Si } r = 1/3 \Rightarrow a_1 = 4$$

$$\text{Si } r = -1/3 \Rightarrow a_1 = 8$$

Exercicios e problemas

- 91** Dun vaso cheo de leite baléirase a metade e vólvese encher de auga. Retírase a metade do novo contido e vólvese encher con auga. Se este proceso se repite seis veces, que parte de auga contén o vaso?

Solución:

A cantidade de leite e de auga que hai no vaso é:

Leite	1	1/2	1/4	1/8	...
Auga	0	1/2	3/4	7/8	...

A cantidade de leite segue unha progresión xeométrica de razón $1/2$

$$a_6 = 1 \cdot (1/2)^5 = 1/32$$

A cantidade de auga é: $31/32$

- 92** Un depósito ofrece un 4% de interese simple anual, renovable mensualmente e sen acumular os intereses no depósito. Canto tempo se deben depositar 12 000 € para xerar uns intereses netos, é dicir, descontando o 18% de Facenda, de 984 €?

Solución:

$$\text{Interese bruto: } 984 : 0,82 = 1\,200 \text{ €}$$

$$I = c \cdot r \cdot \frac{t}{n} \Rightarrow t = \frac{I \cdot n}{c \cdot r}$$

$$t = \frac{1\,200 \cdot 12}{12\,000 \cdot 0,04} = 30 \text{ meses}$$

- 93** Calcula o capital inicial que se debe depositar ao 6% de interese composto con períodos de capitalización mensual, para que, ao cabo de 10 anos, se convertan en 33 204 € brutos.

Solución:

$$C = c \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot t}$$

$$c \left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^{12 \cdot 10} = 33\,204$$

$$1,005^{120} c = 33\,204$$

$$c = 33\,204 : 1,005^{120}$$

$$c = 18\,250 \text{ €}$$

- 94** Calcula o tempo que hai que ter un capital depositado nun banco ao 5% con interese simple, para que o capital se duplique.

Solución:

$$I = c$$

$$c \cdot r \cdot t = c$$

$$r \cdot t = 1$$

$$t = \frac{1}{r}$$

$$t = \frac{1}{0,05} = 20 \text{ anos}$$

Aplica as túas competencias

- 95** Calcula a cota mensual que hai que pagar por unha hipoteca de 10 000 € ao 3,50% e contratada a 12 anos.

Solución:

$$\text{Cota mensual: } 8,51 \cdot 10 = 85,1 \text{ €}$$

- 96** Calcula a cota mensual que hai que pagar por unha hipoteca de 25 000 € ao 4,25% e contratada a 15 anos.

Solución:

$$\text{Cota mensual: } 7,52 \cdot 25 = 188 \text{ €}$$

- 97** Calcula a hipoteca que se pode amortizar ao 5,25% durante 10 anos pagando de mensalidade de 268,25 €

Solución:

$$\text{Hipoteca: } 268,25 : 10,73 = 25 \Rightarrow 25\,000 \text{ €}$$

- 98** Calcula a hipoteca que se pode amortizar ao 5% durante 18 anos pagando de mensalidade 210,9 €

Solución:

$$\text{Hipoteca: } 210,9 : 7,03 = 30 \Rightarrow 30\,000 \text{ €}$$

Comproba o que sabes

- 1** Define progresión aritmética e pon un exemplo.

Solución:

Unha **progresión aritmética** é unha sucesión na que cada termo se atopa sumando ao termo anterior un número constante que se chama **diferenza** e que se representa coa letra **d**.

A diferenza **d** dunha progresión aritmética calcúlase restando dous termos consecutivos.

Exemplo

A sucesión 3, 7, 11, 15... é unha progresión aritmética.

- 2** Busca o termo xeral das progresións seguintes:

- a) 7, 11, 15...
b) 3, -12, 48...

Solución:

- a) $a_1 = 7$, $d = 4$
 $a_n = 7 + 4(n-1) = 4n + 3$
b) $a_1 = 3$, $r = -4$
 $a_n = 3 \cdot (-4)^{n-1}$

- 3** Calcula os anos que estivo depositado un capital de 25 500 € ao 6% de interese simple se, realizada a retención de Facenda do 18%, xeráronse 5 018,40 € de intereses.

Solución:

Interese bruto: $5\,018,40 : 0,82 = 6\,120$ €

$$I = c \cdot r \cdot t \Rightarrow t = \frac{I}{c \cdot r}$$

$$t = \frac{6\,120}{25\,500 \cdot 0,06} = 4 \text{ anos}$$

- 4** Calcula a suma dos 25 primeiros termos da progresión cuxo termo xeral é $a_n = 4n - 3$

Solución:

É unha progresión aritmética:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, d = 4 \\ a_{25} &= 4 \cdot 25 - 3 = 97 \\ S_{25} &= \frac{1 + 97}{2} \cdot 25 = 1\,225 \end{aligned}$$

- 5** Calcula a suma dos 10 primeiros termos da seguinte progresión: 2, 6, 18...

Solución:

É unha progresión xeométrica:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2, r = 3 \\ a_{10} &= 2 \cdot 3^9 \\ S_{10} &= \frac{2 \cdot 3^9 \cdot 3 - 2}{3 - 1} = 59\,048 \end{aligned}$$

- 6** Calcula a suma dos infinitos termos da seguinte progresión: $1/10, 1/100, \dots$

Solución:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1/10, r = 1/10 \\ S &= \frac{1/10}{1 - 1/10} = 1/9 \end{aligned}$$

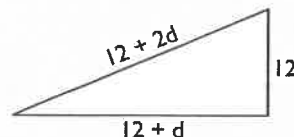
- 7** Depósitanse 6 500 € ao 5% de interese composto durante 4 anos. Facenda retén o 18% dos intereses cando se recupera o capital. Calcula o capital final se os intereses se aboan anualmente.

Solución:

$$\begin{aligned} C &= c(1 + r)^t \\ C &= 6\,500 \cdot 1,05^4 = 7\,900,79 \text{ €} \\ \text{Os intereses son: } &7\,900,79 - 6\,500 = 1\,400,79 \text{ €} \\ \text{Facenda retén: } &1\,400,79 \cdot 0,18 = 252,14 \text{ €} \\ \text{O capital final neto será: } &7\,900,79 - 252,14 = 7\,648,65 \text{ €} \end{aligned}$$

- 8** Os lados dun triángulo rectángulo están en progresión aritmética. Calcula a súa lonxitude sabendo que o menor mide 12 cm

Solución:



$$\begin{aligned} (12 + 2d)^2 &= (12 + d)^2 + 12^2 \\ 3d^2 + 24d - 144 &= 0 \\ d^2 + 8d - 48 &= 0 \\ d &= 4 \text{ (} d = -12 \text{ non é válida)} \\ \text{Os lados son: } &12, 16 \text{ e } 20 \end{aligned}$$

Paso a paso

- 99** Calcula os dez primeiros termos da seguinte sucesión:

$$a_n = 4n + 1$$

Solución:

Resolto no libro do alumnado.

- 100** Dada a seguinte sucesión, calcula a suma dos 25 primeiros termos:

$$a_n = 7n - 5$$

Solución:

Resolto no libro do alumnado.

Enuncia os seguintes problemas e resólveos coa axuda de DERIVE ou Wiris:

- 101** Na progresión $a_n = 3n + 4$, que termo vale 52?

Solución:

Resolto no libro do alumnado.

- 102** Nunha progresión xeométrica, $a_4 = 135$ e $a_6 = 1\,215$. Encontra o primeiro termo e a razón da progresión.

Solución:

Resolto no libro do alumnado.

- 103** Depósitanse 1 000 € ao 5% de interese composto durante 3 anos. Que capital teremos ao rematar ese tempo?

Solución:

Resolto no libro do alumnado.

- 104** **Internet.** Abre a web: www.xerais.es e elixe **Matemáticas, curso e tema.**

Practica

- 105** Encontra os termos xerais das seguintes sucesións e calcula os dez primeiros termos de cada unha delas:

- a) 12, 20, 28... b) 14, 4, -6...
c) 5, 15, 45... d) 6, 3, 3/2...

Solución:

- a) $a_n = 12 + 8(n - 1) = 8n + 4$
12, 20, 28, 36, 44, 52, 60, 68, 76, 84
b) $a_n = 14 - 10(n - 1) = -10n + 24$
14, 4, -6, -16, -26, -36, -46, -56, -66, -76
c) $a_n = 5 \cdot 3^{n-1}$
5, 15, 45, 135, 405, 1 215, 3 645, 10 935, 32 805, 98 415
d) $a_n = 6 \cdot (1/2)^{n-1}$
6, 3, 3/2, 3/4, 3/8, 3/16, 3/32, 3/64, 3/128, 3/256

- 106** Calcula os oito primeiros termos das seguintes sucesións:

- a) $a_n = 4^n + 2$
b) $a_n = 3n^2 - 5n + 2$
c) $a_n = 4 \cdot (-2/3)^n$
d) $a_n = (-2)^n$

Solución:

- a) 6, 18, 66, 258, 1 026, 4 098, 16 386, 65 538
b) 0, 4, 14, 30, 52, 80, 114, 154
c) -8/3, 16/9, -32/27, 64/81, -128/243, 256/729, -512/2 187, 1 024/6 561
d) -2, 4, -8, 16, -32, 64, -128, 256

- 107** Calcula a suma dos 125 primeiros termos da progresión aritmética cuxo termo xeral é $a_n = 4n/5 + 2/3$

Solución:

$$S = 19\,150/3$$

- 108** Calcula a suma dos 7 primeiros termos da progresión xeométrica cuxo termo xeral é $a_n = 3 \cdot 2^n$

Solución:

$$S_7 = 762$$

- 109** Calcula a suma dos infinitos termos da seguinte progresión:

$$3, 1, 1/3, \dots$$

Solución:

$$a_n = 3 \cdot (1/3)^{n-1}$$

$$S = 9/2$$

Enuncia os seguintes problemas e resólveos coa axuda de DERIVE ou Wiris:

- 110** Na progresión 9, 5, 1..., que lugar ocupa o termo que vale -47?

Solución:

$$a_n = -4n + 13$$

$$-4n + 13 = -47$$

$$n = 15$$

- 111** Nunha progresión aritmética coñecemos os termos $a_6 = 23/6$ e $a_9 = 35/6$. Calcula a diferenza e o primeiro termo.

Solución:

$$\begin{cases} a + 5d = 23/6 \\ a + 8d = 35/6 \end{cases}$$

$$a_1 = 1/2$$

$$d = 2/3$$

- 112** Na progresión xeométrica 8, 2, 1/2..., que termo vale 1/2 048?

Solución:

$$a_1 = 8, r = \frac{1}{4}$$

$$8(1/4)^{n-1} = 1/2\,048 \Rightarrow n = 8$$

- 113** Busca a razón da progresión xeométrica que ten $a_4 = 32/9$ e $a_6 = 512/81$

Solución:

$$r^2 = (512/81)/(32/9)$$

$$r = \pm 4/3$$

- 114** Deposítanse 2 000 € durante 3 anos a un 5% de interese. Se Facenda retén un 18% dos intereses, que interese se obtén ao rematar o dito período?

Solución:

$$\text{O tanto por un será: } 0,05 \cdot 0,82 = 0,041$$

$$I = c \cdot r \cdot t = 2\,000 \cdot 0,041 \cdot 3 = 246 \text{ €}$$

- 115** Deposítanse 3 000 € a un interese composto do 7% durante 3 anos con períodos de capitalización mensuais. Se Facenda retén o 18% cando se recupera o capital, calcula o capital final.

Solución:

O capital final será:

$$C = c \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot t} \Rightarrow C = 3\,698,78 \text{ €}$$

Os intereses son:

$$3\,698,78 - 3\,000 = 698,78 \text{ €}$$

Facenda retén:

$$698,78 \cdot 0,18 = 125,78 \text{ €}$$

O capital final neto será:

$$3\,698,78 - 125,78 = 3\,573 \text{ €}$$