MATEMÁTICAS

APLICADAS

A LAS

CIENCIAS

SOCIALES

2º BACHILLERATO

JOSÉ LUIS DIAZ LEYES

Depósito Legal: OU-140/2006

Imprime: Gráficas Gallegas
Depósito Legal: OU-140/2006

ÍNDICE

ÍNDICE

ÍNDICE

Gauss
(1777-1855)

Hamilton
(1805-1865)

Dantzig
(1914-2005)

BLOQUE I :

ÁLGEBRA

TEMA1: CÁLCULO MATRICIAL

1.1.-DEFINICIÓN DE MATRIZ

Una matriz de dimensión **mxn** es un cuadro de números reales dispuestos en **m** filas y **n** columnas. Ese cuadro se mete entre paréntesis y se le designa con una letra mayúscula.

Ejemplo

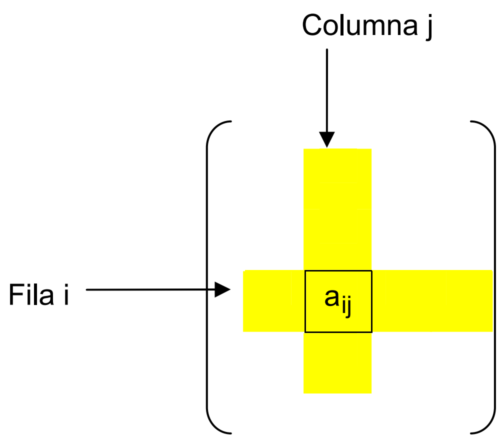
$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -6 & 0 \\ \sqrt{2} & 4 & -8 \end{pmatrix}$$ es una matriz **2x3** (6 números dispuestos en 2 filas y 3 columnas)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -6 & -3 & 12 \end{pmatrix}$$ es una matriz **3x3**

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1/3 & 4 \\ \pi & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ es una matriz **4X2**

1.2.- ELEMENTOS DE UNA MATRIZ. NOTACIONES

Cada número que forma parte de una matriz es un elemento de esa matriz. Para identificarlos, y así distinguir uno de otro, cada elemento de una matriz se simboliza con la misma letra de la matriz, pero minúscula, seguida de dos subíndices tales que el primero indica la fila que ocupa el elemento y el segundo indica la columna:



Ejemplo

En la matriz $C = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ tendremos que:

$c_{11} = 6$ $\quad c_{12} = -3$ $\quad c_{13} = 1$ $\quad c_{21} = 2$ $\quad c_{22} = 1$ $\quad c_{23} = 4$

A menudo tenemos que referirnos a una matriz A de dimensión **mxn** genérica, no a una en particular. Lo haremos de dos formas:

- $A = (a_{ij})_{mxn}$ si no necesitamos escribirla desarrollada
- Si por cualquier circunstancia necesitamos escribirla desarrollada, lo haremos así:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & . & . & a_{3n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Cada fila de una matriz la simbolizaremos con la misma letra que la matriz seguida de un subíndice que indique el número de fila. Cada columna la simbolizaremos con la misma letra que la matriz seguida de un superíndice que indique el número de la columna. Por ejemplo si

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 9 & 7 & 2 \\ 6 & 6 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$B_2 = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ es la segunda fila de la matriz B

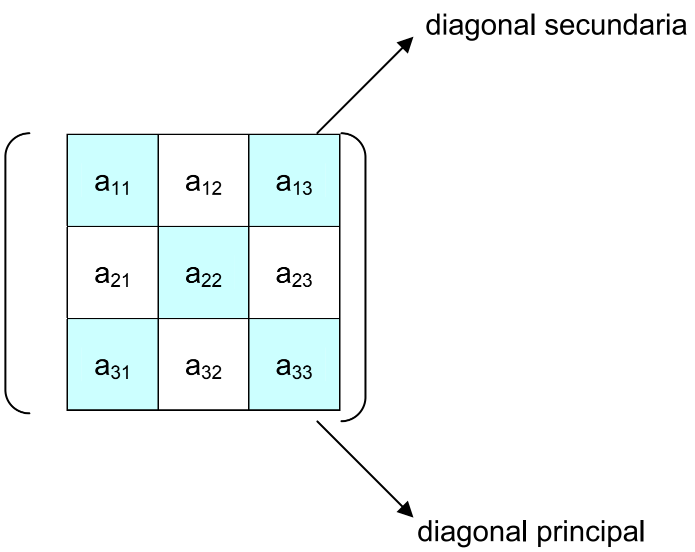
$B^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ es la tercera columna de la matriz B

1.3.-TIPOS DE MATRICES

Atendiendo al número de filas y columnas las matrices pueden ser:

- **Rectangulares:** Si el número de filas es distinto del número de columnas. Cuando una matriz está formada por una sola fila y varias columnas se dice que es una matriz fila. Si está formada por una columna y varias filas se dice que es una matriz columna

- **Cuadradas:** si el número de filas es igual al número de columnas. En estas matrices, aparte de sus filas y columnas, también son importantes sus diagonales:



Dentro de las matrices cuadradas, podemos distinguir los siguientes tipos:

- **Matriz triangular:** Si por encima (o por debajo) de la diagonal principal todos los elementos valen 0.

Ejemplo

$$T=\begin{pmatrix}5&0&0\\3&2&0\\4&4&1\end{pmatrix}\qquad V=\begin{pmatrix}9&0&4\\0&0&1\\0&0&2\end{pmatrix}$$

- **Matriz diagonal:** Si los elementos que no están en la diagonal principal son todos cero.

Ejemplo

$$L=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad H=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&5\end{pmatrix}$$

- **Matriz Identidad:** es una matriz diagonal cuya diagonal principal está constituida por unos. Son matrices importantes en el cálculo matricial. La matriz identidad de orden n (es decir, nxn) se simboliza por $\mathbf{I_n}$. Así

$$I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\qquad I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad I_4=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\ldots$$

- **Matriz simétrica:** Si los elementos simétricos respecto de la diagonal principal son iguales, es decir , si $a_{ij}=a_{ji}$.

Ejemplo

$$S=\begin{pmatrix}2&3&8\\3&4&6\\8&6&1\end{pmatrix}$$

1.4 .-MATRIZ NULA

Se llama así a una matriz cuyos elementos valen todos 0 .

Ejemplo

$$\overline{O}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

1.5.-TRASPUESTA DE UNA MATRIZ

Si A es una matriz **mxn**, la matriz traspuesta de A es la matriz **nxm** cuyas sucesivas filas son las sucesivas columnas de A. Es decir, para obtener la traspuesta de una matriz se intercambian las filas por las columnas. La traspuesta de una matriz A se simboliza por A^T .

Ejemplo

$$A=\begin{pmatrix}4&6\\-1&3\\0&9\end{pmatrix}\Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}4&-1&0\\6&3&9\end{pmatrix}$$

Si la matriz es simétrica entonces coincide con su traspuesta:

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad S^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 9 \end{pmatrix} = S$$

1.6.-IGUALDAD DE MATRICES

Dos matrices son iguales si tienen la misma dimensión y los elementos homólogos (los que ocupan la misma posición en ambas matrices) son iguales

TEMA 2: OPERACIONES CON MATRICES

2.1.-SUMA DE MATRICES

Supongamos que nos dan la siguiente información:
En un Instituto el número de alumnos repetidores se distribuyen del modo indicado en la siguiente tabla:

	1º ciclo de ESO	2º ciclo de ESO	Bachilerato
Mujeres	15	19	12
Hombres	24	26	17

Y los no repetidores del siguiente:

	1º ciclo de ESO	2º ciclo de ESO	Bachilerato
Mujeres	95	182	146
Hombres	63	101	94

En consecuencia la totalidad del alumnado del Instituto se distribuye del modo siguiente:

	1º ciclo de ESO	2º ciclo de ESO	Bachilerato
Mujeres	110	201	158
Hombres	87	127	111

Si identificamos cada tabla como una matriz tendriamos:

$$R=\begin{pmatrix}15 & 19 & 12\\ 24 & 26 & 17\end{pmatrix}\quad P=\begin{pmatrix}95 & 182 & 146\\ 63 & 101 & 94\end{pmatrix}\quad T=\begin{pmatrix}15+95 & 19+182 & 12+146\\ 24+63 & 26+101 & 17+94\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}110 & 201 & 158\\ 87 & 127 & 111\end{pmatrix}$$

de modo que T sería la suma de las matrices R y P.

Generalizando lo anterior deducimos como se realiza la suma de dos matrices:

- ✔***Condición:*** Para sumar dos matrices han de tener la misma dimensión
- ✔***Regla:*** Se suma cada elemento de la 1ª matriz con su homólogo de la 2ª matriz

Ejemplo

$$\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & 1/2\\ -6 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1/5 & 7\\ 2 & -9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 1\\ 21/5 & 15/2\\ -4 & -6\end{pmatrix}$$

Las propiedades de la suma de matrices son:

1)Conmutativa: A+B=B+A

2)Asociativa: (A+B)+C=A+(B+C)

3)Elemento Neutro: Las matrices nulas son neutras para la suma, es decir, si a una matriz A le sumamos la matriz nula obtenemos A:

$$A+\overline{O}=\overline{O}+A=A$$

Ejemplo

$$\begin{pmatrix}3 & 7 & 1\\ 2 & 5 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 7 & 1\\ 2 & 5 & 5\end{pmatrix}$$

4)Existencia de elementos opuestos: Si se cambia de signo cada elemento de una matriz A obtenemos otra matriz , llamada opuesta de A y simbolizada por -A , que sumada con A da la matriz nula: $A+(-A)=\overline{O}$

Ejemplo

Si $A=\begin{pmatrix}4 & -7\\ 2 & 5\end{pmatrix}$ entonces su opuesta es $-A=\begin{pmatrix}-4 & 7\\ -2 & -5\end{pmatrix}$ y como fácilmente se puede comprobar $A+(-A)=\overline{O}$

2.2.-PRODUCTO DE UN NÚMERO POR UNA MATRIZ

Para multiplicar un número por una matriz se multiplica dicho número por cada elemento de la matriz.

Ejemplo

Si $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 5\\ 4 & 2/3 & 6\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$ entonces $4A=\begin{pmatrix}8 & -4 & 20\\ 16 & 8/3 & 24\\ 0 & 8 & 12\end{pmatrix}$

Las propiedades de esta operación son:

1) pA+qA=(p+q)A siendo p y q números reales y A una matriz (P. ej.: 7A+5A=12A)
2) p(A+B)=pA+pB siendo p un número y A y B matrices de la misma dimensión (P. ej.: 3(A+B)=3A+3B)
3) p(qA)=(pq)A siendo p y q números reales y A una matriz (P. ej.: 7(5A)=35A)

2.3.-PRODUCTO DE MATRICES

Supongamos que nos dan la siguiente información:
Una fábrica utiliza dos tipos de cereales A y B con las propiedades que figuran en la siguiente tabla:

	Cereal A	Cereal B
Grs de **Proteinas** por KG de cereal	4	12
Grs de **Hidratos** por KG de cereal	20	16
Grs de **Grasas** por KG de cereal	3	1

Con estos cereales fabrica 3 productos P, Q y R , combinádolos en bolsas de 6 Kgs en las prporciones indicadas en la siguiente tabla:

	Bolsa de P	Bolsa de Q	Bolsa de R
Kgs de cereal A	5	3	2
Kgs de cereal B	1	3	4

Con los anteriores datos podemos calcular los gramos de Proteinas, Hidratos y Grasas que contiene cada bolsa de cada uno de los productos:

	Bolsa de P		Bolsa de Q		Bolsa de R	
	Aportados por A	Aportados por B	Aportados por A	Aportados por B	Aportados por A	Aportados por B
Grs de **Proteinas**	4·5	12·1	4·3	12·3	4·2	12·4
Grs de **Hidratos**	20·5	16·1	20·3	16·3	20·2	16·4
Grs de **Grasas**	3·5	1·1	3·3	1·3	3·2	1·4

Con lo que obtenemos:

	Bolsa de P	Bolsa de Q	Bolsa de R
Grs de **Proteinas**	4·5+12·1	4·3+12·3	4·2+12·4
Grs de **Hidratos**	20·5+16·1	20·3+16·3	20·2+16·4
Grs de **Grasas**	3·5+1·1	3·3+1·3	3·2+1·4

Si identificamos cada tabla como una matriz tendriamos:

Matriz de valores nutricionales de los cereales: $N=\begin{pmatrix}4 & 12\\ 20 & 16\\ 3 & 1\end{pmatrix}$

Matriz de composición de las bolsas: $C=\begin{pmatrix}5 & 3 & 2\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$

Matriz de valores nutricionales de las bolsas de productos:

$$B=\begin{pmatrix}4\cdot5+12\cdot1 & 4\cdot3+12\cdot3 & 4\cdot2+12\cdot4\\ 20\cdot5+16\cdot1 & 20\cdot3+16\cdot3 & 20\cdot2+16\cdot4\\ 3\cdot5+1\cdot1 & 3\cdot3+1\cdot3 & 3\cdot2+1\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}32 & 48 & 56\\ 116 & 108 & 104\\ 16 & 12 & 10\end{pmatrix}$$

Observemos que para obtener las propiedades alimentarias de las bolsas hemos multiplicado las valores nutricionales de cada cereal por las cantidades de cereales empleados en cada bolsa. Es decir, que en términos de matrices hemos multiplicado N por C dando como resultado B:

$$N\cdot C=\begin{pmatrix}4 & 12\\ 20 & 16\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 3 & 2\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot5+12\cdot1 & 4\cdot3+12\cdot3 & 4\cdot2+12\cdot4\\ 20\cdot5+16\cdot1 & 20\cdot3+16\cdot3 & 20\cdot2+16\cdot4\\ 3\cdot5+1\cdot1 & 3\cdot3+1\cdot3 & 3\cdot2+1\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}32 & 48 & 56\\ 116 & 108 & 104\\ 16 & 12 & 10\end{pmatrix}=B$$

Observando lo realizado deducimos como se realiza el producto de dos matrices:

- ***Condición:*** Para multiplicar dos matrices el número de columnas de la 1ª ha de ser igual al número de filas de la segunda

$$\begin{array}{ccccc} & A & \cdot & B & \\ m\ x & \boxed{n} & = & \boxed{n} & x\ s\end{array}$$

- ***Regla:***

1) **Dimensión del producto**: La matriz producto tiene tantas filas como el primer factor y tantas columnas como el segundo:

$$\begin{array}{ccccccc} & A & \cdot & B & & \rightarrow & A\cdot B\\ m\ x & \boxed{n} & = & \boxed{n} & x\ s & & m\ x\ s\end{array}$$

2) **Elementos del producto**: El elemento que en la matriz producto ocupa la fila i y la columna j se obtiene multiplicando la fila i del primer factor por la columna j del 2º factor

$$A.B=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_{11}\dots & b_{1j} & \dots\ b_{1s}\\ b_{21}\dots & b_{2j} & \dots\ b_{2s}\\ \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots\\ b_{n1}\dots & b_{nj} & \dots\ b_{ns}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots\\ \dots & A_iB^j & \dots\\ \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots\end{pmatrix}\rightarrow \text{Fila i de AB}$$

Fila i de A: A_i Columna j de B: B^j Columna j de AB

¿Cómo se hace el producto de la fila A_i por la columna B^j ?. Como ambas están formadas por n elementos (debido a la condición de que el número de columnas de A ha de ser igual al número de filas de B) se multiplica cada elemento de la fila por el homólogo de la columna y se suman estos productos, es decir:

$$A_iB^j = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Así pues, la matriz producto será la siguiente:

$$AB = \begin{pmatrix} A_1B^1 & A_1B^2 & A_1B^3 \cdots\cdots A_1B^S \\ A_2B^1 & A_2B^2 & A_2B^3 \cdots\cdots A_2B^S \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \boldsymbol{A_i}B^1 & \boldsymbol{A_i}B^2 & \boldsymbol{A_i}B^3 \cdots\cdots \boldsymbol{A_i}B^S \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ A_mB^1 & A_mB^2 & A_mB^3 \cdots\cdots A_mB^S \end{pmatrix}$$

Fila i del producto: **Se obtiene multiplicando la fila i de A por las sucesivas columnas de B**

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \\ -1 & 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 3 & -6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot4+1\cdot3+4\cdot1 & 2\cdot9+1(-6)+4\cdot5 \\ 3\cdot4+5\cdot3+(-2)1 & 3\cdot9+5(-6)+(-2)5 \\ (-1)4+7\cdot3+8\cdot1 & (-1)9+7(-6)+8\cdot5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 32 \\ 25 & -13 \\ 25 & -11 \end{pmatrix}$$

$3 \times \boxed{3} = \boxed{3} \times 2 \qquad\qquad 3 \times 2$

EJERCICIOS

2.1.-Siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ calcular:

a)3A b)A-2B c)AB d) A^2 (es decir A·A) e) (2A+B)(A-3B) f) AA+4AB-BB

2.2.- Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ calcular $AB-(2A+3B)^T+BA$

El producto de matrices tiene las siguientes propiedades:

1) No es conmutativa:
   - Si A es 2x3 y B es 3x5 el producto AB sería 2x5 , pero BA no existe
   - Si A es 2x3 y B es 3x2 entonces AB es 2x2 y BA es 3x3 y por tanto AB≠BA
   - Si AB y BA tienen la misma dimensión tampoco tienen por que ser iguales, como podemos observar en el siguiente

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 13 & 14 \end{pmatrix} = AB \neq BA = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

2) Es asociativo : (AB)C=A(BC)
3) Es distributivo respecto a la suma: (A+B)C=AC+BC y C(A+B)=CA+CB
4) Elemento neutro: Las matrices $\mathbf{I_n}$ son neutras para el producto , es decir, si se puede efectuar el producto de A por una matriz $\mathbf{I_n}$ lo que se obtiene es A.
5) Para que el producto de dos matrices de la matriz $\overline{O}$ no hace falta que una de ellas sea $\overline{O}$ (es decir, existen divisores de cero)

EJERCICIOS

2.3.-Siendo $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}5 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ comprueba:

a) AB≠BA (no conmutatividad)
b) A(BC)=(AB)C (asociatividad)
c) BA+BC=B(A+C) (distributiva)
d) $I_2A=A$; $BI_2=B$ (elemento neutro)

2.4.-Siendo A y B las matrices del ejercicio anterior comprueba que con matrices no son ciertas las siguientes igualdades (que sí lo son con números). ¿Cuál es la razón?:

a) $(A+B)^2=A^2+B^2+2AB$
b) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$
c) $(AB)^2=A^2B^2$

2.5.- Calcula $\begin{pmatrix}-1\\ 5\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}2 & -4\\ 6 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3\end{pmatrix}^T$

2.6.- Siendo $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}4 & 6\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ comprueba que AB= $\overline{O}$

2.7.-Si $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ¿Cuánto vale $(A-I_2)^2$

2.8.- Siendo $C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ calcula C^3 y C^4 ¿Cuánto valdrá C^n?

2.9.-Comprueba con las matrices $A\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ que la traspuesta de un producto es igual al producto de las traspuestas en orden inverso, es decir, que $(AB)^T=B^TA^T$

2.10.-Una familia puede adquirir libretas, lápices y gomas en dos establecimientos X e Y. Los precios de este material en dichos establecimientos son los dados en el siguiente cuadro:

	Libretas	Lápices	Gomas
Establecimiento X	2 €	0.6 €	0.3 €
Establecimiento Y	2.5 €	0.4 €	0.2 €

Las necesidades de material se recogen en el cuadro siguiente:

	Libretas	Lápices	Gomas
Hijo 1	8	3	2
Hijo 2	4	4	3

Mediante cálculo matricial determinar cuanto cuesta equipar a cada hijo en cada uno de los establecimientos

2.11.- Si $\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 6\\ 0 & -4\end{pmatrix}$ ¿Cuánto valen a,b,c y d?

2.12.-Si $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ -1 & 6\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}$ hallar una matriz X tal que 2X-3A=4B

2.13.- Determinar que matrices A y B cumplen $\left.\begin{aligned} 3A-2B &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\ A+B &= \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$

2.14.-¿Cuánto han de valer x e y para que $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & y \\ x & -1 \end{pmatrix}$

2.15.- Siendo $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ comprueba que $2A-A^2=I_3$

2.16.-¿Cómo son las matrices H que conmutan con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, es decir, que AH=HA?

2.17.-¿Para que valores de k se cumple que $M^2 - \frac{5}{2}M + I_2 = \overline{O}$ siendo $M = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

TEMA 3: LA MATRIZ INVERSA

3.1.-DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA DE ORDEN 2 (DETERMINANTE DE ORDEN 2)

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Se llama determinante de A al siguiente número:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 4 \cdot 6 - (-3) \cdot 5 = 39$$

3.2.-DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA DE ORDEN 3 (DETERMINANTE DE ORDEN 3)

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Definimos:

A)Menor complementario del elemento a_{ij}

Es el determinante de la matriz de orden 2 que resulta al eliminar la fila **i** y la columna **j** en que está el elemento $\mathbf{a_{ij}}$. Se simboliza por $\mathbf{D_{ij}}$

Ejemplo

En la siguiente matriz el menor complementario del elemento a_{21} será:

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 8 & 2 & 6 \\ 0 & 9 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow D_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 5 \cdot 9 = -33$$

B)Adjunto del elemento a_{ij}

El adjunto del elemento $\mathbf{a_{ij}}$, simbolizado por $\mathbf{A_{ij}}$, es:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$$

Puesto que $(-1)^{i+j}$ es un + ó un - , resulta que el adjunto es el menor complementario o su opuesto ,dependiendo de la posición del elemento. En el siguiente esquema figuran los signos que se han de anteponer a los menores para obtener los adjuntos:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -12 \quad ; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -(3 \cdot 6 - 1 \cdot 2) = -16$$

NOTA: Estas definiciones también son válidas para las matrices de orden 2. Así por ejemplo en:

$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow D_{11} = 9; D_{12} = 7; D_{21} = 2; D_{22} = 6$

Los signos para obtener los adjuntos son este caso : $\begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix}$

Y por ello los adjuntos serán : $A_{11} = 9; A_{12} = -7; A_{21} = -2; A_{22} = 6$

Una vez definidos estos conceptos, estamos en condiciones de definir el determinante de orden 3 de la siguiente manera:

C) Determinante de orden 3

Un determinante de orden 3 es igual a la suma de los productos de los elementos de una fila cualquiera (o de una columna cualquiera) por sus adjuntos.

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 9 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} + 2\left(-\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}\right) + 1\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} \quad \text{(desarrollo por la 1ª fila)} = -82$$

$$= 2\left(-\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}\right) + 7\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} + 8\left(-\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}\right) \text{(desarrollo por la 2ª columna)} = -82$$

NOTA: Para simplificar los cálculos elegiremos la fila o columna que contenga más ceros

Aplicando lo anterior a un determinante genérico de orden 3 resulta:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Como observamos se obtienen 6 productos de 3 elementos (3 que suman y 3 que restan) . Una regla para recordar cuales son estos 6 productos es la llamada **Regla de Sarrus** :

Productos que suman

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

Productos que restan

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

Así, aplicando esta regla, el anterior determinante que obtuvimos desarrollando por una línea lo podemos calcular del siguiente modo:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 4 & 6 & -7 \\ 3 & -9 & 8 \end{vmatrix} = 2\cdot 6\cdot 8 + (-5)(-7)\cdot 3 + 4(-9)\cdot 1 - 1\cdot 6\cdot 3 - (-5)\cdot 4\cdot 8 - (-7)(-9)\cdot 2 =$$

$$= 96 + 105 - 36 - 18 + 160 - 126 = 177$$

EJERCICIOS

3.1.- Calcula: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 0 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

3.2.- Resuelve las ecuaciones: $\begin{vmatrix} m & 2 \\ 8 & m \end{vmatrix} = 0$; $\begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 0 & 1 & m \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$

3.3.-MATRIZ INVERSA DE UNA MATRIZ CUADRADA

Sea A una matriz cuadrada. La inversa de A es, si existe, la matriz (que simbolizamos por A^{-1}) que verifica:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Tenemos por tanto dos cuestiones planteadas:

A)¿Qué matrices tienen matriz inversa?

Sólo tienen inversa las matrices cuyo determinante es distinto de cero.

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - (-3) \cdot 5 = 29 \neq 0$, A tiene inversa

B)¿Cómo se calcula la inversa cuando existe?

Hay dos procedimientos:

B1) Por adjuntos

$$\mathbf{A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adjA)^T}$$

siendo **adjA** la matriz adjunta, es decir, la matriz que resulta al sustituir en A cada elemento por su adjunto.

Ejemplo :

Por ejemplo: Sea $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$. Se tiene que

$$|A| = 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 2\left(-\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\right) = -10$$

$$adjA = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 10 \\ -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$(adjA)^T = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \\ 10 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Por tanto}: A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adjA)^T = \frac{1}{-10}\begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \\ 10 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & -0.2 \\ 0.4 & -0.2 & 0.1 \\ -1 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

B2) Método de Gauss

Transformaciones de Gauss:
a)Multiplicar (o dividir) una fila por un número distinto de 0
b)Sumar (o restar) a un múltiplo de una fila un múltiplo de otra

$$\left[\begin{array}{c|c} \boxed{A} & \boxed{I_n} \end{array}\right] \longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow \left[\begin{array}{c|c} \boxed{I_n} & \boxed{A^{-1}} \end{array}\right]$$

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 7 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1/3} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 7/3 & 1/3 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[F_2-2F_1]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 7/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & -2/3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[3F_2]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 7/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1-(7/3)F_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

Por tanto $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

EJERCICIOS

3.3..-¿Para que valores de K tiene inversa la matriz

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & k \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 9 & 0 & k \end{pmatrix}$

3.4.-ECUACIONES MATRICIALES

Son ecuaciones en las que la incógnita y los coeficientes son matrices. Se resuelven por el mismo procedimiento que las ecuaciones numéricas pero teniendo siempre en cuenta que <u>el producto de matrices no es conmutativo (y por tanto en ningún caso se puede alterar el orden de los factores)</u>

Como en las ecuaciones numéricas dejaremos en un miembro los términos que contienen la X y en el otro los que no la contienen. Después de operar, la expresión adquirirá una de las tres formas siguientes:

1) $AX=H \Rightarrow \mathbf{A^{-1}}AX=\mathbf{A^{-1}}H \Rightarrow I_nX= A^{-1}H \Rightarrow X= A^{-1}H$
2) $XA=H \Rightarrow XA\,\mathbf{A^{-1}}=H\mathbf{A^{-1}} \Rightarrow XI_n= H\mathbf{A^{-1}} \Rightarrow X=HA^{-1}$
3) $AXB=H \Rightarrow \mathbf{A^{-1}}AXB\mathbf{B^{-1}} = \mathbf{A^{-1}}H\mathbf{B^{-1}} \Rightarrow I_nXI_m = A^{-1}HB^{-1} \Rightarrow X= A^{-1}HB^{-1}$

EJERCICIOS

3.4.-Resolver las siguientes ecuaciones matriciales:

3.4.1.-XA=B siendo $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 3 & -8\end{pmatrix}$

3.4.2.-AX+B=C siendo $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -2 & 0 & 4\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$

3.4.3.-XA-B=C siendo $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

3.4.4.-AX+B=CX siendo $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 5\end{pmatrix}$

3.4.5.- AX+B=X siendo $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$

3.4.6.- XA-2B=3X siendo $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

3.4.7.- AXB=C siendo $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$

3.4.8.- ABX=C siendo $A=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}4\\ 2\end{pmatrix}$

3.4.9.-AX-A=I_3-AX siendo $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

TEMA 4: SISTEMAS DE ECUACIONES

4.1.-ECUACIÓN LINEAL

Se llama ecuación lineal con **n** incógnitas $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ a una expresión de la forma:

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+ \cdots\cdots +a_nx_n = b \qquad \textit{(ec. I)}$$

donde $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ son números que se llaman coeficientes de las incógnitas y **b** también es un número que se llama término independiente.

Ejemplo

$2x_1-5x_2+x_3+½\ x_4=8$ es una ecuación linal con 4 incógnitas en la que los coeficientes de x_1, x_2, x_3, x_4 son 2, -5, 1 y ½ respectivamente . El término independiente es 8

NOTA: Cuando hay menos de 4 incógnitas es usual designarlas con las letras x , y, z

Una solución de la *(ec. I)* son **n** números $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$ (uno por cada incógnita) que al sustituirlos en la ecuación por las correspondientes incógnitas cumplen la igualdad, es decir, tales que:

$$a_1s_1+a_2s_2+a_3s_3+ \cdots\cdots +a_ns_n = b$$

Ejemplo

x=2 , y=4 , z=-2 es una solución de la ecuación x+y-2z=10 pues 2+4-2(-2)=10

4.2.-SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Se llama sistema de **m** ecuaciones lineales con **n** incógnitas a un conjunto de expresiones de la forma:

$$\left.\begin{array}{ll} (1^a\text{ ec}) & a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ (2^a\text{ ec}) & a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ . & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ . & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (m^a\text{ ec}) & a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{array}\right\} \qquad \textit{(sist I)}$$

en donde las a_{ij} son números reales llamados coeficientes de las incógnitas : a_{ij} es el coeficiente de x_j en la iª ecuación. Los b_i son también números reales llamados términos independientes : b_i es el término independiente de la iª ecuación.

Ejemplo

$$\left.\begin{array}{l} 2x-3y+5z=7 \\ x \qquad -8z=\frac{1}{2} \end{array}\right\}$$ es un sistema de 2 ecuaciones con tres incógnitas x, y, z. En él se tiene que $a_{11}=2$, $a_{12}=-3$, $a_{13}=5$, $b_1=7$, $a_{21}=1$, $a_{22}=0$ (pues si una incógnita no aparece es que tiene coeficiente nulo) $a_{23}=-8$, $b_2=1/2$

Una solución del *(sist I)* son **n** números $s_1, s_2, \ldots\ldots, s_n$ (uno por cada incógnita) que sustituidos por las correspondientes incógnitas cumplen todas las igualdades.

Ejemplo

x=1 y=2 es una solución del sistema $\left.\begin{array}{r} 2x+y=4 \\ x-y=-1 \end{array}\right\}$ puesto que $\left.\begin{array}{r} 2\cdot 1+2=4 \\ 1-2=-1 \end{array}\right\}$

4.3.-CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS

Atendiendo al número de soluciones un sistema puede ser:

INCOMPATIBLE: No tiene solución . Por ejemplo

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=5 \\ 2x+2y+2z=5 \end{array}\right\}$$

COMPATIBLE : Tiene solución

- **DETERMINADO:** Una única solución

  Por ejemplo: $\left.\begin{array}{r} x+y=3 \\ x-y=1 \end{array}\right\}$ Sol: x=2 , y=1 unica

- **INDETERMINADO:** Más de una solución (infinitas)

  Por ejemplo: $\left.\begin{array}{r} x+y=5 \\ 2x+2y=10 \end{array}\right\}$ Sol: x=0,y=5 ; x=1,y=4;…

4.4.-EXPRESIÓN MATRICIAL DE UN SISTEMA

Asociadas al ***(sist I)*** hay tres matrices:

a) Matriz de coeficientes: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix}$

b) Matriz de términos independientes $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix}$

c) Matriz de incógnitas $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$

De forma que el sistema se puede escribir en forma matricial como AX=B

Ejemplo

Sea el sistema $\left.\begin{array}{r}2x-3y+5z=8\\ x+7y-4z=9\end{array}\right\}$

Se tiene que $AX=\begin{pmatrix}2 & -3 & 5\\ 1 & 7 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x-3y+5z\\ x+7y-4z\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}8\\ 9\end{pmatrix}$

Y por tanto $AX=B\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r}2x-3y+5z=8\\ x+7y-4z=9\end{array}\right\}$

4.5.-SISTEMAS EQUIVALENTES

Dos sistemas se dice que son equivalentes cuando toda solución de uno es también solución del otro, es decir, cuando tienen exactamente las mismas soluciones.

Si en un sistema sometemos sus ecuaciones a una o varias de las siguientes transformaciones, llamadas transformaciones de Gauss, resulta un sistema equivalente:

G1) Multiplicar (o dividir) una ecuación por un número distinto de 0

G2) Sumar (o restar) a un múltiplo de una ecuación un múltiplo de otra

4.6.-RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA: MÉTODO DE GAUSS

El método de Gauss consiste en someter el sistema a una o varias transformaciones de Gauss hasta conseguir un sistema equivalente (por tanto con las mismas soluciones) en el que se haya eliminado la 1ª incógnita a partir de la 1ª ecuación, la 2ª incógnita a partir de la 2ª ecuación, la 3ª incógnita a partir de la 3ª ecuación y así sucesivamente.

Al aplicar este método se nos pueden presentar tres casos que veremos con tres ejemplos:

Ejemplo 1

$$\left.\begin{array}{r}2x-y+z=3\\ x+3y-z=1\\ 3x-5y+3z=2\end{array}\right\}\begin{array}{c}\\ \xrightarrow{2E_2-E_1}\\ \xrightarrow{2E_3-3E_2}\end{array}\left.\begin{array}{r}2x-y+z=3\\ 7y-3z=-1\\ -7y+3z=-5\end{array}\right\}\xrightarrow{E_3+E_2}\left.\begin{array}{r}2x-y+z=3\\ 7y-3z=-1\\ 0=-6\end{array}\right\}\text{imposible}\quad\Rightarrow \text{S.I.}$$

Ejemplo 2

$$\left.\begin{array}{r}2x+3y=5\\ x+8y=-1\end{array}\right\}\xrightarrow{2E_2-E_1}\left.\begin{array}{r}2x+3y=5\\ 13y=-7\end{array}\right\}\quad \begin{array}{l}\rightarrow 2x+3(-7/13)=5\rightarrow x=46/13\\ \rightarrow y=-7/13\uparrow\end{array}\quad\Rightarrow \text{SCD}$$

Ejemplo 3

$$\left.\begin{array}{r}x-y+3z=2\\ 2x+y-z=1\\ x-4y+10z=5\end{array}\right\}\begin{array}{c}\\ \xrightarrow{E_2-2E_1}\\ \xrightarrow{E_3-E_1}\end{array}\left.\begin{array}{r}x-y+3z=2\\ 3y-7z=-3\\ -3y+7z=3\end{array}\right\}\xrightarrow{E_3+E_2}\left.\begin{array}{r}x-y+3z=2\\ 3y-7z=-3\\ 0=0\end{array}\right\}\longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}x-y+3z=2\\ 3y-7z=-3\end{array}\right\}\rightarrow\quad \begin{array}{l}\rightarrow\ x-(\frac{7}{3}z-1)+3z=2\\ y=\frac{7}{3}z-1\ \uparrow\end{array}\Bigg\}\rightarrow\ \begin{array}{l}x=\frac{-2}{3}z+1\\ y=\frac{7}{3}z-1\end{array}$$

(Si damos valores a z vamos obteniendo soluciones. Pej.: z=0→ x=1, y=-1) ⇒ S.C.I.

Observando los anteriores ejemplos, podemos concluir lo siguiente:

Después de aplicar el método de Gauss observamos la última ecuación, pudiendo suceder:

1) Que todos los coeficientes de las incógnitas sean nulos (es decir, queda 0 en el primer miembro) pero el término independiente es distinto de cero. Se trata de un sistema incompatible
2) Que alguna incógnita tenga coeficiente no nulo. Entonces caben dos posibilidades:
   2.1) Que el nº de ecuaciones sea igual al nº de incógnitas. Se trata de un sistema compatible determinado
   2.2) Que el nº de ecuaciones sea distitnto del nº de incógnitas. Se trata de un sistema compatible indeterminado

EJERCICIOS :

4.1.-Aplicar el método de Gauss a los siguientes sistemas:

4.1.1) $\left.\begin{array}{r}3x+2y=8\\2x-y=3\\5x+8y=18\end{array}\right\}$

4.1.2) $\left.\begin{array}{r}2x+y+z=2\\x-2y+3z=1\\x-7y+8z=1\end{array}\right\}$

4.1.3) $\left.\begin{array}{r}x+5y+3z=28\\3x-2y\qquad=-5\\3x+y+2z=14\end{array}\right\}$

4.1.4) $\left.\begin{array}{r}3x+y+2z=2\\4x+3y+3z=5\end{array}\right\}$

4.1.5) $\left.\begin{array}{r}4x-2y+4z=7\\x-2y+z=-1\\2x-y+2z=6\end{array}\right\}$

4.2.- Aplicar el método de Gauss a los siguientes sistemas:

4.2.1) $\left.\begin{array}{r}3x-y\qquad=0\\-x-2y+z=0\\5x+3y-2z=0\end{array}\right\}$

4.2.2) $\left.\begin{array}{r}2x+y+2z=14\\x+2y+z=16\\2x\qquad+z=1\\x+y-z=-4\end{array}\right\}$

4.2.3) $\left.\begin{array}{r}x+y+z+t=5\\2x-y\quad-t=2\\3y+z+t=5\\x\qquad\quad+2t=4\end{array}\right\}$

4.2.4) $\left.\begin{array}{r}x-y+2z=0\\3x-y-z=0\\-x-y+5z=0\end{array}\right\}$

4.2.5) $\left.\begin{array}{r}x+2y-3z=2\\2x-y-z=-1\\3x+y-4z=1\\x-5y+4z=-5\end{array}\right\}$

4.3.- Discutir (es decir, determinar el tipo de sistema) según los valores de k los siguientes sistemas. Y resolverlos cuando sean compatibles.

4.3.1) $\left.\begin{array}{r}x+ky=k+1\\kx+y=2k\end{array}\right\}$

4.3.2) $\left.\begin{array}{r}x-y\qquad=0\\3x+y+kz=0\\kx\qquad+4z=0\end{array}\right\}$

4.3.3) $\left.\begin{array}{r}x+3y=2\\2x+6y=4\\3x+ky=6\end{array}\right\}$

4.3.4) $\left.\begin{array}{r}x+2y-z=1\\-2x+y+z=3\\-5x+5y+2z=k-3\end{array}\right\}$

4.3.5) $\left.\begin{array}{r}2x+y=3\\-x+2y=1\\3x+4y=2k-1\end{array}\right\}$

4.3.6) $\left.\begin{array}{r}x\qquad+3z=3\\3x+y+2z=1\\5x+2y+z=k\\-2x-y+z=2\end{array}\right\}$

4.4 .- Un individuo invirtió 60000 € en tres empresas y obtuvo un beneficio de 4500 €.Calcular la inversión realizada en cada empresa, sabiendo que en la empresa A hizo el doble de inversión que en la B y C juntas y que los beneficios de las empresas fueron del 5% en A , del 10% en B y del 20% en C.

4.5 .- Una empresa tiene tres minas con menas de composiciones:

Mina	Níquel(%)	cobre(%)	Hierro(%
A	1	2	3
B	2	5	7
C	1	3	1

¿Cuantas toneladas de cada mena deben utilizarse para obtener 7 toneladas de níquel, 18 de cobre y 16 de hierro?

4.6 .- Los animales de un laboratorio deben mantenerse bajo una dieta estricta. Cada animal recibe 10 grs. de proteinas y 3 grs. de grasas. Se dispone de dos tipos de alimentos: el tipo A con el 5% de proteinas y el 3% de grasas y el tipo B con el 10% de proteinas y el 1% de grasas
¿Cuantos grs. de cada alimento se han de utilizar para obtener la dieta correcta de un único animal?

4 7.- Una refinería compra petróleo a dos paises A y B. Comprando 5000 barriles al país A y 15000 al pais B resulta un precio medio de 19 dólares el barril. Comprando 1000 barriles al país A y 1000 al país B el precio medio es de 18 dólares el barril.¿Cuanto cuesta el barril de crudo de cada país?

4.8 .- Juan y Pedro invierten 20000 € cada uno. Juan coloca una cantidad A al 4% , una cantidad B al 5% y el resto al 6% .Pedro invierte la misma cantidad A al 5% , la B al 6% y el resto al 4%. Determinar la cantidad B sabiendo que Juan obtiene unos intereses de 1050 € y Pedro de 950 €.

4.9.- El dueño de un bar ha comprado refrescos, cerveza y vino por importe de 500 € (sin impuestos) .El valor del vino es de 60 € menos que el de los refrescos y la cerveza conjuntamente. Teniendo en cuenta que por los refrescos debe pagar un IVA del 6% , por la cerveza del 12% y por el vino del 30% el importe total de la factura (con impuestos) asciende a 592´40 €. Calcular la cantidad invertida en cada tipo de bebida.

4.10.-Una tienda ha vendido 600 ejemplares de un videojuego por un total de 6384 €. El original costaba 12€ pero también han vendido copias , presuntamente defectuosas , con descuentos del 30% y del 40%. Sabiendo que el número de copias vendidas fué la mitad del de originales, calcular a cuantas copias se les aplicó el 40% de descuento.

4.11.-En las fiestas de un determinado lugar había tres espectáculos A,B y C. Un chico fué dos veces a A, una vez a B y una vez a C y gastó 14 €; otro asistió tres veces a A y una vez a B y gastó 18 €, y un tercero entró una vez en cada espectáculo y gastó 9 €. ¿Cuánto valía la entrada a cada uno de ellos?

4.12.-Una agencia contrata con un cliente 50 viajes a Málaga y 80 a Barcelona por 33050€ pero accede a realizar un descuento por pronto pago del 20% en los viajes a Málaga y un 10% en los viajes a Barcelona, con lo que sus ingresos fueron de 28120€ ¿Cuál era el precio de cada viaje?

4.13.-Entre Octubre y Noviembre una agencia despachó 50 billetes de avión a Madrid con un precio medio de 58.8€. Si en Octubre el precio medio fue de 54€ y en Noviembre de 64€ ¿Cuántos billetes despachó cada mes?

4.14.-En una tienda por comprar 2 chaquetas y una blusa nos cobran 200€. Si volvemos a la tienda y compramos una chaqueta , un pantalón y devolvemos la blusa nos cobran 100€. Si hacemos una tercera visita a la tienda y compramos 5 chaquetas, un pantalón y una blusa ¿Cuánto nos cobrarían?

4.15.-Un videoclub está especializado en películas de 3 tipos: infantiles, oeste y terror. Se sabe el 60% de las películas infantiles más el 50% de las del oeste representan el 30% del total de la películas. También que hay 100 películas más del oeste que infantiles y que el 20% de las infantiles más el 60% de las del oeste más el 60% de las de terror representan la mitad del total de películas. ¿De cuantas películas dispone el videoclub?

4.16.-A un autobús suben 42 pasajeros. El billete normal vale 10 € y el de jubilado tiene un descuento del 50% .Van también estudiantes que en número doblan al resto de pasajeros. Billetes de jubilado se despacharon 2 menos que los normales y la recaudación en taquilla fue de 278 € . ¿Qué % de descuento tiene el billete de estudiante?

TEMA 5: SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

5.1.-DESIGUALDADES

Cuando dos expresiones se relacionan mediante uno de los símbolos $<$, $\leq$, $>$, $\geq$ se obtiene una desigualdad.

Las desigualdades tiene las siguientes propiedades (las relacionamos en el caso del tipo $<$):

1) $\mathbf{a < b \Rightarrow a + c < b + c}$

Esta propiedad es la que permite trasponer términos:

$\mathbf{x+a<m} \Rightarrow x+a+(-a)<m-a \Rightarrow \mathbf{x<m-a}$

2) $\left.\begin{array}{l}\mathbf{a<p}\\ \mathbf{b<q}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{a+b<p+q}$

3) $\left.\begin{array}{l}\mathbf{a<b}\\ \mathbf{k>0}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{ka<kb}$

4) $\left.\begin{array}{l}\mathbf{a<b}\\ \mathbf{k<0}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{ka>kb}$. *¡ Al multiplicar los dos miembros de una desigualdad por un número negativo, la desigualdad **cambia** de sentido!*

Cuando cambiamos de signo los dos miembros de una desigualdad, los estamos multiplicando por -1 y en consecuencia la desigualdad cambiará de sentido.

$\mathbf{a < b \Rightarrow -a > -b}$

5.2.-INECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Se llama inecuación lineal con 2 incógnitas **x** e **y** a cualquiera de las expresiones siguientes:

$ax+by<c$ $\qquad ax+by\leq c$ $\qquad ax+by>c$ $\qquad ax+by\geq c$

donde a, b , c son números reales conocidos.

Se llama solución de una inecuación de este tipo a cualquier par de números $\mathbf{s_1}$ y $\mathbf{s_2}$ que al sustituirlos por las incógnitas cumplen la desigualdad.

Ejemplo

$2x – 5y < 6$ es una inecuación lineal con 2 incógnitas. Una de sus soluciones es $x=1$, $y=4$ puesto que $2\cdot1-5\cdot4<6$.

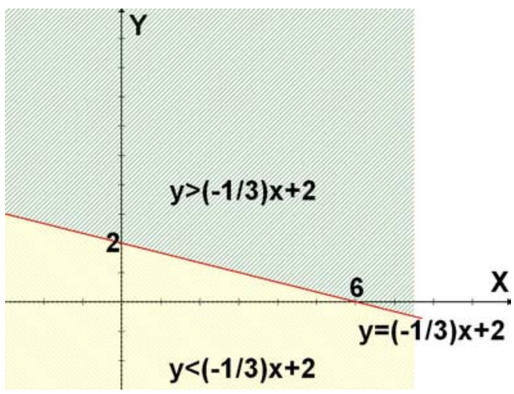
Veamos como se resuelve una inecuación de este tipo:

Ejemplo

Sea $x + 3y > 6$.

1) Despejamos la y : $3y>-x+6 \Rightarrow y > (-1/3)x+2$
2) Tomamos la igualdad $y = (-1/3)x+2$.
Se trata de la ecuación de una recta
3) Dibujamos esta recta

x	0	6
y	2	0



Dicha recta divide al plano en dos semiplanos: en el superior es y>(-1/3)x+2 y en el inferior es y<(-1/3)x+2.

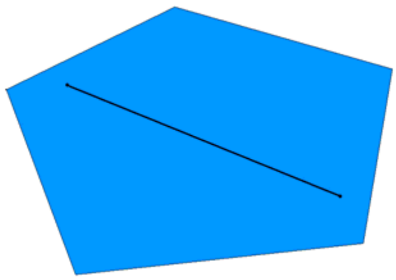
4) Elegimos el semiplano que se corresponde con la desigualdad obtenida en el punto 1 . En nuestro ejemplo elegiremos el superior que es el que corresponde a y>(-1/3)x+2 . Las coordenadas de cada punto de dicho semiplano constituyen una solución de la inecuación

5.3.-SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES CON 2 INCÓGNITAS

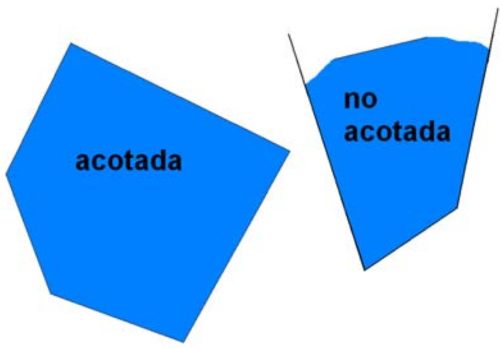
Varias inecuaciones lineales con 2 incógnitas constituyen un sistema de inecuaciones. Una solución del sistema serán 2 números s_1 y s_2 que sustituidos por las incógnitas cumplan todas las desigualdades.

Para resolver un sistema de inecuaciones representamos cada uno de los semiplanos solución de cada inecuación y después hallaremos la intersección de todos ellos. Obtendremos como solución una región del plano delimitado por segmentos y/o semirrectas (región poligonal). Esta región:

a) Es convexa, es decir, que al unir dos puntos cualquiera de ella mediante un segmento, éste queda contenido en la región



b) Puede ser acotada o no



Ejemplo

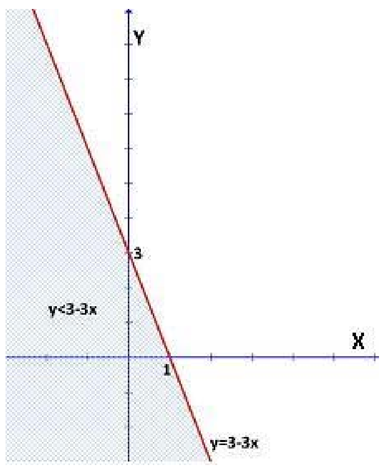
$$\text{Resolver}\quad \left.\begin{array}{r} 3x+y\le 3 \\ x+2y\ge 2 \\ x-2y\le -6 \end{array}\right\}$$

a) resolvemos cada inecuación:

<u>1ª inecuación:</u> 3x+y≤3 ⇒ y≤3-3x

y=3-3x

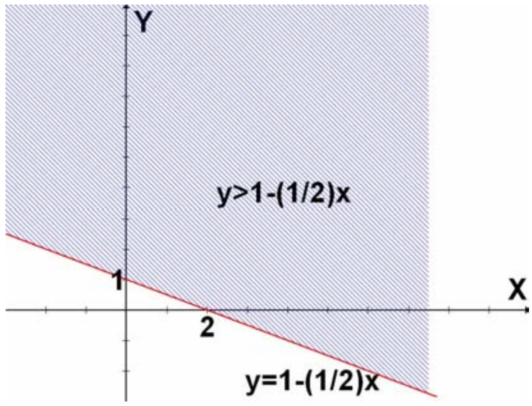
x	0	1
y	3	0



2ª inecuación : x+2y ≥2 ⇒ y≥1-(1/2)x

y=1-(1/2)x

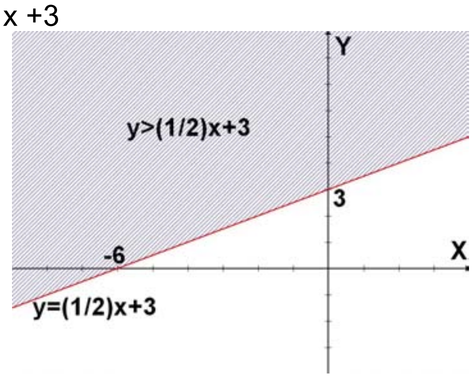
x	0	1
y	1	2



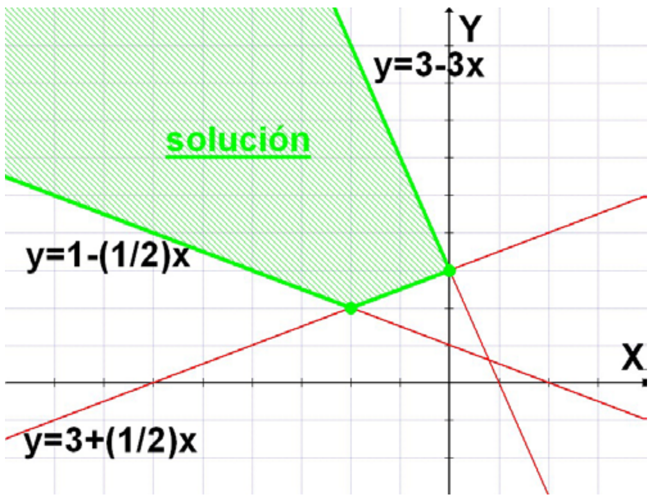
3ª inecuación: x-2y ≤ -6 ⇒ -2y ≤ -6- x ⇒ y ≥ (1/2) x +3

y = (1/2)x+3

x	0	-6
y	3	0



c) Hacemos la intersección de los 3 semiplanos anteriores:



Esta región tiene dos vértices:

A(0,3) ; $\left.\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+3 \\ y=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}x \end{cases}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}x+3=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}x \Rightarrow 7x=-14 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow y=2 \Rightarrow B(-2,2)$

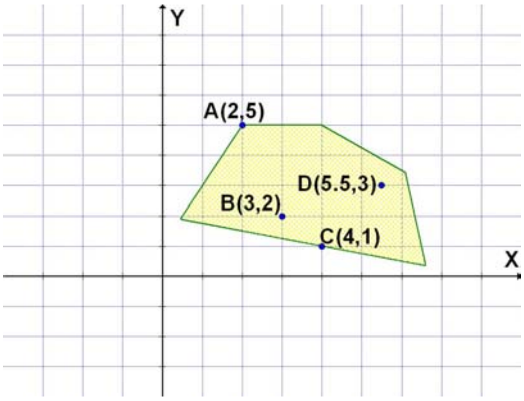
5.4.-FUNCIÓN LINEAL DE DOS VARIABLES

Se dice que Z es una función lineal de dos variables x e y si Z= ax + by siendo a y b dos números reales.

Ejemplo

Z= 2x-3y

Consideremos ahora una región poligonal del plano , por ejemplo la siguiente:



En cada punto de esta región Z toma un valor determinado:

En A(2,5)$\rightarrow$ Z_A =2·2-3·5=-11

En B(3,2)$\rightarrow$ Z_B =2·3-3·2= 0

En C(4,1)$\rightarrow$ Z_C =2·4-3·1= 1

En D(5.5,3) $\rightarrow$ Z_D =2·5.5-3·3= 2

Se nos plantea la siguiente cuestión ¿Hay un punto de esa región en el que Z toma un valor mayor que en los demás puntos de esa región? ¿Qué punto es? . Y también :¿Hay un punto de esa región en el que Z toma un valor menor que en los demás puntos de esa región? ¿Qué punto es?

La respuesta a estas preguntas es una de las propiedades fundamentales de las funciones lineales. Es la siguiente:

A) Sobre una región convexa y acotada toda función lineal alcanza un valor máximo y un valor mínimo, y además estos valores los alcanza en vértices de la región

B) Sobre una región convexa no acotada una función lineal alcanza un valor máximo o uno mínimo, pero no ambos, y lo alcanza en un vértice de la región. Pero también puede suceder que no alcance ni el máximo ni el mínimo

5.5.-FORMULACIÓN GENERAL DE UN PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN LINEAL CON DOS VARIABLES

Un problema de este tipo es aquel que responde al siguiente planteamiento:

"*De todas las soluciones (s_1,s_2) de un sistema de inecuaciones de la forma:*

$$\left.\begin{array}{c} a_1x+b_1y\le c_1 \\ a_2x+b_2y\le c_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_mx+b_my\le c_m \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{array}\right\} \quad (I)$$

se trata de hallar aquella que optimice (es decir, que haga máximo o mínimo según el caso) el valor de una función lineal

$$Z= ax + by$$

Las inecuaciones (I) anteriores se llaman **restricciones del programa** (las restricciones $x\geq0$, $y\geq0$ implican que gráficamente solo consideramos el primer cuadrante)

La función lineal Z que deseamos optimizar se llama **función objetivo**

Cada solución del sistema (I) se llama **solución factible**

El conjunto de todas las soluciones factibles se llama **región factible** (como sabemos es una región poligonal convexa).

La solución factible que optimiza la función objetivo se llama **solución óptima**

5.6.-RESOLUCIÓN DE UN PROGRAMA LINEAL

Para resolver un problema de programación lineal daremos los siguientes pasos:

1) Se plantea el programa identificando:
   - las variables
   - la función objetivo
   - las restricciones
2) Se resuelve el sistema de inecuaciones constituido por las restricciones. La solución es la región factible
3) Se hallan los vértices de la región factible
4) Pueden darse dos casos:

   a)Región factible acotada. En este caso sabemos que la función objetivo Z alcanza un máximo y un mínimo en los vértices. Por tanto para obtener la solución óptima calculamos los valores que toma Z en cada vértice y elegimos el máximo o el mínimo según el caso

   b)Región factible no acotada. Primero determinamos si el problema tiene solución. En caso de que la tenga procedemos como en el caso anterior.

Ejemplo

Una carpintería fabrica mesas con dos tipos de acabado:

-Acabado normal que precisa 1 hora de lijado y 1 hora de barnizado

-Acabado extra que precisa 1 hora de lijado y 3 de barnizado

La carpintería , semanalmente, no puede disponer de más de 100 horas de lijado ni de más de 210 de barnizado.

Cada mesa de acabado normal la vende por 300€ y cada una de acabado extra por 500€.

¿Cuántas mesas de cada tipo producirá semanalmente para que sus ingresos por venta de mesas sean máximos?

1) Identificamos:

   -variables : x= nº de mesas de acabado normal

   y= nº demesas de acabado extra

   -Función objetivo : ingresos Z= 300x+500y

   -Restricciones: horas de lijado $\leq$ 100$\Rightarrow$ x+y$\leq$100

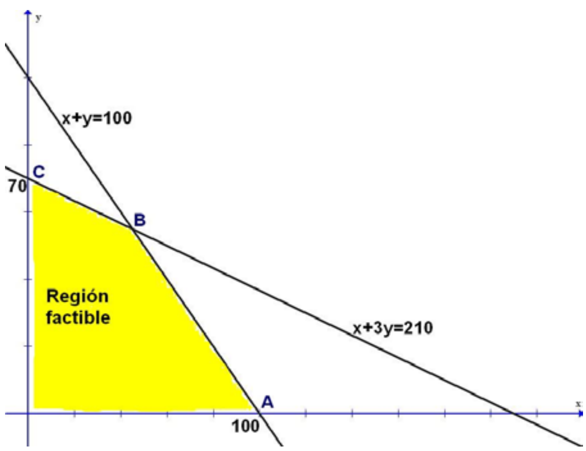
   horas de barnizado $\leq$ 210 $\Rightarrow$ x+3y$\leq$210

En consecuencia, el problema se formula así:

Maximizar $Z=300x+500y$

Sujeta a: $\left.\begin{array}{r} x+y\leq 100 \\ x+3y\leq 210 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{array}\right\}$

2) Resolvemos el sistema anterior



3) Calculamos los vértices de la región factible:

   O(0,0) A(100,0) C(0,70)

$$\left.\begin{array}{r} x+y=100 \\ x+3y=210 \end{array}\right\} \xrightarrow{E_2-E_1} \left.\begin{array}{r} x+55=100 \Rightarrow x=45 \\ 2y=110 \Rightarrow y=55 \uparrow \end{array}\right\} \Rightarrow B(45,55)$$

4) Como la región factible es acotada Z alcanza el máximo en un vértice.
   Evaluamos Z en los vértices:
   - En O(0,0) $\rightarrow$ Z= 300·0+500·0= 0
   - En A(100,0)$\rightarrow$ Z=300·100+500·0= 30000
   - En B(45,55) $\rightarrow$ Z=300·45+500·55= 41000 **Máximo**
   - En C(0,70) $\rightarrow$ Z=300·0+500·70= 35000

Por tanto la solución óptima es (45,55) , es decir, para maximizar los ingresos la carpintería fabricará semanalmente 45 mesas de acabado normal y 55 de acabado extra.

EJERCICIOS

5.1.-Una empresa constructora dispone de dos tipos de camiones A y B y quiere transportar 100Tm de material al lugar de una obra. Sabiendo que dispone de 6 camiones del tipo A con una capacidad de 15 Tm y con un costo de 40 € por viaje y de 10 camiones del tipo B con una capacidad de 5 Tm y con un costo de 30 € por viaje. ¿Cuántos camiones de cada tipo usará para que el coste sea mínimo?¿Cuál es dicho coste?

5.2.- Una empresa de transportes dispone de 6 autobuses de 60 plazas y 10 microbuses de 20. Suponiendo que se necesita desplazar a 400 pasajeros, ¿Cuántos coches de cada tipo que se deben usar para que el coste sea mínimo sabiendo que el precio de los autobuses es de 1´20 € por km y de los microbuses de 0´60?

5.3.-Una compañía fabrica y vende dos modelos de lámparas A y B. Para su fabricación se necesita un trabajo manual de 20 minutos para el modelo A y de 30 para el B; y un trabajo de máquina de 20 minutos para el A y 10 para el B.Se dispone al mes de 100 horas de trabajo manual y para la máquina de 80.Si el beneficio por unidad es de 150€ para el modelo A y 100€ para el B, planificar la producción para obtener el máximo beneficio

5.4.-En una situación de catástrofe, producida por inundaciones, el gobierno de un país tiene que evacuar 1000 personas de una cierta zona, con un equipaje total de 150 toneladas. Una compañía de aviación oferta aviones de dos tipos A y B, al precio de 0´20 millones de € el A y 0´60 millones el B.

El avión tipo A puede transportar 100 pasajeros y 25 toneladas de equipaje, mientras que el B puede transportar 200 pasajeros y 15 toneladas de equipaje.

Si hay disponibles 6 aviones tipo A y 8 aviones tipo B, ¿cómo habría que organizar el transporte para gastar lo menos posible?.

5.5.-Un empresario fabrica dos productos A y B, que luego vende con 45 € de beneficio el producto A y con 60€ de beneficio el producto B.

Su maquinaria le condiciona la producción de forma que, diariamente, no puede hacer más de 400 productos A, ni más de 300 productos B. ni más de 500 en total.

Suponiendo que vende toda la producción, ¿cuántos productos de cada clase debería fabricar para obtener el mayor beneficio posible?.

5.6.-Una distribuidora debe enviar 400 disquetes a una tienda de la forma mas económica posible. Para el embalaje dispone de 8 cajas en las que caben 40 disquetes y de 10 en las que entran 50, pero el envío ha de realizarse, a lo sumo, en 9 cajas. Sabiendo que los portes de las cajas de 50 y 40 son, respectivamente, de 8 € y 6 €, calcular cuantas cajas de cada tipo se utilizarán y el importe del envío.

5.7.-Una fábrica de muebles fabrica sillas de dos tipos. Para fabricar una silla del primer tipo, que se vende a 80€ , se gastan dos metros de tablas de sección estándar, 0,5 m. de tela de tapicería y dos horas de trabajo. Las sillas del 2º tipo se venden a 120€ y en su elaboración se utilizan 4m de tablas, 0,25 de tela y 2,5 horas de trabajo.

En la fábrica se dispone de 440 m de tablas, 65 m de tela tapicería y de 320 horas de trabajo. ¿Qué tipo de sillas y qué cantidad se han de fabricar para tener unos ingresos máximos?

5.8.-En una farmacia le ofrecen dos compuestos A y B para tomar una mezcla de ambos en la comida para conseguir adelgazar y con las siguientes recomendaciones:

-No debe tomar mas de 150 gr. de la mezcla ni menos de 50 gr.

-Debe tomar siempre más cantidad o igual de A que de B

-No debe incluir más de 100 gr. de A.

Se sabe que 1 gr. de A contiene 0´30 mg. de vitaminas y 4´50 calorías y que 1 gr. de B contiene 0´20 mg. de vitaminas y 1´50 calorías. ¿Cuántos grs. tomará de cada compuesto para obtener el preparado mas rico en vitaminas? ¿Y si quiere obtener el más pobre en calorías?

5.9.- En unos grandes almacenes ofrecen el lote A formado por 3 pantalones y 1 camisa al precio de 150€ y el lote B que consta de un pantalón y 3 camisas por 100€. ¿Cuántos lotes de cada tipo he de comprar si necesito, al menos, 13 camisas y 15 pantalones haciendo el menor gasto?

5.10.- Un comerciante tiene 10000€ para comprar dos tipos de televisores A y B, pudiendo almacenar 80 como máximo. Los de tipo a cuestan 250€ y los vende a 320€ y los de tipo B le cuestan a 100€ y los vende a 160€. ¿Cuántos comprará de cada clase para maximizar el beneficio?

5.11.-Un taller pirotécnico fabrica cohetes sencillos que luego vende a 2.7€ el paquete de 10 y cohetes de colores que vende a 3.6€ el paquete también de 10. Por problemas de mecanización no puede fabricar al día más de 400 cohetes sencillos ni más de 300 de colores, ni más de 500 en total. ¿Cuántos cohetes de cada clase ha de fabricar diariamente para maximizar sus ingresos?

PRUEBAS DE ACCESO DE GALICIA

JUNIO 2001

1.-Calcular la matriz X talque AX=A+B siendo $A=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}3&3\\1&1\end{pmatrix}$

2.-Los alumnos de un colegio tienen 120 camisetas, 110 pañuelos y 70 gorros. Con el fin de obtener dinero para un viaje los ponen a la venta en dos paquetes distintos; por el primero (dos camisetas, un pañuelo y un gorro) cobrarán 600 pesetas ; y por el segundo (una camiseta, dos pañuelos y un gorro) cobrarán 700 pesetas. ¿Cuántos paquetes de cada tipo deberán de vender para obtener el máximo ingreso?

SEPTIEMBRE 2001

1.-Resolver la ecuación matricial AX=BX+C siendo $A=\begin{pmatrix}-1&2\\-2&1\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-3&1\\1&2\end{pmatrix}; C=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$

2.-Dibujar la región determinada por las inecuaciones:

$$x\ge 0\,;\,y\ge 0\,;\,x+y\le 6\,;\,2x+y\le 10\,;\,x+y\ge 3$$

y maximizar la función z=4x+3y sometida a las restricciones dadas por estas inecuaciones

JUNIO 2002

1.-Representar el recinto que cumple las siguientes restricciones:

$$0\le y\,;\,0\le x\le 10\,;\,x\le y\,;\,y-2x\le 6\,;\,3x+4y\ge 24$$

Maximizar la función F(x,y)=x+y+1 con las restricciones anteriores

2.-Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ se pide

a) Calcular A^2
b) Resolver la ecuación $A^2X+AB=B$

SEPTIEMBRE 2002

1.-Dado el sistema $\left.\begin{aligned}2x-y\quad&=2\\x-y+z&=2\\y-z&=-1\end{aligned}\right\}$ expresarlo matricialmente AX=B , calcular la matriz inversa de A y resolverlo

2.-Resolver la ecuación matricial AX+X=B siendo $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

JUNIO 2003

1.-Una empresa fabrica dos productos A y B . La fabricación de 1 Kg de A necesita 4 horas de trabajo y un gasto en material de 60 €, obteniéndose un beneficio de 45€. La fabricación de 1 Kg de B necesita 8 horas de trabajo y un gasto de 48€ en material, obteniéndose un beneficio de 33 €.

Cada semana el empresario dispone de 200 horas de trabajo. Además firmó un contrato que le obliga a fabricar semanalmente un mínimo de 15 Kgs de A y 10 Kgs de B. Si semanalmente no quiere gastar más de 1920 € en material ¿Cuántos Kgs por semana debe de fabricar de cada producto para obtener el máximo beneficio posible?

2.-Resolver matricialmente la ecuación $A^TX-B=0$ siendo $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}3&4\\5&6\\1&2\end{pmatrix}$ en donde A^T denota la matriz traspuesta de A

SEPTIEMBRE 2003

1.-En la siguiente tabla se indica la audiencia prevista (en miles de espectadores) por tres cadenas de televisión (A, B y C) en una determinada semana y en cada uno de los tres segmentos horarios (Mañana:M , Tarde:T , Noche:N)

	A	B	C
M	40	60	20
T	60	40	30
N	10	80	90

Sin embargo, como consecuencia de la calidad de los programas emitidos, se produjo en la audiencia prevista (y e todos los segmentos horarios) una reducción del 10% para la cadena A, una reducción del 5% para la B y un aumento del 20% para la C

a)Obtener la matriz que representa la nueva audiencia de las tres cadenas en los tres segmentos horarios

b)Sabiendo que el beneficio que obtiene cada cadena por espectador es de 3€ por la mañana, 4€ por la tarde y 6€ por la noche, obtener mediante cálculo matricial los beneficios para cada una de las tres cadenas.

2.-Se desean invertir 3000€ en dos tipos de acciones A y B. El tipo A tiene bastante riesgo, con un interés anual del 10% y el tipo B es bastante segura con un interés anual del 7%. Se decide invertir como máximo 1800€ en A y como mínimo 600€ en B, y además, invertir en A tanto o más que en B. ¿Cuál debe de ser la distribución de la inversión para obtener el máximo rendimiento anual?

JUNIO 2004

1.-Tres trabajadores A, B y C, al concluir un determinado mes, presentan a su empresa la siguiente plantilla de producción, correspondiente a las horas de trabajo, dietas de mantenimiento y Kms de desplazamiento que han realizados

	Horas de trabajo	Dietas	Kilómetros
A	40	10	150
B	60	15	250
C	30	6	100

Sabiendo que la empresa paga a los tres trabajadores la misma retribución: **x** € por hora trabajada, **y** € por cada dieta y **z** € por Km de desplazamiento y que paga ese mes un total de 924€ al trabajador A, 1390€ al B y 646€ al C, calcular **x,y,z**

2.-Un concesionario de coches comercializa dos modelos de automóviles: uno de gama alta con el que gana 1000€ por unidad vendida y otro de gama baja cuyos beneficios por unidad vendida son de 600€. Por razones de mercado, la venta anual de estos modelos está sujeta a las siguientes restricciones:

- El número de modelos de gama alta vendidos no será menor de 50 ni mayor de 150 coches
- El número de modelos de gama baja vendidos ha de ser mayor o igual al de modelos de gama alta vendidos
- El concesionario puede vender hasta un máximo de 500 automóviles de los dos modelos al año

a) Plantear las restricciones y representar gráficamente la región factible
b) ¿Cuántos automóviles de cada modelo ha de vender con el fin de maximizar los beneficios?

SEPTIEMBRE 2004

1.-Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}5x & 2\\ 2x & 2\\ x & -2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1\\ y\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}3z\\ z\\ 2z\end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix}2\\ 3/2\\ -3/2\end{pmatrix}$

a) Calcular la matriz (A·B)+C

b) Sabiendo que (A·B)+C=2D, formular un sistema de ecuaciones y encontrar los valores de x,y,z

2.-En una emisora de radio se detectó que un programa A que dedica 20 minutos a información general y 20 min. a música capta un total de 30000 oyentes, mientras que un programa B que dedica 30 min. a información general y 10 min. a música capta 20000 oyentes.

En un determinado periodo, se decide dedicar un máximo de 300 minutos a información general y 140 minutos a música. Si se desea que el número de oyentes sea máximo ¿Cuántas veces habrá de emitirse cada uno de esos programas A y B en ese periodo?. Representar gráficamente la región factible

JUNIO 2005

1.-Un fabricante produce tres artículos diferentes (A, B y C) , cada uno de los cuales precisa para su elaboración de tres materias primas (M_1 , M_2 y M_3). En la siguiente tabla se representa el número de unidades de cada materia prima que se requiere para elaborar una unidad de cada producto:

	A	B	C
M_1	2	1	3
M_2	3	2	2
M_3	1	2	4

Dispone de 50 unidades de M_1, 70 de M_2 y 40 de M_3 .

a)Determinar las cantidades de artículos A, B y C que produce dicho fabricante

b)Si los precios de venta de cada artículo son, respectivamente, 500, 600 y 1000 € y si gasta en cada unidad de materia prima 50 , 70 y 60€ , respectivamente, determinar el beneficio total que consigue con la venta de toda la producción obtenida (utilizando todos los recursos disponibles)

2.-Una empresa fabrica dos tipos de televisores (T_{21} y T_{14}) de 21 y 14 pulgadas , a un coste por televisor de 100 y 50€, respectivamente. Se sabe que el número de televisores T_{21} fabricados diariamente no supera en 4 unidades a los T_{14} , y que entre ambos no se superan diariamente los 30 televisores. También se sabe que el proceso productivo no permite fabricar diariamente menos de 2 televisores T_{21} ni menos de 5 televisores T_{14} .

a)Formular el sistema de inecuaciones asociado al enunciado

b)Dibujar la región factible y calcular sus vértices

c)Calcular cuántos televisores T_{21} y T_{14} maximizan y cuántos minimizan el coste de producción diaria

SEPTIEMBRE 2005

1.-Una empresa fabrica juguetes de 3 tipos T_1 , T_2 , T_3 . los precios de coste de cada juguete y los ingresos que obtiene la empresa por cada juguete vendido vienen dados en la siguiente tabla:

	T_1	T_2	T_3
Precio de coste	4€	6€	9€
Ingreso	10€	16€	24€

El número de ventas anuales es de 4500 juguetes T_1 , 3500 juguetes T_2 y 1500 juguetes T_3. Sabiendo que la matriz de costes C y la matriz de Ingresos I son matrices diagonales y que la matriz de ventas anuales V es una matriz fila

a) Determinar las matrices C, I, y V
b) Obtener , utilizando las matrices anteriores, , la matriz de costes anuales, la matriz de ingresos anuales y la matriz de beneficios anuales, correspondientes a los tres tipos de juguetes

2.-Un centro comercial vende dos tipos de teléfonos móviles, el X y el Y. Sus empleados utilizan 3 horas de tiempo de ventas por cada teléfono del modelo X vendido y 5 horas por cada teléfono Y vendido, disponiendo de un máximo de 600 horas de venta para el siguiente periodo de un mes. Además, en ese mes, deben vender como mínimo 25 teléfonos del modelo X , y el número de teléfonos que vendan del modelo Y ha de ser mayor o igual que el de teléfonos X.

La empresa obtiene un beneficio de 40€ por cada modelo X vendido y de 50€ por cada modelo Y.

a) Formular el sistema de inecuaciones asociado al enunciado
b) Representar gráficamente la región factible y calcular sus vértices.
c) ¿Cuántos teléfonos de cada modelo se deberían de vender, durante el siguiente periodo de un mes, para maximizar los beneficios?¿A cuánto ascenderían dichos beneficios?

JUNIO 2006

1.-Determinar la matriz X en la siguiente ecuación matricial $A^2X=½(A+BC)$ siendo

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & 1\\ 6 & 2\end{pmatrix}$$

2.-Un granjero dispone de un máximo de 45 hectáreas en las que quiere sembrar dos tipos de cultivo A y B, esperando obtener un beneficio de 120 € por hectárea de A y 180 € por hectárea de B. Calcula que va a tener como máximo 600 horas de trabajo disponibles durante la estación de siembra y que va a precisar 10 horas por hectárea de A y 40 horas por hectárea de B . Además , el tipo de cultivo exige que las hectáreas dedicadas al cultivo tipo B no superen a las de tipo A

a) Formular el sistema de inecuaciones asociado al enunciado. b) Dibujar la región factible y calcular sus vértices. C) ¿Cuántas hectáreas tendrá que sembrar de cada tipo de cultivo para maximizar el beneficio? Calcular dicho beneficio máximo

SEPTIEMBRE 2006

1-. Dada la ecuación matricial $X\cdot A+B^t=2X$, siendo B^t la matriz traspuesta de B y

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&1\\0&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\0&-1&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$$

(a)Despejar la matriz X
(b) Hallar la matriz inversa de A-**2I**, siendo **I** la matriz identidad de orden 3.
c) Resolver la ecuación matricial.

2.- Una explotación maderera dedicada a la plantación y recolección de pinos y eucaliptos decide repoblar uno de sus montes. Según un estudio de los técnicos, para que sea rentable la explotación se han de plantar entre 2 y 15 hectáreas de pinos y entre 6 y 25 hectáreas de eucaliptos. Además, el coste por hectárea de pinos es de 500 euros y el coste por hectárea de eucaliptos es de 300 euros, contando con un presupuesto máximo de 12000 euros para la explotación en proyecto. Tras la recolección de la madera los ingresos obtenidos son de 2200 euros por cada hectárea de pinos y de 1500 euros por cada hectárea de eucaliptos.
¿Cuántas hectáreas de pinos y de eucaliptos se repoblarán para obtener el máximo beneficio? ¿a cuánto asciende dicho beneficio? (a) Exprésense la función objetivo y las restricciones del problema, (b) Represéntese gráficamente la región factible y calcúlense los vértices de la misma, (c) Resuélvase el problema.

JUNIO 2007

1.-Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&-1&2\\2&1&-1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&1&0\\a&b&c\\0&1&-1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}0&-1&-3\\-2&-5&-3\\3&6&2\end{pmatrix}$ calcular los valores de a, b y c para que se verifique la ecuación matricial $A\cdot B^t=C$, donde B^t denota la matriz traspuesta de la B.

2.-Mario´s Pizza es un productor de pizzas de dos tipos A y B. Obtiene un beneficio de 1 euro por cada pizza A que produzca y de 1´50 euros por cada pizza de tipo B. Cada pizza incluye una combinación de pasta de harina y de mezcla de relleno según se indica en el siguiente cuadro

	Pasta de harina	Mezcla de relleno	Beneficio
Pizza A	1/2 Kg	1/8 Kg	1 €
Pizza B	1/2 Kg	1/4 Kg	1´5 €

En un día cualquiera , se dispone de un máximo de 75 Kgs de pasta de harina y de 25 Kgs de mezcla de relleno, y con base a la demanda en el pasado, Mario´s debe de vender diariamente por lo menos 50 pizzas tipo A y por lo menos 25 tipo B.
a)Formular el sistema de inecuaciones , representar gráficamente la región factible y calcular sus vértices
b) ¿Cuántas pizzas A y B deberá de fabricar diariamente para maximizar los beneficios? Calcular dichos beneficios

SEPTIEMBRE 2007

1.-Una empresa de productos informáticos tiene tres tiendas *(T_u T_2y T_3)* en las que vende un modelo de ordenador *(O),* uno de impresora *(I)* y otro de cámara digital (*C*), a un precio de venta por unidad de 1200 €, 300 € y 650 €, respectivamente. En cierto mes, el número de artículos vendidos (en cada tienda) es el indicado en la tabla siguiente:

	O	*I*	*C*
T_1	x	y	4
T_2	25	x	z
T_3	20	y	z

Determinar el número de artículos vendidos en cada una de las tres tiendas, sabiendo que los ingresos obtenidos en dicho mes fueron 23600 € en la T_1 , 39700 € en la T_2 y 32200 € en la T_3.

2.- Sea el sistema de inecuaciones siguiente: $-x + 6y \geq 12$; $x + 2y \leq 20$; $3x + 2y \geq 24$
(a) Representar gráficamente la región factible y calcular sus vértices.
(b) ¿ En qué punto de esa región alcanza el valor máximo la función $f(x, y) = 4x + y$?

JUNIO 2008

1.-Un autobús transporta en cierto viaje 60 pasajeros de tres tipos: viajeros que pagan el billete entero que vale 1€ ; estudiantes que tienen un 25% de descuento y jubilados con un descuento del 50% del precio del billete. La recaudación del autobús en este viaje fue de 48€. Calcular el número de viajeros de cada clase sabiendo que el número de estudiantes era el doble que el número del resto de pasajeros.

2.-Un proyecto de jardinería puede llevarse a cabo por dos grupos diferentes de una misma empresa: G_1 y G_2. Se trata de ajardinar tres zonas: A, B y C. En la siguiente tabla se recoge el número de unidades que puede ajardinar cada grupo en cada zona durante una semana:

	Zona A	Zona B	Zona C
Grupo G_1	4	10	7
Grupo G_2	10	5	7

Se necesita ajardinar un mínimo de 40 unidades en la zona A, 50 unidades en la zona B y 49 unidades en la zona C, estimándose el coste semanal en 3300€ para el grupo G_1 y en 4000€ para el grupo G_2.
¿Cuántas semanas deberá trabajar cada grupo para finalizar el proyecto con el mínimo coste? Expresar la función objetivo y las restricciones del problema. Representar gráficamente la región factible y calcular sus vértices.

SEPTIEMBRE 2008

1.-Considerar la ecuación matricial $X + X{\cdot}A + B^t = 2C$,en donde las matrices *A, B* y C vienen dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

y donde B^t denota la matriz traspuesta de *B.*
(a) Despejar la matriz *X* en la ecuación matricial, ¿qué orden tiene?
(b) Calcular la matriz $2C - B^t$ y la inversa de la matriz $I + A$, siendo *I* la matriz identidad de orden 3.
(c) Resolver la ecuación matricial obteniendo el valor de la matriz *X.*

2.- Un fabricante produce dos modelos diferentes M_1 y M_2 de un mismo articulo y sabe que puede vender tantos como produzca. El modelo M_1 requiere diariamente 25 minutos de corte, 60 minutos de ensamblaje y 68 minutos de acabado, generando un beneficio de 30 euros por modelo. El modelo M_2 precisa diariamente 75 minutos de corte, 60 minutos de ensamblaje y 34 minutos de acabado, generando un beneficio de 40 euros por modelo. Cada día se dispone de un máximo de 450 minutos de corte, 480 minutos de ensamblaje y 476 minutos de acabado.
(a) Formular el sistema de inecuaciones asociado al enunciado. *(b)* Representar gráficamente la región factible y calcular sus vértices, *(c)* ¿Cuántos artículos de cada modelo debe fabricar diariamente para maximizar el beneficio? ¿a cuánto asciende dicho beneficio?

JUNIO 2009

1.- Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

Calcula los valores de los números reales *x, y, z,* para que se verifique la siguiente igualdad entre matrices

$x{\cdot}A^{-1}{\cdot}B = E + y{\cdot}C + z{\cdot}D$

2.- Una compañía química diseña dos posibles tipos de cámaras de reacción que incluirán en una planta para producir dos tipos de polímeros P1 y P2.. La planta debe tener una capacidad de producción de, al menos 100 unidades de P1 y al menos 420 unidades de $P2_2$ cada día. Cada cámara de tipo A cuesta 600.000 euros y es capaz de producir 10 unidades de P1 y 20 unidades de P_2 por día; la cámara de tipo B es un diseño más económico, cuesta 300.000 euros y es capaz de producir 4 unidades de P1 y 30 unidades de P_2 por día. Debido al proceso de diseño, es necesario tener al menos 4 cámaras de cada tipo en la planta. ¿Cuántas cámaras de cada tipo deben incluirse para minimizar el coste y aún así satisfacer el programa de producción requerido? Formula el sistema de inecuaciones asociado al problema. Representa la región factible y calcula sus vértices.

SEPTIEMBRE 2009

1.-Considera las matrices *A, B,* C y *D* siguientes:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2x\\ 4\\ y\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}y\\ z\end{pmatrix}$$

(a) Calcula la inversa de la matriz *A.*

(b) Calcula la matriz C· D - B. ¿Cuál es su orden?

(c) Determina los valores de *x, y,* z que satisfacen la identidad $A^{-1}\cdot B = C\cdot D - B$

2.- Un alfarero elabora dos tipos de piezas: botijos y cántaros, en cantidades reducidas. Sabe que no puede producir más de 8 piezas diarias ni tampoco más de 4 cántaros diarios. También, por motivos de producción, desea que el número de botijos no supere el número de cántaros en más de dos piezas. Si obtiene un beneficio de 6 euros por cada botijo y de 4 euros por cada cántaro, ¿cuántas piezas de cada tipo deberá elaborar cada día para obtener un beneficio máximo?, ¿cual será este beneficio? Representa gráficamente la región factible y calcula sus vértices.

JUNIO 2010

1.- Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2x\\ 0 & 1 & x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & -y & 0\\ 0 & 1 & y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}1 & z & z\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ $D=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -6\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Calcula los valores de x, y, z para los que se verifica $2A - 4B + 3C = D^{-1}$.

2.- Una empresa de transportes tiene que trasladar bloques de granito desde una cantera a un aserradero de piedra. Para eso dispone de un máximo de 8 camiones de tipo *A* y un máximo de 12 camiones de tipo B. Cada camión de tipo A necesita un operario y puede transportar 24 toneladas de granito con un gasto de 150 euros, mientras que cada camión de tipo B necesita dos operarios y puede transportar 12 toneladas de granito con un gasto de 300 euros. Se sabe que se necesitarán un mínimo de 15 operarios, que se transportarán un mínimo de 108 toneladas de granito y que el número de camiones de tipo A utilizados no será superior al número de camiones de tipo B.

(a) Formula el sistema de inecuaciones asociado al problema. Representa la región factible y calcula sus vértices. (b) Calcula todas las posibilidades que tiene la empresa de distribuir los camiones para minimizar el gasto

SEPTIEMBRE 2010

1.- Dada la ecuación matricial $A\cdot X + A^t = X + B$, siendo A^t la matriz traspuesta de A,

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

(a) Despejar la matriz X. Calcular la matriz inversa de $(A-I_2)$, siendo I_2 la matriz identidad de orden 2.

(b) Resolver la ecuación matricial.

2.- Una pequeña empresa desea contratar trabajadores de dos categorías laborales: **I** y **II**. Pretende que el número total de trabajadores contratados no sea inferior a 9 ni superior a 12 y, además, el número de trabajadores de la categoría **I** no podrá ser inferior al doble de trabajadores de la categoría **II**. El coste laboral de un trabajador de la categoría **I** está estimado en 1400 euros al mes y el de uno de la categoría **II** en 1100 euros al mes.

(a) Formula el sistema de inecuaciones asociado al enunciado. Representa gráficamente la región factible y calcula sus vértices.

(b) Calcula el número de trabajadores de cada categoría laboral que la empresa debe contratar para minimizar los costes laborales mensuales.

JUNIO 2011

1.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula la inversa de la matriz $(A^2 + I)$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

2.- Una asesoría laboral tiene en su cartera de clientes tanto a empresas como a particulares. Para el próximo año quiere conseguir como clientes al menos a 5 empresas y a un número de particulares que, como mínimo, debe de superar en 4 al doble del número de empresas. Además, el número total de clientes anuales no debe superar los 40 clientes. Espera que cada empresa le produzca 800 euros de ingresos anuales y cada particular 600 euros anuales.

(a) Expresa las restricciones del problema. Representa gráficamente la región factible y calcula sus vértices. (b) ¿Qué solución le proporcionaría los mayores ingresos anuales? ¿A cuánto ascenderían dichos ingresos?

Newton
(1642-1727)

Euler
(1707-1783)

Cauchy
(1789-187)

BLOQUE II :

ANÁLISIS

TEMA 0: LAS FUNCIONES

0.1.-CONCEPTO DE FUNCIÓN

Una función es una aplicación de un subconjunto $\mathbb{D}$ de los números reales en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. Es decir, una regla o criterio por el cual a cada número del conjunto $\mathbb{D}$ se le asigna otro número (que se llama su **imagen**)

Ejemplo 1

"A cada número real le hacemos corresponder su triple". Esta regla es la siguiente función:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{D}=\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ 5 & \to & 15 \\ -8 & \to & -24 \\ \pi & \to & 3\pi \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Ejemplo 2

La regla: "A cada número positivo le hacemos corresponder su cuadrado aumentado en una unidad" establece la siguiente función:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{D}=(0,\infty) & \to & \mathbb{R} \\ 6 & \to & 37 \\ 13 & \to & 170 \\ 1/2 & \to & 5/4 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Las funciones se simbolizan con letras. Lo más usual es usar las letras f , g , h . El conjunto $\mathbb{D}$ se llama **dominio** de la función.

Por **f(a)** se simboliza el número que en la función **f** se le hace corresponder al número **a** , es decir, la imagen del número **a** mediante la función **f** .

Para que una función **f** quede perfectamente determinada, es decir perfectamente identificada tendremos que saber de ella:

a) Su dominio, es decir, los números sobre los que actúa
b) La forma en que actúa, es decir, la regla o criterio que utiliza para conocer la imagen de cada número del dominio. Esto se consigue mediante una (o varias) fórmula que expresa cuanto vale la imagen de un número cualquiera **x** del dominio , es decir , que exprese el valor de f(x)

De acuerdo con esto , las funciones las expresaremos como en los siguientes

Ejemplos :

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad / \quad f(x)=2x$

$g: [0\,,\,5] \to \mathbb{R} \quad / \quad g(x)=\dfrac{1}{x+1}$

$h: (0,\,\infty) \to \mathbb{R} \quad / \quad h(x)=\begin{cases} 2x & \text{si} \quad x<5 \\ x+2 & \text{si} \quad x\geq 5 \end{cases}$

EJERCICIOS

0.1.-¿Qué reglas establecen las funciones del ejemplo anterior?

A veces , de una función solo nos dan la fórmula sin especificar cual es su dominio. En estos casos se entiende que el dominio está formado por todos los números para los que es posible hallar la imagen mediante la fórmula dada.

Ejemplos

Si nos dan la función $f(x)=\sqrt{x-2}$ hay que entender que su dominio serán todos los números x para los que es posible hallar $\sqrt{x-2}$. Por lo tanto $\mathbb{D}$ = [2 , ∞)

Si nos dan $g(x)=\dfrac{6}{x-2}$ hay que entender que su dominio serán todos los números x para los que existe el cociente $\dfrac{6}{x-2}$. Por lo tanto $\mathbb{D} = \mathbb{R} - \{2\} = (-\infty,2)\cup(2,\infty)$

EJERCICIOS

0.2.-Hallar el dominio de definición de las siguientes funciones

a) $f(x)=x^3+x^2+x+1$ b) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$ c) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ d) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-3}{x-1}}$ e) $f(x)=\mathrm{Log}(2x-6)$

0.2.-LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Para cada número del dominio de una función podemos dibujar un punto en el plano , tomando como abscisa dicho número y como ordenada su imagen. Todos los puntos así dibujados, uno por cada número del dominio, constituyen una linea que se llama gráfica de la función.

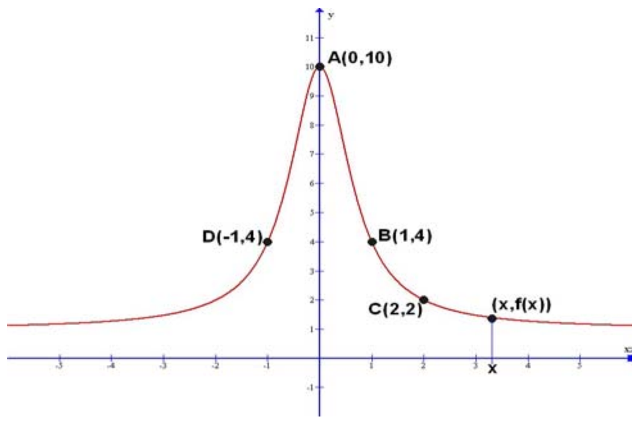
Así, si **f: D** → **R** entonces Gráfica de f={ puntos (x,y) del plano tales que x∈ **D** e y=f(x)}

Ejemplo

Si f:R→R / $f(x)=\dfrac{2x^2+10}{2x^2+1}$

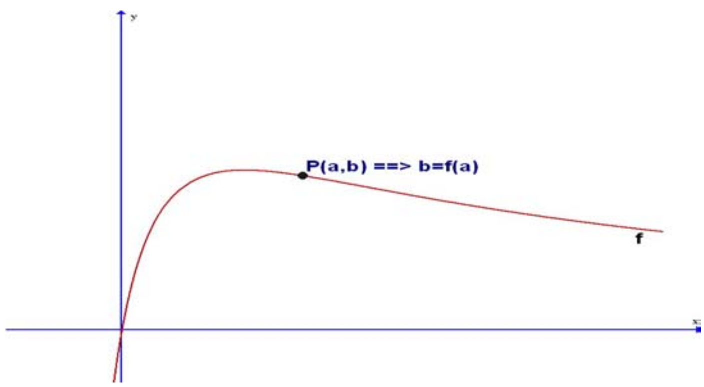
x	f(x)
0	10
1	4
2	2
-1	4
. . .	. . .

Puntos del plano
A(0,10)
B(1,4)
C(2,2)
D(-1,4)
. . .



En el gráfico siguiente se ilustra el concepto de gráfica de una función :

"Un punto pertenece a la gráfica de f si y solo si su ordenada es la imagen de su abscisa"

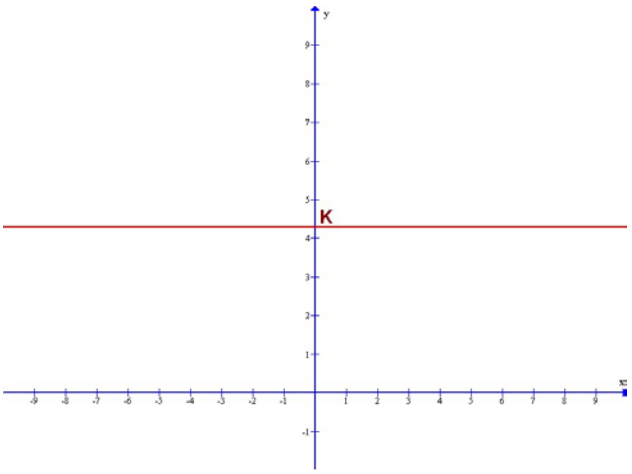


0.3.-FUNCIONES ELEMENTALES

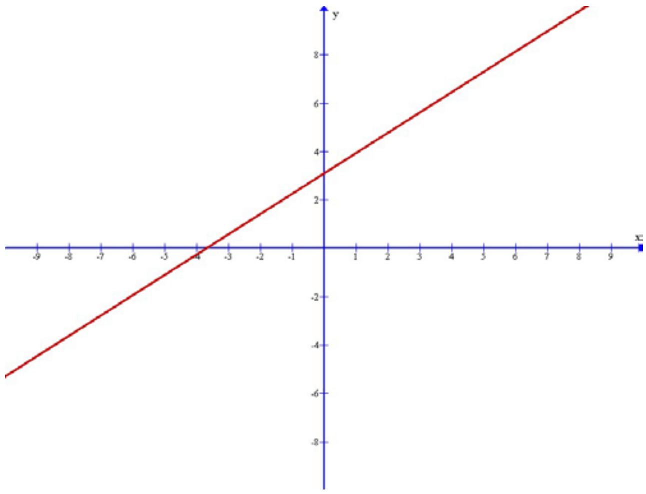
A continuación relacionamos las funciones elementales , dando el nombre, la fórmula y la gráfica de cada una de ellas:

FUNCIONES POLINÓMICAS:

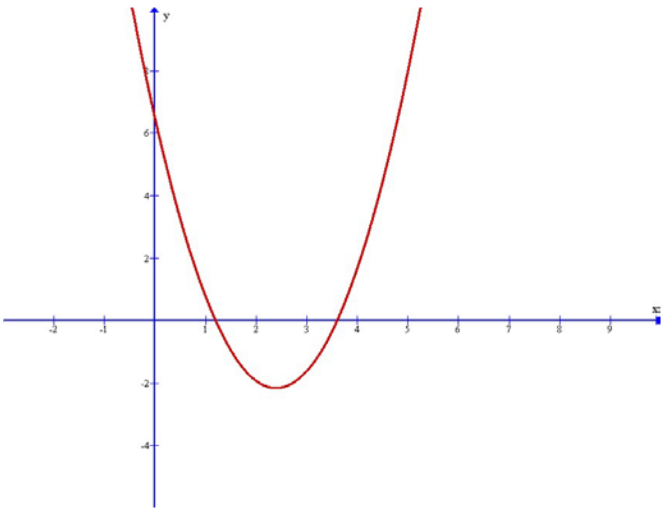
Función constante
f(x)=k

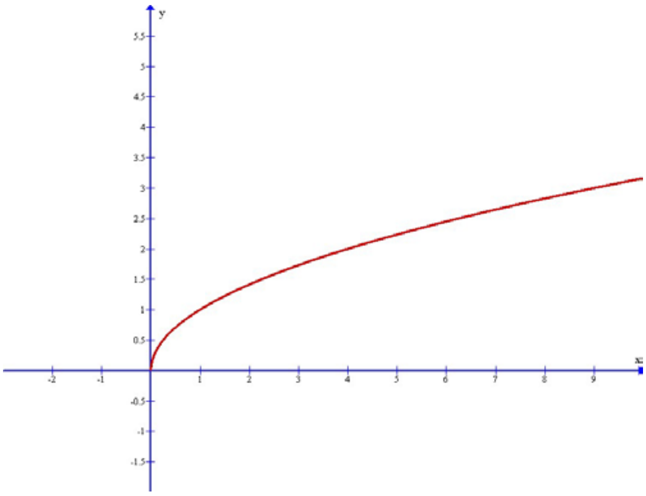
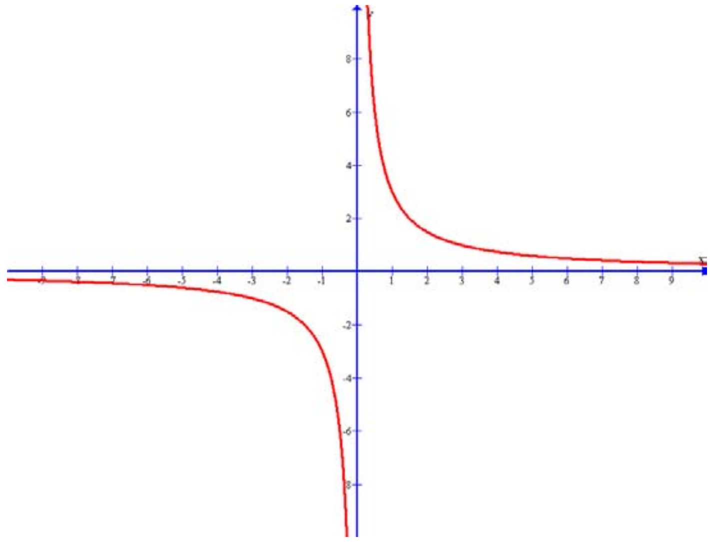
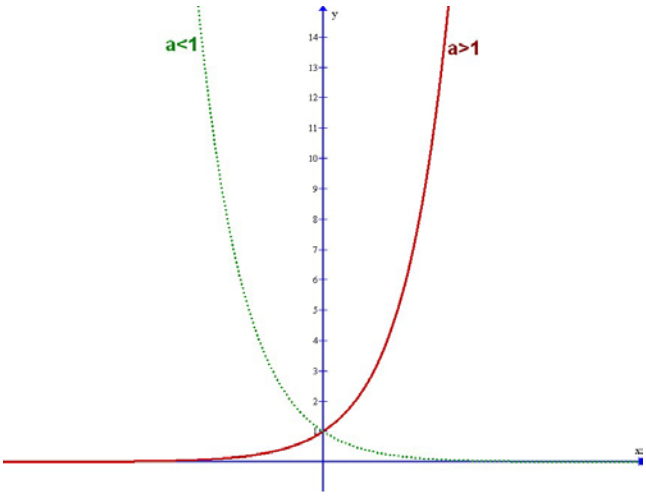
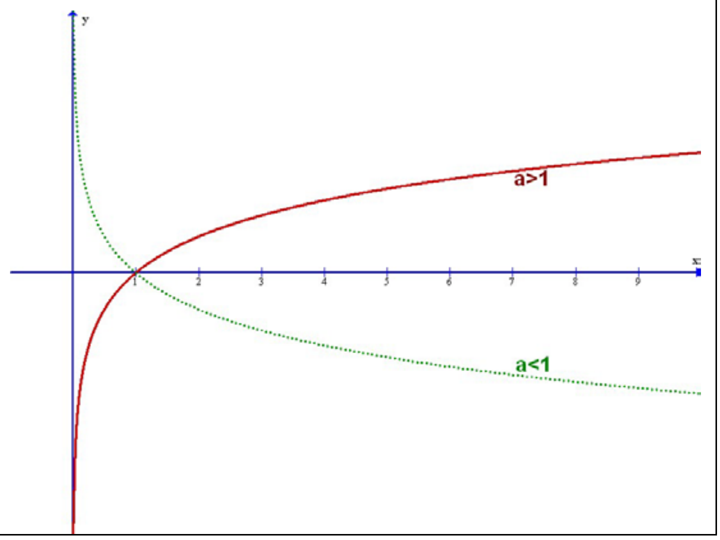


Función lineal
f(x)=mx+n **RECTA**



Función cuadrática
$f(x)=ax^2 + bx + c$ **PARÁBOLA**



Función raiz cuadrada $f(x) = \sqrt{x}$	**Función proporcionalidad inversa** $f(x)=k/x$ **HIPÉRBOLA**
	
Función exponencial $f(x) = a^x$	**Función Logarítmica** $f(x) = Log_a x$
	

0.4.-RECTAS, PARÁBOLAS E HIPÉRBOLAS

A) RECTAS

La recta es la gráfica de la función lineal . La ecuación de una recta es **y=mx+n**

m: es la pendiente de la recta (lo que aumenta o disminuye la y cuando x aumenta 1 unidad)

n: es la ordenada en el origen (el punto en que corta al eje OY

¿Cómo se calcula la pendiente de una recta?

-Si nos dan la ecuación: es el coeficiente de la **x** (con la **y** despejada)

Ejemplo

Recta $r \equiv 4x - 2y = 6 \Rightarrow y = \mathbf{2}x - 3 \Rightarrow$ pendiente m=2

-Si conocemos dos puntos: la pendiente se halla como el cociente entre la diferencia de las ordenadas y la diferencia de las

Ejemplo

Si la recta pasa por A(1,3) y B(7,21) la pendiente es $\mathbf{m}=\frac{\mathbf{21-3}}{\mathbf{7-1}}=\frac{\mathbf{18}}{\mathbf{6}}=\mathbf{3}$

¿Cómo se halla la ecuación de una recta?

- Si conocemos la pendiente y un punto

Ejemplo

Recta que pasa por A(-2,5) con pendiente m=4:

La ecuación de la recta será $r\equiv y=mx+n$

$m=4 \Rightarrow y=4x+n$

$A(-2,5) \in r \Rightarrow 5=4(-2)+n \Rightarrow n=13 \Rightarrow r\equiv y=4x+13$

-Si conocemos dos puntos

Ejemplo

Recta que pasa por C(3,1) y D(7,9)

La ecuación de la recta será $r\equiv y=mx+n$

$C(3,1)\in r \Rightarrow 1=3m+n$

$D(7,9)\in r \Rightarrow 9=7m+n \Rightarrow 8=4m \Rightarrow m=2 \Rightarrow n=-5 \Rightarrow r\equiv y=2x-5$

¿Cómo se dibuja una recta?

Se dibujan dos puntos y luego se unen. Los puntos más cómodos son el punto de corte con el eje OX (y=0) y el de corte con OY (x=0)

B) PARÁBOLAS

La parábola es la gráfica de la función cuadrática

¿Cómo se dibuja una parábola?

Calcularemos:

- El punto de corte con OY (x=0)
- Los puntos de corte con el eje OX . Son las soluciones de la ecuación y=0 , es decir, las soluciones de la ecuación $\mathbf{ax^2+bx+c=0}$. Como sbemos pueden ser:
  - Dos soluciones: La parábola corta a OX en dos puntos
  - Una solución: La parábola corta (es tangente) a OX en un solo punto
  - Sin solución: La parábola no corta a OX (está por encima o por debajo)
- El vértice $V(x_V , y_V)$ (punto más bajo o más alto) de la parábola

  $x_V = -b/2a$

  $y_V = f(x_V)$
- Algún punto más (si fuera necesario)

Tendremos e cuenta:

- Si el coeficiente a>0 la prábola es convexa ($\cup$) y si a<0 es cóncava ($\cap$)
- La parábola es simétrica respecto a su eje (recta vertical que pasa por el vértice)

C) HIPÉRBOLAS

La hipérbola es la gráfica de la función de proporcionalidad inversa f(x)=k/x.

También tienen como gráfica una hipérbola las funciones cuya fórmula es un cociente de dos polinomios de grado 1 , es decir, las funciones $\mathbf{f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}}$

¿Cómo dibujamos una hipérbola?

Determinamos las asíntotas :

Vertical: x=-d/c

Horizontal : y=a/c

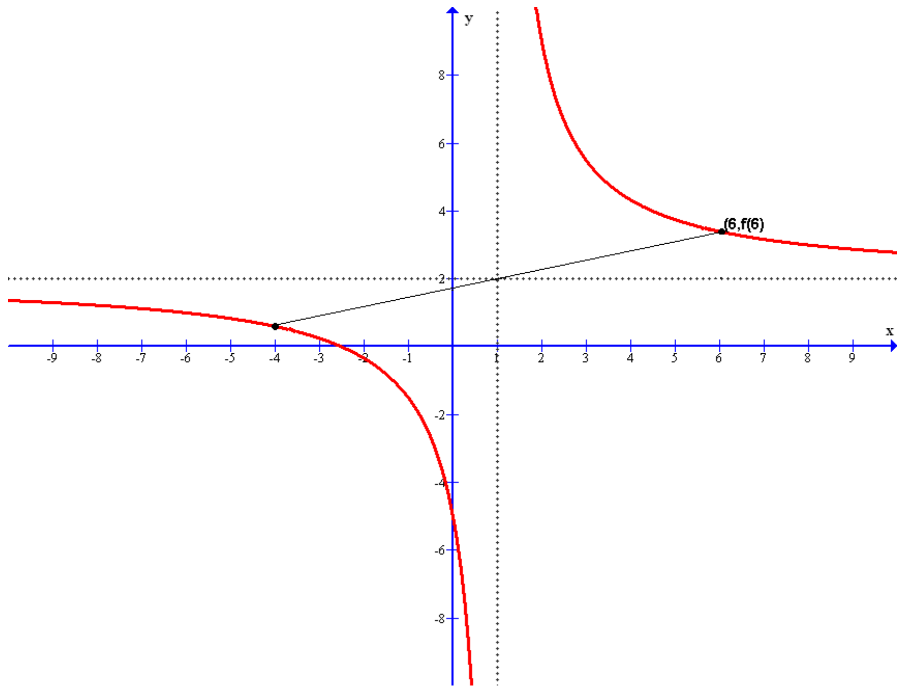
Calculamos los puntos de corte con los ejes OY (f(0) y OX (f(x)=0)

Situamos las dos ramas de la hipérbola respecto a las asíntotas dibujando algún punto.

La Hipérbola es simétrica respecto del punto de corte de las dos asíntotas

Ejemplo

$$\mathbf{f(x) = \frac{2x+5}{x-1}}$$



EJERCICIOS

0.3.-Dibujar la gráfica de las siguientes funciones:

a) f:[0,∞) → R / f(x)=3x-2 b) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ c) $f : [0,4] \to R \ / \ f(x) = 4x - x^2$

d) $f(x) = \dfrac{4-x}{x+1}$ e) $f(x) = x^2 - 6x + 9$ f) $f(x) = x^2 - 4x + 5$

0.4.- Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si} \quad x < 4 \\ 2x - 4 & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$$

a)Dibujar su gráfica

b) Hallar f(-1) , f(0), f(2), f(3.5), f(4), $f(\sqrt{20})$

c) ¿Qué números tienen por imagen 5.61

d) ¿Qué números tienen imagen negativa?

0.5.- Dada la función $f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{si} \quad x \le -1 \\ 3 & \text{si} \quad -1 < x < 2 \\ (x-1)(5-x) & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$

a)Dibuja su gráfica

b) Hallar f(-2) , f(2), f(6)

c) ¿Qué números tienen por imagen 1.75?¿Y por imagen 3?

d) ¿Qué número tiene la mayor imagen
d) ¿Qué números tienen imagen positiva?

0.6.-Dada la función $f(x)=\begin{cases} -x^2-2x & \text{si} \quad x\le 0 \\ \dfrac{x}{x-4} & \text{si} \quad 0<x<2 \\ \dfrac{1}{4}x^2+2x-4 & \text{si} \quad x\ge 2 \end{cases}$

a)Dibuja su gráfica
b) Hallar f(-3), f(0), f(2), f(6)
c)¿Qué números tienen imagen igual a 0
d)¿Qué números tienen imagen mayor que ¾?

TEMA 1: LÍMITES

1.1.-LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

El símbolo $\mathbf{x \to c^+}$ se lee " **x** tiende a **c** por la derecha" y significa que **x** es un número que se va acercando al número **c** pero siendo mayor que él.

Ejemplo

Si **x**= 3 , 2´1 , 2´01 , 2´001 , 2´0001 ,…….. entonces $\mathbf{x \to 2^+}$

El símbolo $\mathbf{x \to c^-}$ se lee " **x** tiende a **c** por la izquierda " y significa que **x** es un número que se va acercando al número **c** pero siendo menor que él.

Ejemplo

Si **x**= 5 , 5´9 , 5´99 , 5´999 , 5´9999 ,…….. entonces $\mathbf{x \to 6^-}$

El símbolo $\mathbf{x \to c}$ se lee " **x** tiende a **c** " y significa que **x** es un número que se va acercando al número **c** pudiendo ser mayor o menor que él.

Ejemplo

Si **x**= 3 , 4´1 , 3´99 , 4´001 , 3´9999 ,…….. entonces $\mathbf{x \to 4}$

Diremos que el límite por la derecha de una función **f** en un punto **c** es un número **A** si a medida que **x** se acerca a **c** por la derecha sus imágenes se van acercando al número **A** y se acercan tanto como se quiera. Lo expresaremos de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = A$$

Análogamente, diremos que el límite por la izquierda de una función **f** en un punto **c** es un número **B** si a medida que **x** se acerca a **c** por la izquierda sus imágenes se van acercando al número **B** y se acercan tanto como se quiera. Lo expresaremos de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = B$$

Diremos que el límite de una función **f** en un punto **c** es un número **L** si a medida que **x** se acerca a **c** sus imágenes se van acercando al número **L** y se acercan tanto como se quiera. Lo expresaremos de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

En este caso tanto que la **x** se acerque a **c** por la derecha como por la izquierda las imágenes se acercan al número **L.** Por lo tanto:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

es decir , para hablar de límite tiene que haber límite por la derecha, límite por la izquierda y ser iguales.

1.2.-LÍMITE INFINITO

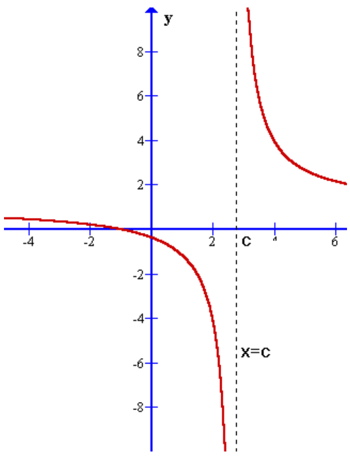
A veces sucede que cuando $\mathbf{x \to c}$ (ó cuando $\mathbf{x \to c^-}$ ó $\mathbf{x \to c^+}$) las imágenes no se van acercando a ningún número sino que cada vez se hacen más grandes y tan grandes como se quiera. En esta caso no hay límite aunque sí un comportamiento especial de las imágenes que se expresa diciendo que la función tiene límite más infinito (ó tiende a más infinito) . Se simboliza de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$$

Si las imágenes en vez de hacerse tan grandes como se quiera , se hacen tan pequeñas como se quiera diremos que la función tiene límite menos infinito y lo simbolizaremos por:

$$\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$$

Si en un punto **c** la función tiene límite más o menos infinito entonces la recta **x=c** es una *asíntota vertical* de la función cuya gráfica se comporta como se muestra en la siguiente figura



Ejemplo

Sea la función $f(x) = \dfrac{4}{x-1}$

Veamos como se comportan las imágenes cuando x tiende a 1:

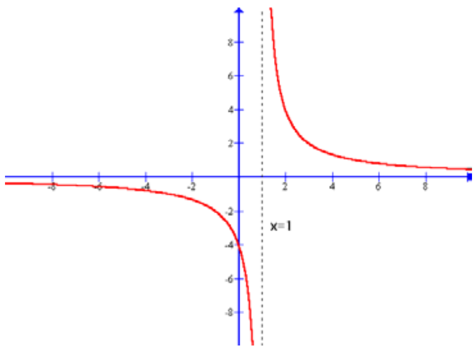
x=	2	1.1	1.01	1.001	1.0001	1.00001	$x \to 1^+$
f(x)=	4	40	400	4000	40000	400000	$f(x) \to +\infty$

Por tanto $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

x=	0	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999	$x \to 1^-$
f(x)=	-4	-40	-400	-4000	-40000	-400000	$f(x) \to -\infty$

Por tanto $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$

La recta **x=1** es una asíntota vertical de la función cuya gráfica se comporta de la siguiente manera:



1.3.-LÍMITE EN EL INFINITO

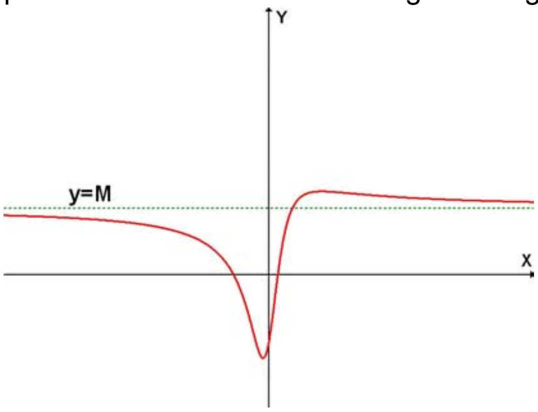
A veces sucede que cuando la x se hace tan grande como se quiera , es decir cuando $x \to +\infty$, entonces las imágenes se van acercando a un número **M** tanto como se quiera. En este caso escribiremos

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = M$$

Lo mismo puede ocurrir cuando x se hace tan pequeña como se quiera en cuyo caso escribiremos

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = M$$

A estos límites los denominamos límites en el infinito. Cuando una función tiene un límite en el infinito igual a un número **M** en tonces la recta **y=M** se dice que es una asíntota horizontal de la función cuya gráfica se comporta como se muestra en la siguiente figura



Ejemplo

Sea la función $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$

Veamos como se comportan las imágenes cuando x tiende a infinito:

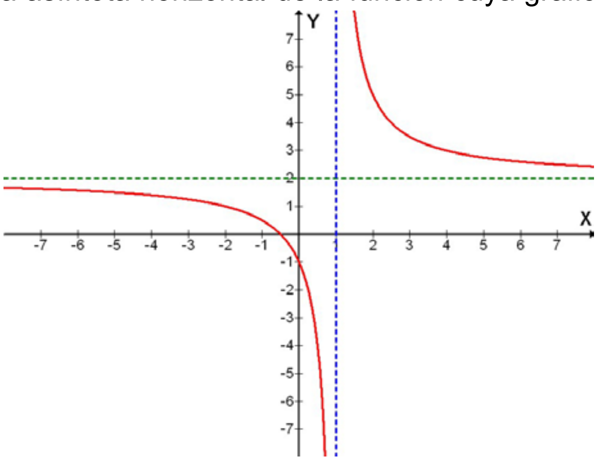
x=	11	101	1001	10001	100001	$x \to +\infty$
f(x)=	2.3	2.03	2.003	2.0003	2.00003	$f(x) \to 2$

Por tanto $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$

x=	-9	-99	-999	-9999	-99999	$x \to -\infty$
f(x)=	1.7	1.97	1.997	1.9997	1.99997	$f(x) \to 2$

Por tanto $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$

La recta **y=2** es una asíntota horizontal de la función cuya gráfica se comporta del modo indicado en la siguiente figura:



1.4.-CÁLCULO DE LÍMITES

1.4.1.- Cuando $x \to c$

A) La función tiene la misma fórmula antes y después de c

Como norma general se ha de sustituir la x por c.

Ejemplos

$$\lim_{x\to 2}(x^3-3x+6)=8$$

$$\lim_{x\to 4}(\sqrt{x}-\text{Log}25x)=\sqrt{4}-\text{Log}100=0$$

Caso especial de funciones racionales:

i) $\displaystyle \lim_{x\to -5}\frac{4x^2+10}{2x+8}=\frac{110}{-2}=-55$

ii) $\displaystyle \lim_{x\to 4}\frac{3x-12}{x^3+1}=\frac{0}{65}=0$

iii) $\displaystyle \lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x+2}=\frac{3}{4}$

Al aplicar la norma general obtenemos 0/0 que no es un número. Por lo tanto la norma general no es aplicable en este caso. Pero como numerador y denominador se anulan para x=2, se pueden dividir ambos por x-2

iv) $\displaystyle \lim_{x\to 3^+}\frac{x^2+1}{x-3}=\frac{10}{0}=+\infty$

Al aplicar la norma general obtenemos 10/0 que no es un número. Pero esto indica que el numerador se va acercando a 10 y el denominador a 0. Por tanto el cociente se hace ∞ . Y como numerador y denominador toman valores positivos el límite será $+\infty$

B) La función cambia de fórmula en c

En estos casos hay que hallar los límites laterales en el punto **c**

Ejemplo:

Sea $f(x)=\begin{cases} x^2-3x & \text{si } x<2 \\ \dfrac{4x}{x-6} & \text{si } x>2 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{4x}{x-6}=\frac{8}{-4}=-2 \\ \displaystyle\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x^2-3x)=-2 \end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 2}f(x)=-2$$

(si los límites laterales fueran diferentes entonces la respuesta sería que no hay límite)

1.4.2.- Cuando $x\to\pm\infty$

A) Funciones polinómicas

El límite de una función polinómica cuando $x\to\pm\infty$ es igual al límite del término de mayor grado:

Ejemplos

$$\lim_{x\to+\infty}(-5x^3+x^2-7x+6)=\lim_{x\to+\infty}(-5x^3)=(-5)(+\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(7x^3+8x-9)=\lim_{x\to-\infty}(7x^3)=7(-\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(-x^5+x^3-9x^2)=\lim_{x\to-\infty}(-x^5)=-(-\infty)=+\infty$$

B) Otras funciones elementales

Se deduce de la gráfica de la función

Ejemplos

$$\lim_{x\to+\infty}\text{Ln}x=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}5^x=0$$

C) Funciones racionales

Se sustituyen numerador y denominador por sus términos principales, con lo que pueden darse tres casos como en los siguientes:

Ejemplos

i) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{6x^2-4x+9}{3x^2-7}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{6x^2}{3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{6}{3}=\lim_{x\to+\infty}2=2$ (grado Num = grado Denom)

ii) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{5x^3-x^2+1}{x^2-7x}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{5x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}5x=5(-\infty)=-\infty$ (grado Num > grado Denom)

iii) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{3x+4}{2x^2+x-1}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{2x^2}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{3}{2x}=\dfrac{3}{2(+\infty)}=0$ (grado Num < grado Denom)

EJERCICIOS

1.1.-Calcular

1.- $\lim_{x\to4}(\sqrt{3x+4}-2^{x-1})$ **2.-** $\lim_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2+8}$ **3.-** $\lim_{x\to2}\dfrac{7x+1}{3x-8}$ **4.-** $\lim_{x\to3}\dfrac{2x-6}{x^2+4}$

5.- $\lim_{x\to1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-x}$ **6.-** $\lim_{x\to-3}\dfrac{x^2+4x+3}{5x+15}$ **7.-** $\lim_{x\to5}\dfrac{x^2-x-1}{x^2-4x-5}$

8.- $\lim_{x\to1}f(x)$ siendo $f(x)=\begin{cases}2^x & \text{si } x<1\\ \dfrac{4x+3}{2x} & \text{si } x>1\end{cases}$ **9.-** $\lim_{x\to+\infty}(5x^2-8x+6)$

10.- $\lim_{x\to-\infty}(-4x^4-x^2+18)$ **11.-** $\lim_{x\to+\infty}(0.4)^{x^4}$ **12.-** $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-4x+2}{5x^3-6}$

13.- $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{5x^4-x^2+22}{-3x^2-6x}$ **14.-** $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^3-x+1}{7x^2-x-11}$

TEMA 2: CONTINUIDAD

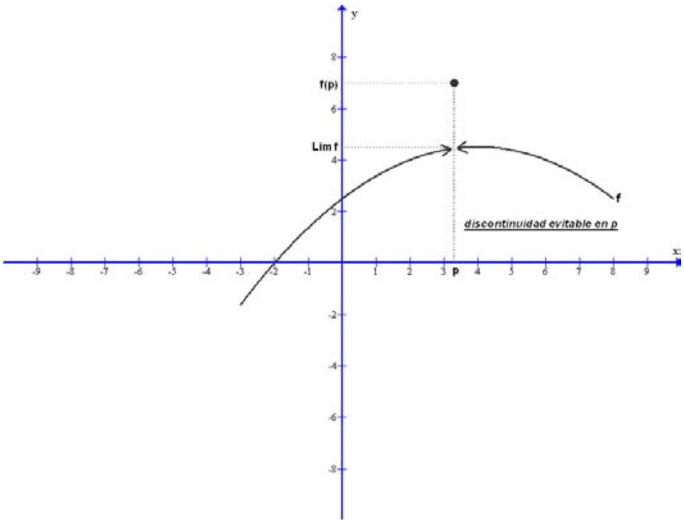
2.1.-CONTINUIDAD EN UN PUNTO

Una función **f** es continua en un punto **p** si en ese punto el límite de la función es igual al valor de la función, es decir si:

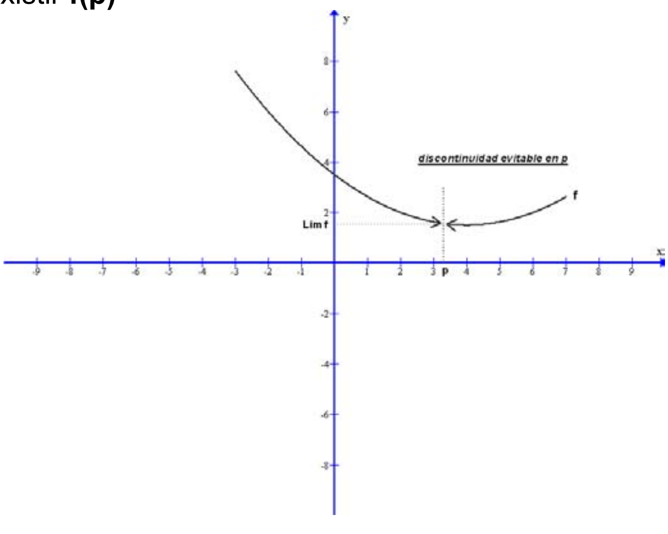
$$\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$$

Si una función no es continua en un punto se dice que es discontinua en dicho punto. Ello sucederá si la anterior igualdad no es cierta, lo que puede ocurrir por motivos como los siguientes:

A) Por ser $\lim_{x \to p} f(x) \neq f(p)$

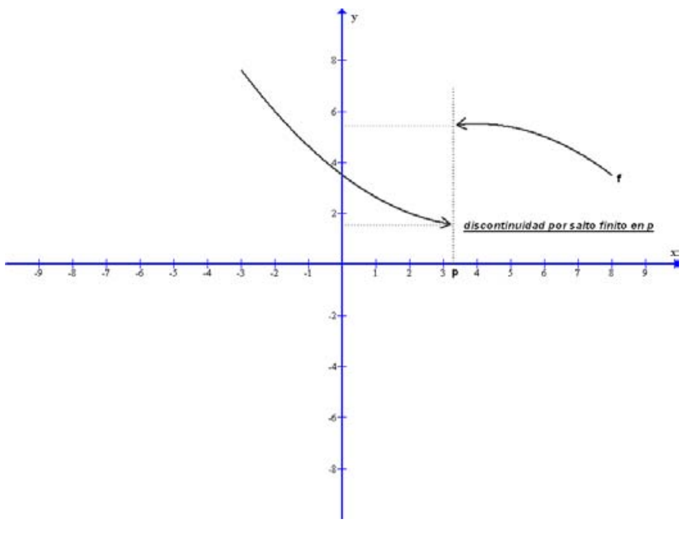


B) Por no existir **f(p)**

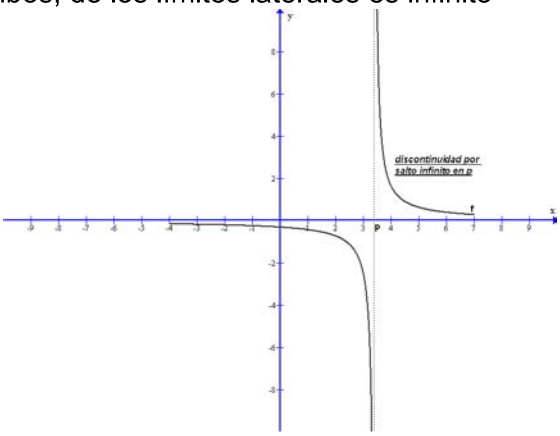


C) Por no existir $\lim_{x \to p} f(x)$ por:

C1) No coincidir los límites laterales

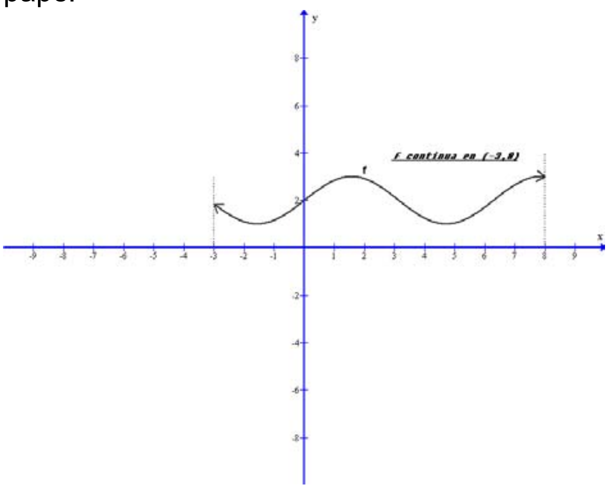


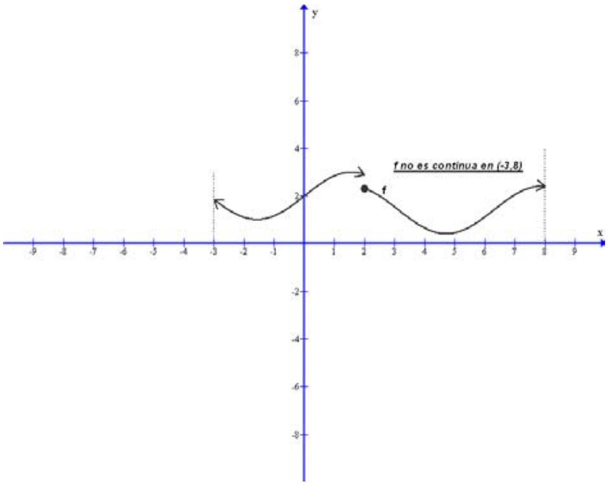
C2) Uno , o ambos, de los límites laterales es infinito



2.2.-CONTINUIDAD EN UN INTERVALO

Una función es continua en un intervalo si es continua en cada punto del intervalo. Gráficamente significa que para trazar la gráfica de la función en ese intervalo no es necesario levantar el lápiz del papel





2.3.-CONTINUIDAD DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES

Si observamos las gráficas de las funciones elementales y teniendo presente lo dicho anteriormente concluimos que:

A) Las funciones polinómicas son continuas en todo **R**
B) La función raiz cuadrada es continua en su dominio $[0,\infty)$
C) Las funciones exponenciales son continuas en todo **R**
D) Las funciones logarítmicas son continuas en su dominio $(0, \infty)$
E) La función de proporcionalidad inversa, y en general toda las funciones racionales, son continuas excepto en los puntos en que se anula el denominador (en los que tienen una discontinuidad de salto infinito)

2.4.-CONTINUIDAD DE FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

Para estudiar la continuidad de estas funciones podemos utilizar dos procedimientos:

1.-Gràficamente: Dibujamos la gráfica y observamos su continuidad

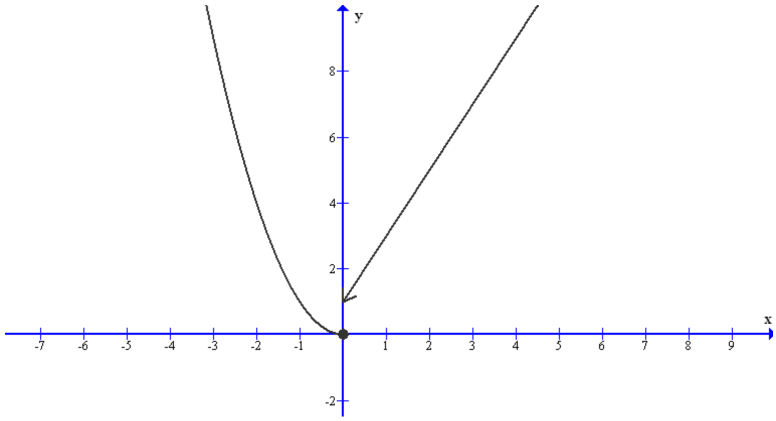
2.-Analíticamente:

A) Estudiaremos la continuidad de cada función en el trozo en que está definida
B) Estudiaremos la continuidad en los puntos en que la función cambia de fórmula. Para que en estos puntos sea continua han de coincidir el límite por la izquierda, el límite por la derecha y el valor de la función en el punto considerado

Ejemplo

Estudiar la continuidad de la función $\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{x^2} & \mathbf{si} \quad \mathbf{x \le 0} \\ \mathbf{2x+1} & \mathbf{si} \quad \mathbf{x > 0} \end{cases}$

1.-Gráficamente: Dibujamos su gráfica que es la siguiente:



Observamos que es continua en (-∞,0) y en (0,∞). E el punto x=0 presenta una discontinuidad de salto finito

2.- Analíticamente:

A) En (-∞,0) es continua por ser cuadrática

En (0,∞) es continua por ser lineal

B) En el punto x=0

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x^2 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (2x+1) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \text{no existe } \lim\limits_{x\to 0} f(x) \Rightarrow f \text{ discontinua en } x = 0$$

EJERCICIOS

2.1.-Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

2.1.1.- $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si} & x<0 \\ 3 & \text{si} & x=0 \\ 2^x & \text{si} & 0<x<1 \\ 2 & \text{si} & x \ge 2 \end{cases}$ **2.1.2.-** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+4}{x+2} & \text{si} & x<0 \\ \dfrac{2+x}{1+x^2} & \text{si} & x>0 \end{cases}$

2.1.3.- $f(x) = \begin{cases} -x^2-2x & \text{si} & x \le 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} & 0<x<1 \\ x^2-2x+2 & \text{si} & x>1 \end{cases}$

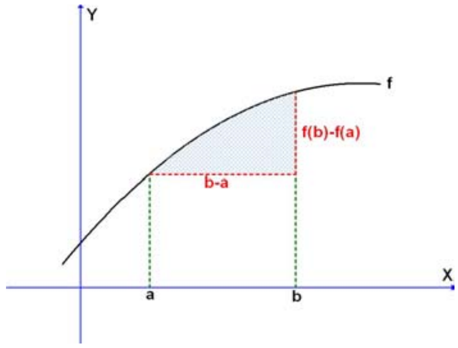
2.2.-Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2+2x & \text{si} & x<0 \\ x & \text{si} & 0 \le x < 2 \\ 2x+kx^2 & \text{si} & x \ge 2 \end{cases}$ representarla y estudiar su continuidad sabiendo que es continua en el punto x=2

TEMA 3: LA DERIVADA

3.1.-TASA DE VARIACIÓN MEDIA

Se llama tasa de variación media de una función **f** en un intervalo [a,b] al cociente entre la diferencia de valores de la función en los extremos del intervalo y la diferencia entre éstos, es decir:

$$TVM_{[a,b]} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



Por ejemplo: Si $f(x) = x^2 + 2x$ tendremos que $TVM_{[1,5]} = \frac{f(5)-f(1)}{5-1} = \frac{35-3}{4} = 8$ que significa que en el intervalo [1,5] la función , por término medio, aumenta 8 unidades por cada unidad que aumente la **x**

3.2.-DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Consideremos la función $f(x) = x^2 + 2x$ y observemos la siguiente tabla:

x=	2	1.1	1.01	1.001	$\to 1$
$TVM_{[1,x]}$	5	4.1	4.01	4.001	$\to 4$

Así pues cuando $x \to 1$ la $TVM_{[1,x]} = \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \to 4$, es decir que $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 4$

En general , se puede hallar el límite de la TVM en un intervalo [a,x] cuando $x \to a$ (es decir, cuando el intervalo [a,x] tiende a confundirse con el punto **a**) .Si este límite existe a su valor se le llama <u>derivada de **f** en el punto **a**</u> , se simboliza por **f´(a)** y diremos que **f** es derivable en el punto **a**.
Recordemos este concepto fundamental de las matemáticas:

Derivada de f en el punto a = f´(a) = $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$

Ejemplo

Calculemos la derivada de la función f(x)= x^2-3x en el punto 2:

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x^2-3x)-(2^2-3\cdot 2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-1)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x-1) = 1$$

3.3.-DERIVADAS LATERALES EN UN PUNTO

Si en la definición de la derivada en vez de límite consideramos límite lateral obtenemos el concepto de derivada lateral (por la izquierda y por la derecha):

Derivada por la derecha de **f** en el punto **a** $= f'_+(a) = \lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Derivada por la izquierda de **f** en el punto **a** $= f'_-(a) = \lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Si en un punto las derivadas laterales existen y son iguales entonces hay derivada en ese punto y su valor es el de las laterales. Si alguna derivada lateral no existe , o si existiendo no coinciden, entonces la función no es derivable en ese punto.

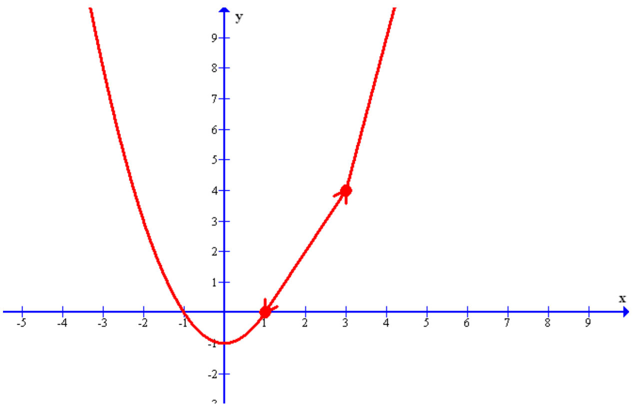
$$\boxed{\mathbf{f'(a) = k \quad \Leftrightarrow \quad f'_+(a) = f'_-(a) = k}}$$

¿Cuándo es necesario hallar las derivadas laterales? Cuando queremos hallar la derivada en un punto en el que la función cambia de fórmula.

Ejemplo

Sea $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ 2x-2 & \text{si} \quad 1 < x < 3 \\ 5x-11 & \text{si} \quad 3 \le x \end{cases}$

Que tiene la siguiente gráfica



Derivada en el punto 4: Puesto que en x=4 la función no cambia de fórmula:

$$f'(4) = \lim_{x\to 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{5x-11-9}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{5(x-4)}{x-4} = \lim_{x\to 4} 5 = 5$$

Derivada en el punto 1: Puesto que la función en x=1 cambia de fórmula tenemos que hallar las derivadas laterales:

$$\left.\begin{array}{l} f'_+(1) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x-2-0}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} 2 = 2 \\ f'_-(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} (x+1) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(1) = 2$$

Derivada en el punto 3: Puesto que la función en x=3 cambia de fórmula tenemos que hallar las derivadas laterales:

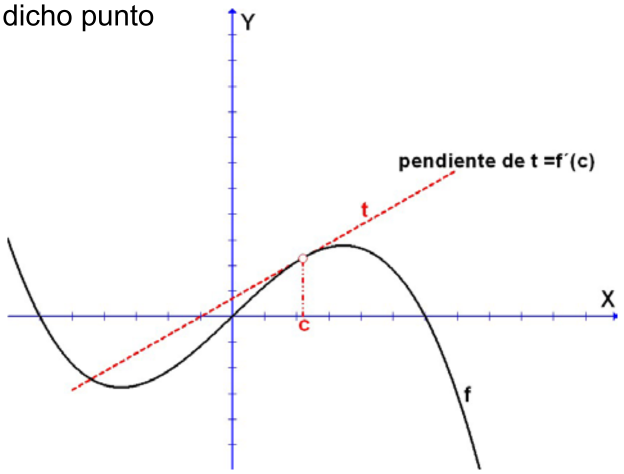
$$\left.\begin{array}{l} f'_+(3) = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{5x-11-4}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{5(x-3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^+} 5 = 5 \\ f'_-(3) = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{2x-2-4}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{2(x-3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^-} 2 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{no existe } f'(3)$$

NOTA: *Para que una función sea derivable en un punto ha de ser continua en dicho punto, es decir, si no es continua no puede ser derivable*.

3.4.-SIGNIFICADO DE LA DERIVADA

3.4.1.-Significado geométrico

La derivada de una función en un punto **c** es igual a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto



Teniendo en cuenta lo anterior ¿Cómo calcularemos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función **f** en el punto de abscisa x=**c** ?.

La ecuación de la recta es $t \equiv y=mx+n$. Tendremos que se cumplirá:

a) m= f´(c)
b) El punto de tangencia P(c,f(c))$\in$ recta t $\Rightarrow$ f(c)=m·c+n

Con lo que resulta un sistema que al resolver nos da el valor de **m** y de **n**

3.4.2.-Significado algebraico

Para variaciones pequeñas de la variable la derivada mide , aproximadamente, la relación entre la variación de la función y la variación de la variable. Efectivamente:

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x \to c} \frac{\text{variación de la función}}{\text{variación de la variable}} \Rightarrow \qquad f'(c) \cong \frac{\text{variación de la función}}{\text{variación de la variable}}$$

(si la variación de la variable es pequeña)

Por esta razón , a veces, nos referimos a la derivada como la “razón de cambio” , “tasa de variación” , “ritmo de crecimiento”, etc.

Ejemplo

Sea la función f(x)=4/x . Tenemos que:

a) Derivada en el punto 1

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{4}{x}-4}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{-4(x-1)}{x(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{-4}{x} = -4$$

b) Recta tangente en el punto 1

$t \equiv y=mx+n$

m=f´(1)=-4

El punto (1,f(1)) =(1,4) $\in$ t $\Rightarrow$ 4=m·1+n $\Rightarrow$ n=4-m=8

En consecuencia es $t \equiv y=-4x+8$

c) ¿Cuál será el valor aproximado de f(1.013) ?

Al pasar de 1 a 1.013 la variación de la variable es 0.013 y tendremos:

$$f'(1) = -4 \cong \frac{\text{variación de la función}}{\text{variación de la variable}} = \frac{f(1.013) - f(1)}{0.013}$$
$$\Downarrow$$
$$f(1.013) - f(1) \cong -4 \cdot 0.013 = -0.052$$
$$\Downarrow$$
$$f(1.013) \cong f(1) - 0.052 = 4 - 0.052 = 3.948$$

3.4.-LA FUNCIÓN DERIVADA

Consideremos una función **f** . Se llama función derivada de f , y se simboliza por **f´** , a la función que asigna a cada número el valor de la derivada de f en dicho número.

Ejemplo

Sea $f(x)= x^2$

f: R $\longrightarrow$	R	**f´** : R $\longrightarrow$	R
0	0	0	$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$
1	1	1	f´(1)=.................= 2
2	4	2	f´(2)=.................= 4
2.5	6.25	2.5	f´(2.5)=.............= 5
.		.	
.		.	
x	$\mathbf{x^2}$	**x**	**f´(x)=2x**

Por lo tanto la función derivada de $f(x)=x^2$ es $f'(x)=2x$

¿Qué ventaja tiene conocer la función derivada ? Que al conocer la función derivada podemos hallar la derivada en cualquier punto sin necesidad de utilizar límites. Así en la función de nuestro ejemplo : $f'(1/5)=2/5$, $f'(\pi)=2\pi$, ..

¿Cómo hallamos la función derivada? Utilizando la lista de derivadas y las reglas de derivación que damos a continuación:

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES

	Función **f(x)=**	Derivada **f´(x)=**
E1	k	0
E2	x	1
E3	x^n	nx^{n-1}
E4	$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$
E5	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
E6	$\text{Log}_a x$	$\frac{1}{x\,\text{Ln}a}$

E7	$\text{Ln}\,x$	$\frac{1}{x}$
E8	a^x	$a^x \cdot \text{Lna}$
E9	e^x	e^x
E10	$\text{sen}\,x$	$\cos x$
E11	$\cos x$	$-\,\text{senx}$
E12	$\text{tg}\,x$	$\sec^2 x$
E13	$\cot x$	$-\text{cosec}^2 x$
E14	arcsenx	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
E15	arccosx	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
E16	arctgx	$\frac{1}{1+x^2}$
E17	$\text{arccot}\,x$	$\frac{-1}{1+x^2}$

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES COMPUESTAS

C1	$[f(x)]^n$	$n[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$
C2	$\frac{1}{f(x)}$	$\frac{-1}{[f(x)]^2} \cdot f'(x)$
C3	$\sqrt{f(x)}$	$\frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$
C4	$\text{Log}_a f(x)$	$\frac{1}{[f(x)]\text{Lna}} \cdot f'(x)$
C5	$\text{Ln}\,f(x)$	$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$
C6	$a^{f(x)}$	$a^{f(x)} \cdot \text{Lna} \cdot f'(x)$
C7	$e^{f(x)}$	$e^{f(x)} \cdot f'(x)$
C8	$\text{sen}\,f(x)$	$\cos f(x) \cdot f'(x)$
C9	$\cos f(x)$	$-\,\text{senf}(x) \cdot f'(x)$
C10	$\text{tg}\,f(x)$	$\sec^2 f(x) \cdot f'(x)$
C11	$\cot f(x)$	$-\text{cosec}^2 f(x) \cdot f'(x)$
C12	$\text{arcsenf}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} \cdot f'(x)$
C13	$\arccos f(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} \cdot f'(x)$
C14	$\text{arctgf}(x)$	$\frac{1}{1+[f(x)]^2} \cdot f'(x)$

C15	$\operatorname{arccot} f(x)$	$\dfrac{-1}{1+[f(x)]^2}\cdot f'(x)$

DERIVADAS DE LAS OPERACIONES CON FUNCIONES

R1	$k\cdot f(x)$	$k\cdot f'(x)$
R2	$f(x)\pm g(x)$	$f'(x)\pm g'(x)$
R3	$f(x)\cdot g(x)$	$f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
R4	$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

Ejemplo

Derivar $F(x)=\left[Ln\sqrt{5x}\right]^4$

$$F'(x)=4\left[Ln\sqrt{5x}\right]^3\cdot(Ln\sqrt{5x})' \quad (\text{reglaC1}) \quad = \quad 4\left[Ln\sqrt{5x}\right]^3\cdot\frac{1}{\sqrt{5x}}\cdot(\sqrt{5x})' \quad (\text{reglaC5}) \quad =$$

$$=4\left[Ln\sqrt{5x}\right]^3\cdot\frac{1}{\sqrt{5x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{5x}}\cdot(5x)' \quad (\text{reglaC3}) \quad =4\left[Ln\sqrt{5x}\right]^3\cdot\frac{1}{\sqrt{5x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{5x}}\cdot 5 \quad (\text{reglas R1 y E2})$$

3.5.-DERIVADAS SUCESIVAS

La función derivada de **f´** se simboliza por **f´´** y se llama función derivada segunda de f . La función derivada de **f´´** se simboliza por **f´´´** y se llama función derivada tercera de f. La función derivada de **f´´´** se simboliza por **$f^{(4)}$** y se llama función derivada cuarta de f y así análogamente podemos considerar derivadas sucesivas de una función.

Ejemplo

Sea la función f(x)=Lnx

$$f'(x)=\frac{1}{x}=x^{-1} \quad \Rightarrow f''(x)=-x^{-2} \quad \Rightarrow f'''(x)=2x^{-3} \quad \Rightarrow f^{(4)}(x)=-6x^{-4} \quad \Rightarrow f^{(5)}(x)=24x^{-5}\,.......$$

EJERCICIOS

3.1.-Hallar la derivada de las siguientes funciones:

3.1.1.- $f(x)\dfrac{2x^3}{(3x-5)^2}$ **3.1.2.-** $f(x)=e^{4x}\sqrt{2x-1}$ **3.1.3.-** $f(x)=Ln^3(2x-1)$ **3.1.4.-** $f(x)=\sqrt{\dfrac{3x-2}{6x+4}}$

3.1.5.- $f(x)=Ln\sqrt{\dfrac{2x}{x^2-1}}$ **3.1.6.-** $f(x)=\left(\dfrac{e^x}{x+1}\right)^3$ **3.1.7.-** $f(x)=\dfrac{(3-2x)^2}{e^x}$ **3.1.8.-** $f(x)=\dfrac{x^3}{2x-\sqrt{2x}}$

3.2.-Hallar la derivada de las siguientes funciones en los puntos indicados:

3.2.1.- $f(x)=Ln\sqrt{x^2+8x}$ en $x=1$ **3.2.2.-** $f(x)=\dfrac{Ln(x+1)}{e^{2x}}$ en $x=0$ **3.2.3.-** $f(x)=\left(Log_2\dfrac{1}{x}\right)^4$ en $x=2$

3.2.4.- $f(x)=\sqrt{e^{2+Lnx}}$ en $x=1$ **3.2.5.-** $f(x)=\sqrt{2x-\sqrt{\dfrac{1}{x}}}$ en $x=1$ **3.2.6.-** $f(x)=\left(e^x-e^{-x}\right)^3$ en $x=0$

3.3.-Estudia la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones:

3.3.1.- $f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\le 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x>0 \end{cases}$

3.3.2.- $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x\le 1 \\ 2x-2 & \text{si } x>1 \end{cases}$

3.3.3.- $f(x)=\begin{cases} e^{2x-4} & \text{si } x\le 2 \\ 4-x^2 & \text{si } x>2 \end{cases}$

3.3.4.- $f(x)=\begin{cases} \text{Ln}x & \text{si } x\le 1 \\ -2+3x-x^2 & \text{si } 1<x<3 \\ -2 & \text{si } x\ge 3 \end{cases}$

3.4.-Dada la función $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{8}x^2+\dfrac{7}{4}x & \text{si } x<2 \\ \dfrac{ax^2+b}{2x} & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$

a) Hallar a y b para que sea derivable en todo R
b) Halla la función derivada

3.5.-La recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{8x}{cx+d}$ en el punto de abscisa x=1 tiene por ecuación y=2x+2 ¿Cuánto valen c y d?

3.6.-La función $f(x)=\begin{cases} mx+4 & \text{si } x\le -2 \\ n-\dfrac{1}{2}x^2 & \text{si } -2<x<2 \\ mx-4 & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$ es continua

a) Halla los valores de m y n
b) Para dichos valores estudia la derivabilidad de la función
c) Representa la función
d) Halla la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa -1

3.7.- Dada la función $f(x)=9x^3-\text{Ln}(1-x)$ ¿Existe algún punto en que se anule su tercera derivada?

3.8.-Si $f(x)=x^4+px^3+qx^2+rx-2$ y $f(1)=0,\ f'(1)=4,\ f''(0)=2$ ¿Cuánto valen p, q , r?

3.9.- De todas las rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{e^{x+1}}{x^2+2x+c}$ solo una es horizontal ¿Cuánto vale c?

3.10.-Determina los puntos de la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ en los que la recta tangente resulta paralela a la recta r≡4y-3x+1=0

3.11.-Las conclusiones de un estudio establecen que el número de individuos de una determinada población será dentro de t años de $P(t)=\dfrac{15000t+10000}{2t+2}$

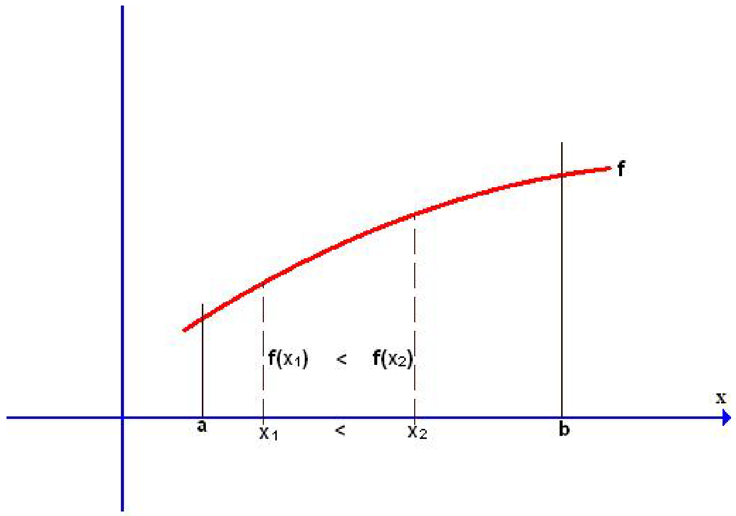
a)¿Cuál es el tamaño actual de la población?
a)¿Cuál será la tasa de variación durante los próximos 5 años?
b)¿Cuál será el ritmo de variación dentro de 6 años?

TEMA 4: APLICACIONES DE LA DERIVADA

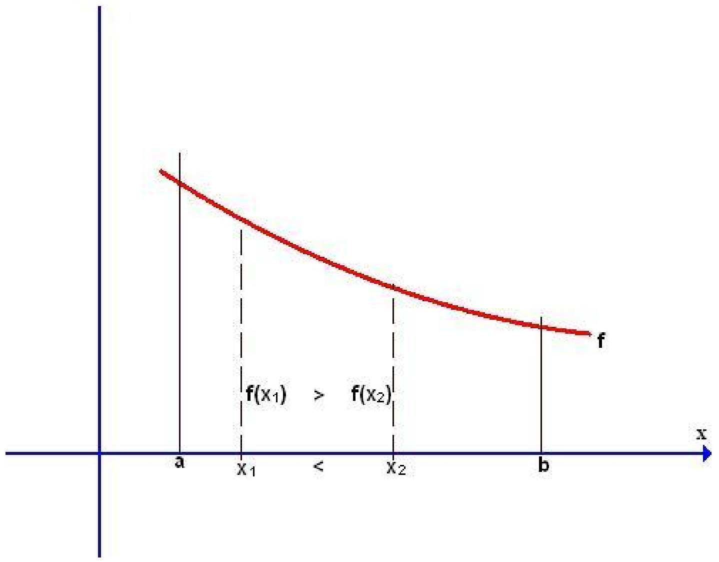
4.1.-CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN

4.1.1.-Definición

Se dice que una función **f** es **creciente** en un intervalo (a,b) si al aumentar el valor de x en ese intervalo también aumenta el valor f(x) de la imagen.
Gráficamente se reconoce que una función es creciente en un intervalo si en él la gráfica de la función "va subiendo" tal y como se refleja en el siguiente gráfico



Se dice que una función **f** es **decreciente** en un intervalo (a,b) si al aumentar el valor de x en ese intervalo disminuye el valor f(x) de la imagen.
Gráficamente se reconoce que una función es decreciente en un intervalo si en él la gráfica de la función "va bajando" tal y como se refleja en el siguiente gráfico



4.1.2.-Aplicación de la derivada a la determinación de los intervalos de crecimiento y de decrecimiento

El siguiente criterio nos permite determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de una función:

Si **f´** toma valores **positivos** en el intervalo (a,b) entonces **f** es **creciente** en ese intervalo

Si **f´** toma valores **negativos** en el intervalo (a,b) entonces **f** es **decreciente** en ese intervalo

En consecuencia para determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de una función f hallaremos su derivada f´ y resolveremos las inecuaciones

f´(x)>0 $\longrightarrow$ intervalos de crecimiento
f´(x)<0 $\longrightarrow$ intervalos de decrecimiento

Ejemplo

Calcular los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x+2}$

Calculamos $f'(x)=\dfrac{2(x-1)(x+2)-(x-1)^2\cdot 1}{(x+2)^2}=\dfrac{x^2+4x+5}{(x+2)^2}$

Resolvemos $\dfrac{x^2+4x+5}{(x+2)^2}>0 \quad (<0)$. Para ello

a)Calculamos : Puntos que anulan el numerador: $x^2+4x+5=0 \Rightarrow x=-5$, $x=1$
Puntos que anulan el denominador: $(x+2)^2=0 \Rightarrow x=-2$

b)Marcamos los anteriores puntos en el eje OX y comprobamos el signo de f´ en cada uno de los intervalos que se forman

		-5		-2		1	
f´(x)	+	0	-		-	0	+
f	CR		DC		DC		CR

Así pues : f es creciente en $(-\infty, -5)$ y en $(1, \infty)$
f es decreciente en $(-5,-2)$ y en $(-2,1)$

EJERCICIOS

4.1.- Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las siguientes funciones:

4.1.1.- $f(x)=x^4-8x^2$ **4.1.2.-** $f(x)=\dfrac{x}{x^2-16}$ **4.1.3.-** $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+2}$ **4.1.4.-** $f(x)=xe^x$

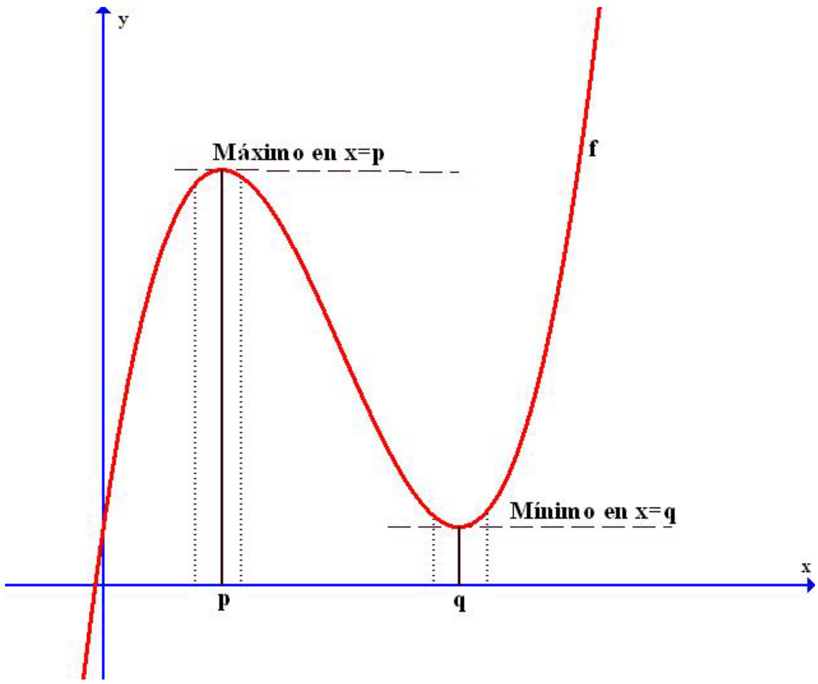
4.2.-EXTREMOS DE UNA FUNCIÓN

4.2.1.-Definición

Se dice que la función f tiene en x=p un **máximo relativo** si la imagen de p es **mayor** que las imágenes de los puntos próximos a p.

Se dice que la función f tiene en x=q un **mínimo relativo** si la imagen de q es **menor** que las imágenes de los puntos próximos a q.

Gráficamente se reconoce que una función tiene un máximo relativo cuando en la gráfica hay un punto que está “más alto” que los de su alrededor . Cuando hay un punto “más bajo” que los de su alrededor estamos ante un mínimo relativo tal y como se muestra en la siguiente figura:



A los máximos y mínimos relativos se les llama **extremos de la función**. Como podemos observar en la figura anterior los extremos son puntos en los que cambia el sentido del crecimiento de la función :

- En un máximo la función pasa de ser creciente a ser decreciente
- En un mínimo la función pasa de ser decreciente a ser creciente

4.2.2.-Aplicación de las derivadas a la determinación de los extremos de una función

A) Condición necesaria

Para que la función f tenga un extremo en el punto x=a es necesario que f´(a)=0

Es decir, la función f solo puede tener extremos en los puntos en que se anula la 1ª derivada. Pero que pueda tenerlos no significa que los tenga. La confirmación de que efectivamente los tiene , y de que tipo, se realiza mediante una condición de suficiencia. A continuación damos dos condiciones de suficiencia

B) Condición suficiente

Sea **a** un punto que cumple la condición necesaria, es decir, que f´(a)=0. Para confirmar que f tiene en **a** un extremo emplearemos la siguiente condición

Si **f´´(a)>0** entonces f tiene en **a** un **mínimo relativo**

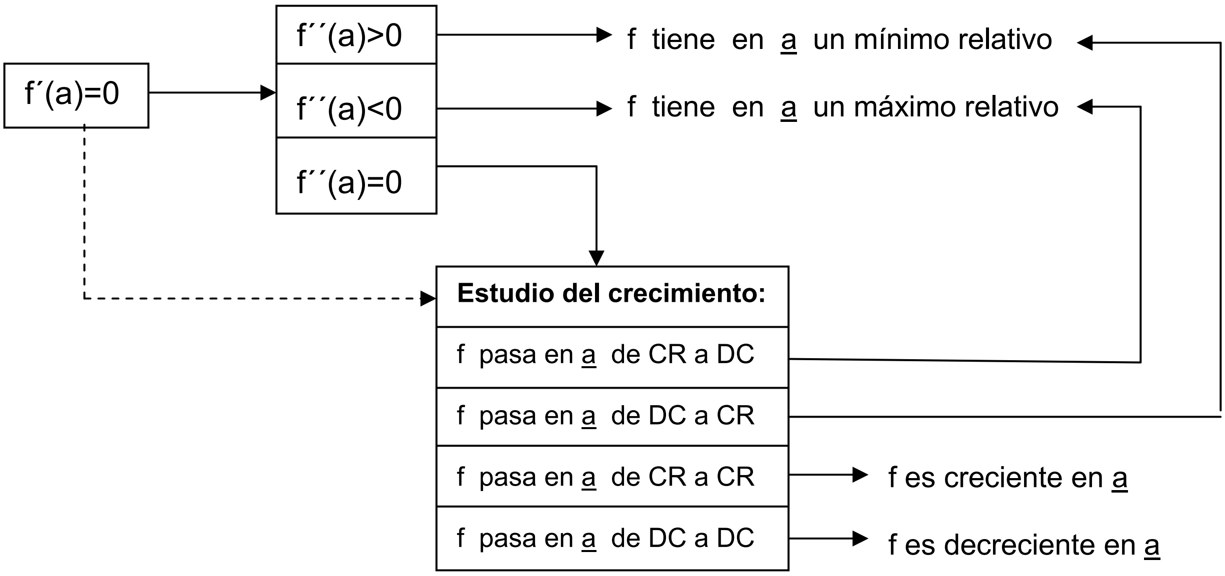
Si **f´´(a)<0** entonces f tiene en **a** un **máximo relativo**

Ó , si nos parece más cómoda, la siguiente:

Si f en el punto **a** pasa de ser creciente a ser decreciente f tiene en x=a un máximo relativo

Si f en el punto **a** pasa de ser decreciente a ser creciente f tiene en x=a un mínimo relativo

En el siguiente esquema representamos el proceso:



Ejemplo 1

Calcular los extremos de la función $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x+2}$

En el apartado anterior estudiamos el crecimiento de esta función. Obtuvimos el siguiente resultado:

		-5		-2		1	
f´(x)	+	0	-		-	0	+
f	CR		DC		DC		CR

Vemos que los puntos que cumplen la condición necesaria son el -5 y el 1
En -5 , f pasa de CR a DC. Luego f tiene en -5 un máximo cuyo valor es f(-5)=-12
En 1 , f pasa de DR a CR. Luego f tiene en 1 un mínimo cuyo valor es f(1)=0

Ejemplo 2

Calcular los extremos de la función $f(x)=2x+\dfrac{72-18x}{5-x}$

Determinamos los punto que cumplen la condición necesaria f´(x)=0

$$f'(x)=2+\frac{(-18)(5-x)-(72-18x)(-1)}{(5-x)^2}=2-\frac{18}{(5-x)^2}=\frac{2x^2-20x+32}{(5-x)^2}=0\Rightarrow\begin{cases}x=2\\x=8\end{cases}$$

Estudiamos en estos puntos la suficiencia mediante la 2ª derivada:

$$f''(x)=\frac{-36}{(5-x)^3}\Rightarrow\begin{cases}f''(2)=\dfrac{-36}{27}<0\Rightarrow f \text{ tiene en 2 un máximo cuyo valor es } f(2)=16\\ f''(8)=\dfrac{36}{27}>0\Rightarrow f \text{ tiene en 8 un mínimo cuyo valor es } f(8)=40\end{cases}$$

EJERCICIOS

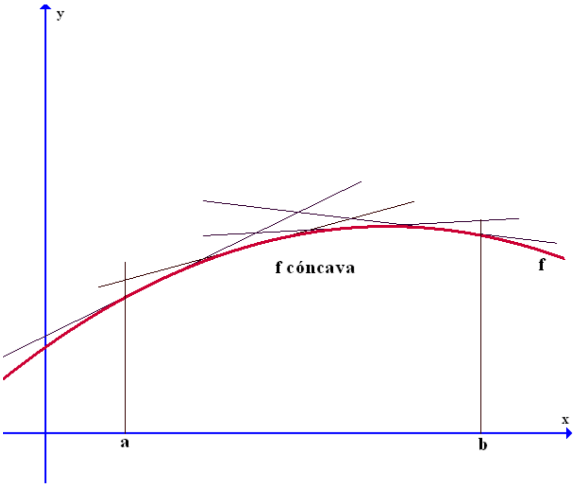
4.2.-Determinar los extremos de las funciones del ejercicio 4.1
4.3.-Determinar los extremos de las siguientes funciones:

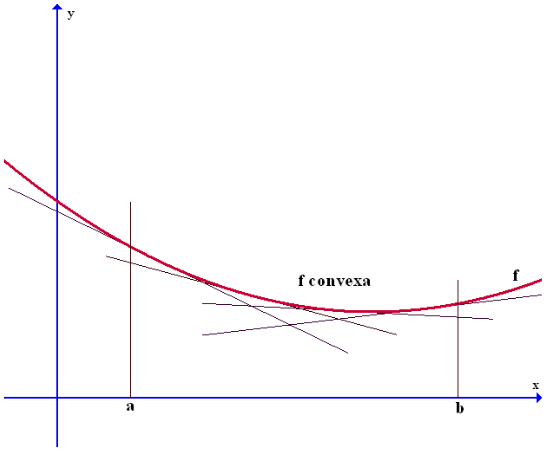
4.3.1.- $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2$ **4.3.2.-** $f(x)=\frac{(1-x)^3}{x}$ **4.3.3.-** $f(x)=\frac{x^2}{1-x^2}$ **4.3.4.-** $f(x)=x^2e^x$

4.3.-CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD DE UNA FUNCIÓN

4.3.1.-Definición

Se dice que una función **f** es **cóncava** en un intervalo (a,b) si la recta tangente queda por encima de la gráfica de la función en cualquier punto del intervalo. Si queda por debajo en cualquier punto del intervalo entonces se dice que **f** es **convexa** en el intervalo. La concavidad y la convexidad de una función se muestran en las siguientes figuras:





4.3.2.-Aplicación de la derivada a la determinación de los intervalos de concavidad y convexidad

El siguiente criterio nos permite determinar los intervalos de convexidad y concavidad de una función:

> Si **f´´** toma valores **positivos** en el intervalo (a,b) entonces **f** es **convexa** en ese intervalo
>
> Si **f´´** toma valores **negativos** en el intervalo (a,b) entonces **f** es **cóncava** en ese intervalo

En consecuencia para determinar los intervalos de convexidad y concavidad de una función f hallaremos su derivada f´´ y resolveremos las inecuaciones

f´´(x)>0 $\longrightarrow$ intervalos de convexidad

f´´(x)<0 $\longrightarrow$ intervalos de concavidad

Ejemplo

Estudiar la concavidad y convexidad de la función $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$

Calculamos $f'(x)=\dfrac{(1+x^2)-x(2x)}{(1+x^2)^2}=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\Rightarrow f''(x)=\dfrac{-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4}=\dfrac{2x^3-6x}{(1+x^2)^3}$

Resolvemos $\dfrac{2x^3-6x}{(1+x^2)^3}>0 \quad (<0)$. Para ello

a)Calculamos : Puntos que anulan el numerador: $2x^3-6x=0\Rightarrow x=0$, $x=\pm\sqrt{3}$

Puntos que anulan el denominador: $(1+x^2)^3=0\Rightarrow$ no hay

b)Marcamos los anteriores puntos en el eje OX y comprobamos el signo de f´´ en cada uno de los intervalos que se forman

	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},0)$	0	$(0,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},\infty)$
$f''(x)$	-	0	+		-	0	+
f	CC		CV		CC		CV

Así pues : f es cóncava en $(-\infty,-\sqrt{3})$ y en $(0,\sqrt{3})$

f es convexa en $(-\sqrt{3},0)$ y en $(\sqrt{3},\infty)$

EJERCICIOS

4.4.-Determinar los intervalos de concavidad y convexidad de las funciones del ejercicio 4.3

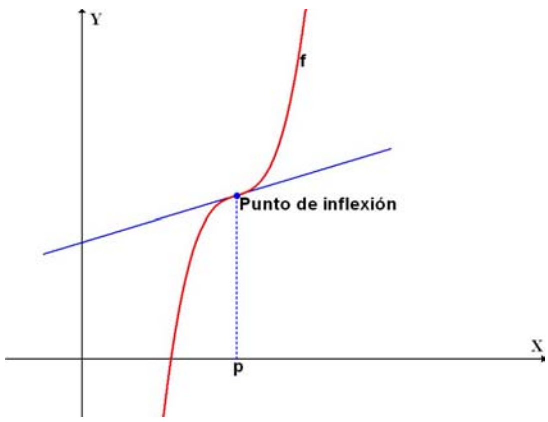
4.5.- Determinar los intervalos de concavidad y convexidad de las siguientes funciones:

4.5.1.- $f(x)=\frac{1}{x}+x^2$ **4.5.2.-** $f(x)=e^{-x^2}$ **4.5.3.-** $f(x)=x^4-x^3-3x^2$

4.4.-PUNTOS DE INFLEXIÓN

4.4.1.-Definición

Un punto de inflexión es un punto en que la recta tangente atraviesa la gráfica. Por tanto en los puntos de inflexión la función pasa de ser cóncava a convexa ó viceversa , tal y como se pone de manifiesto en la siguiente figura:



4.4.2.-Aplicación de las derivadas a la determinación de los puntos de inflexión de una función

A) Condición necesaria

Para que la función f tenga un punto de inflexión en el punto x=a es necesario que $f''(a)=0$

Es decir, la función f solo puede tener puntos de inflexión en los puntos en que se anula la 2ª derivada. Pero que pueda tenerlos no significa que los tenga. La confirmación de que efectivamente los tiene se realiza mediante una condición de suficiencia. A continuación damos dos condiciones de suficiencia

B) Condición suficiente

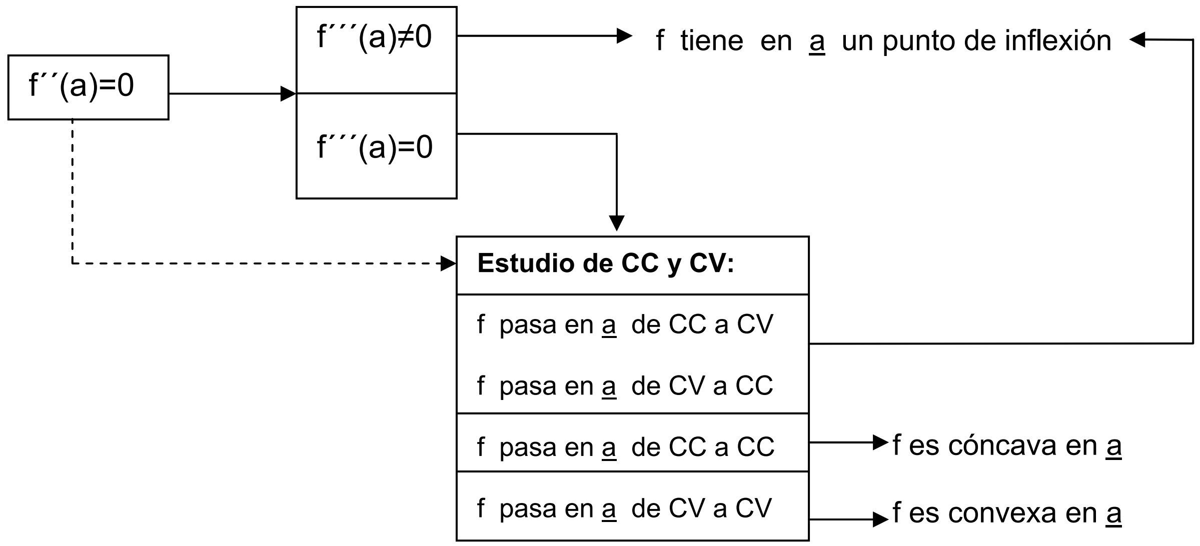
Sea **a** un punto que cumple la condición necesaria, es decir, que $f''(a)=0$. Para confirmar que f tiene en **a** un punto de inflexión emplearemos la siguiente condición

Si $\mathbf{f'''(a)\neq 0}$ entonces **f** tiene en **a** un **punto de inflexión**

Ó , si nos parece más cómoda, la siguiente:

Si **f** en el punto **a** pasa de ser cóncava a convexa, ó viceversa, tiene en x=a un punto de inflexión

En el siguiente esquema representamos el proceso:



Ejemplo 1

Determinar los puntos de inflexión de la función $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

En el apartado anterior hemos estudiado la concavidad y convexidad de esta función , obteniendo el resultado siguiente

		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
f´´(x)	-	0	+		-	0	+
f	CC		CV		CC		CV

Vemos que los puntos que cumplen la condición necesaria son el $-\sqrt{3}$, 0 y $\sqrt{3}$

En $-\sqrt{3}$, f pasa de CC a CV. Luego f tiene en x= $-\sqrt{3}$ un punto de inflexión
En 0 , f pasa de CV a CC. Luego f tiene en x=0 un punto de inflexión
En $\sqrt{3}$, f pasa de CC a CV. Luego f tiene en x= $\sqrt{3}$ un punto de inflexión

Ejemplo 2

Calcular los puntos de inflexión de la función $f(x) = x \cdot e^{-x}$

Determinamos los punto que cumplen la condición necesaria f´´(x)=0

$$f'(x) = e^{-x} + xe^{-x}(-1) = (1-x)e^{-x} \Rightarrow f''(x) = (-1)e^{-x} + (1-x)e^{-x}(-1) = (-2+x)e^{x} = 0 \Rightarrow -2+x = 0 \Rightarrow x = 2$$

Estudiamos en este punto la suficiencia mediante la 3ª derivada:

$$f'''(x) = e^{-x} + (-2+x)e^{-x}(-1) = (3-x)e^{-x} \Rightarrow f'''(2) = e^{-2} \neq 0 \Rightarrow \text{f tiene en } x = 2 \text{ un punto de inflexión}$$

4.6.-Determinar los puntos de inflexión de las funciones de los ejercicios 4.3 y 4.5
4.7.-Determinar los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

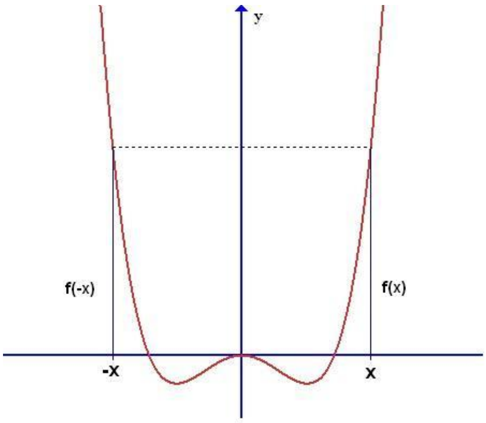
4.7.1.- $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 5$ **4.7.2.-** $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{x^2}$ **4.7.3.-** $f(x) = \dfrac{2 - x}{x^2 - 2x + 2}$

4.5.-ESTUDIO Y REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

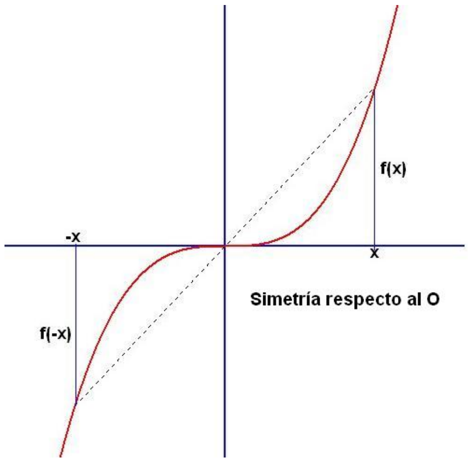
4.5.1.- Estudio de una función

A) Estudio de f(x)

A1) Dominio
A2) Puntos de corte con los ejes
A3) Simetrías: $f(-x)=f(x) \Rightarrow$ Simetría respecto al eje OY
$f(-x)=-f(x) \Rightarrow$ Simetría respecto al origen O



Simetría respecto OY



Simetría respecto al O

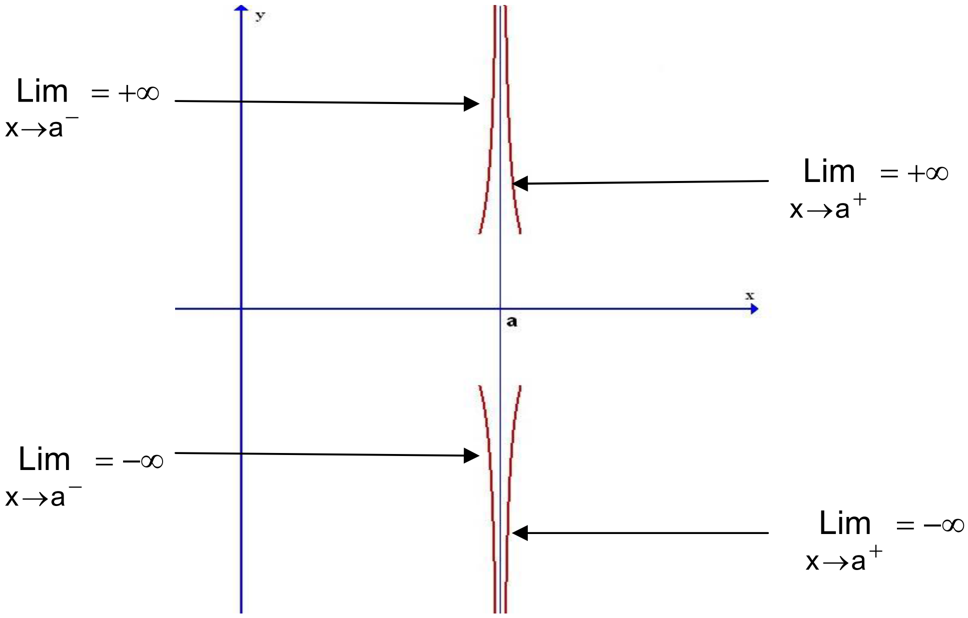
Observaciones:1) Para que la función sea simétrica ha de serlo el dominio respecto de 0. En consecuencia solo estudiaremos la existencia de simetrías en el caso de dominios también simétricos
2)Si una función resulta simétrica, basta con hacer su estudio para las $x \geq 0$. La parte correspondiente a las x<0 se obtiene por simetría

A4) Asíntotas: Son rectas tales que la gráfica, a partir de un determinado momento, se va acercando a ellas tanto como se quiera sin llegar a tocarlas.

i) Verticales :

a) Determinación :Si $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ entonces la recta **x=a** es una asíntota vertical de f.

c) **Posición** : Para averiguar la posición de la gráfica respecto de la asíntota calculamos los límites laterales en el punto a y así determinamos cuales de las siguientes posiciones se dan:



Observación: Las asíntotas verticales hay que buscarlas entre los puntos que quedan fuera del dominio de la función

ii) Horizontales :

a) Determinación :Si $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$ entonces la recta **y=b** es una asíntota horizontal de f.

b) Posición : Para averiguar la posición de la gráfica respecto de la asíntota hacia $+\infty$ comparamos los valores de la función y de la asíntota para un valor suficientemente alto de x (p. ej para x=100) :

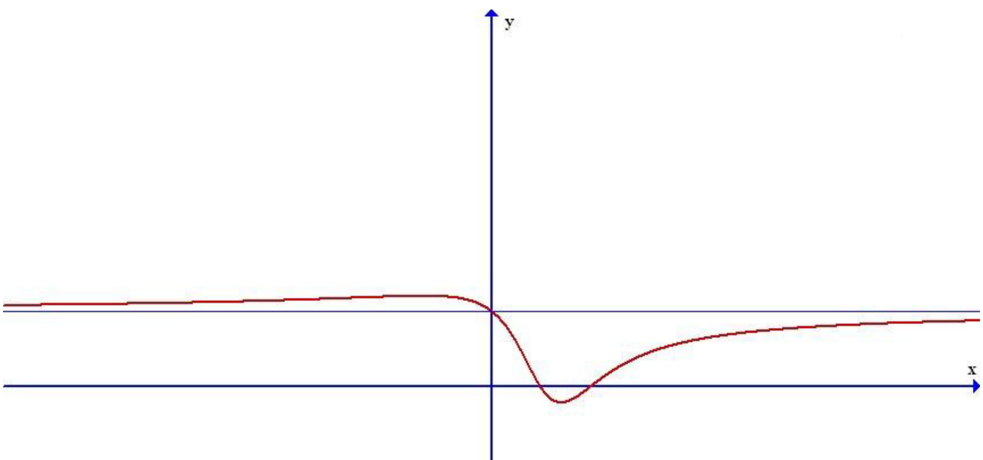
Si f(100)>b la gráfica se acerca por encima de la asíntota

Si f(100)<b la gráfica se acerca por debajo de la asíntota

Lo mismo para ver la posición hacia $-\infty$

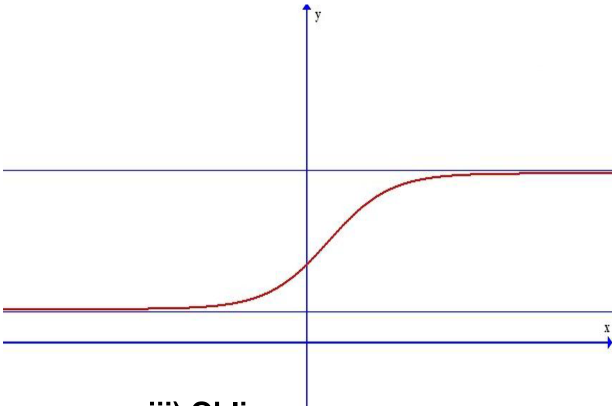
Observaciones:

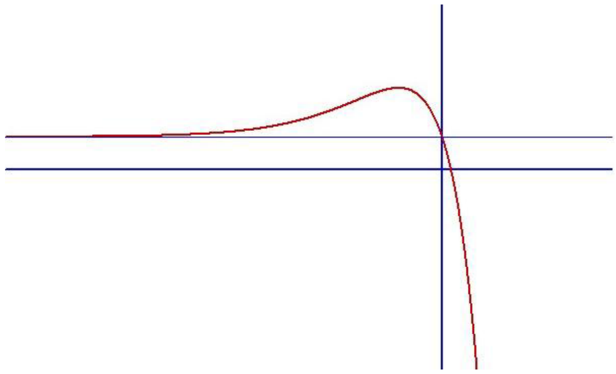
1) Antes de acercarse indefinidamente a la asíntota horizontal es posible que la gráfica la corte como ocurre con la función de la siguiente figura:



2) Puede suceder, aunque en las funciones racionales no ocurre, que hacia $+\infty$ y hacia $-\infty$ haya asíntotas

horizontales diferentes (o que solo la haya en un sentido) como ocurre en los siguientes gráficos:





iii) Oblicuas :

a) Determinación : Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ entonces puede haber una asíntota oblícua. Para confirmarlo calculamos $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx]$ y si se obtiene un valor <u>n</u> entonces la recta **y=mx+n** es una asíntota obícua de la función.

b) Posición : Para averiguar la posición de la gráfica respecto de la asíntota hacia $+\infty$ comparamos los valores de la función y de la asíntota para un valor suficientemente alto de x (p. ej para x=100) :

Si f(100)>m·100+n la gráfica se acerca por encima de la asíntota
Si f(100)<m·100+n la gráfica se acerca por debajo de la asíntota

Lo mismo para ver la posición hacia $-\infty$

Observaciones:

1) Hacia un mismo lado no puede haber al mismo tiempo asíntota horizontal y asíntota oblícua. En consecuencia procederemos a calcular una asíntota oblícua sólo cuando no haya asíntota horizontal (hacia $+\infty$ y/o hacia $-\infty$)
2) Las observaciones formuladas para las asíntotas horizontales son válidas para las oblícuas

B) Estudio de f´(x)

B1) Intervalos de crecimiento y decrecimiento
B2) Extremos

C) Estudio de f´´(x)

C1) Intervalos de concavidad y convexidad
C2) Puntos de Inflexión

Observación: No siempre es posible (o puede resultar excesivamente complicado) el estudio de f´´(x)). En estos casos representaremos la función con la información disponible añadiendo las observaciones que se deduzcan (a la vista de la gráfica) sobre concavidad, convexidad y puntos de inflexión

4.5.2.- Representación de la función

Finalizado el estudio de la función , trasladamos toda la información a unos ejes de coordenadas señalando los puntos notables (corte con ejes, extremos, PI) , las asíntotas y los intervalos de CR, DC, CC y CV. A continuación procedemos a dibujar la gráfica desde $-\infty$ hasta $+\infty$.

En ocasiones puede resultar conveniente calcular y señalar algunos puntos adicionales de la gráfica

<u>Ejemplo 1</u>

Estudiar y representar la función $f(x)=\dfrac{2x^2-7x+9}{(x-3)^2}$

1)Estudio

A) De f(x)

A1) Dominio : $(x-3)^2=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow Dom=R-\{3\}$

A2) Puntos de corte con

Eje OX: $2x^2-7x+9=0 \Rightarrow x=\dfrac{7\pm\sqrt{-23}}{4} \notin R \Rightarrow$ no corta a OX

Eje OY: f(0)=1$\Rightarrow$ Pto (0,1)

A3) Simetrías: No tiene ya que el Dom no es simétrico respecto de 0. De todas formas , veamos como se determina:

$$f(-x)=\frac{2(-x)^2-7(-x)+9}{(-x-3)^2}=\frac{2x^2+7x+9}{(x+3)^2}\begin{cases}\neq f(x)\Rightarrow \text{No simétrica respecto OY}\\ \neq -f(x)=\dfrac{-2x^2+7x-9}{(x-3)^2}\Rightarrow \text{No simétrica respeto O}\end{cases}$$

A4) Asíntotas

i)Verticales:

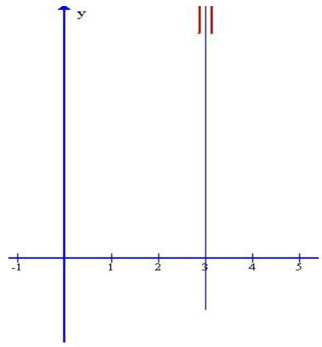
a) Determinación

El punto excluido del Dom es el 3 . Como $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-7x+9}{(x-3)^2}=\dfrac{6}{0}=\pm\infty$ la recta **x=3** es una asíntota vertical

b) Posición:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\frac{6}{0^+}=+\infty \quad (\text{ó así}: f(2.9)=552 \Rightarrow f(x)\to+\infty \text{ si } x\to 3^-$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\frac{6}{0^+}=+\infty \quad (\text{ó así}: f(3.1)=652 \Rightarrow f(x)\to+\infty \text{ si } x\to 3^+$$



ii)Horizontales

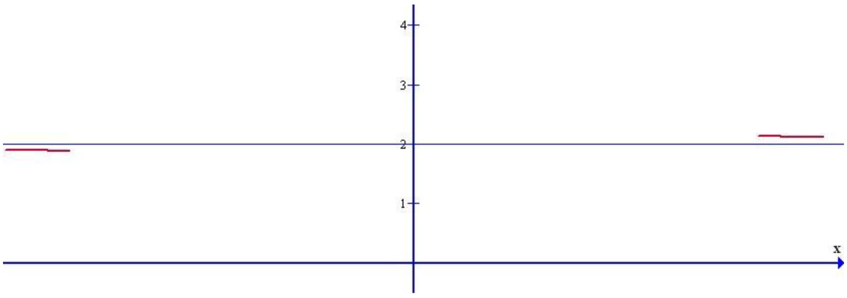
a) Determinación

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-7x+9}{(x-3)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2 \Rightarrow \text{La recta } y=2 \text{ es una asíntota horizontal}$$

b) Posición:

$$x=100\Rightarrow\begin{cases}\text{función}: & f(100)=2.0521\\ \text{Asíntota}: & y=2\end{cases}\Rightarrow \text{Hacia } +\infty \text{ la función se acerca por encima}$$

$$x=-100\Rightarrow\begin{cases}\text{función}: & f(-100)=1.952\\ \text{Asíntota}: & y=2\end{cases}\Rightarrow \text{Hacia } -\infty \text{ la función se acerca por debajo}$$



iii) Oblicuas

No hay ya que tiene asíntota horizontal

B) De f´(x)

$$f'(x)=\frac{(2x-7)(x-3)^2-(2x^2-7x+9)2(x-3)}{(x-3)^4}\underset{\div(x-3)}{=}\frac{(4x-7)(x-3)-(2x^2-7x+9)2}{(x-3)^3}=\frac{-5x+3}{(x-3)^3}$$

Puntos que anulan el numerador: -5x+3=0⇒x=3/5

Puntos que anulan el denominador: x-3=0⇒x=3

		3/5		3	
f´(x)	-	0	+		-
f	DC		CR		DC

→ Min en (3/5, f(3/5))≅(0.6, 0.96)

C) De f´´(x)

$$f''(x)=\frac{-5(x-3)^3-(-5x+3)3(x-3)^2}{(x-3)^6}\underset{\div(x-3)^2}{=}\frac{-5(x-3)-(-5x+3)3}{(x-3)^4}=\frac{10x+6}{(x-3)^4}$$

Puntos que anulan el numerador: 10x+6=0⇒x=-3/5

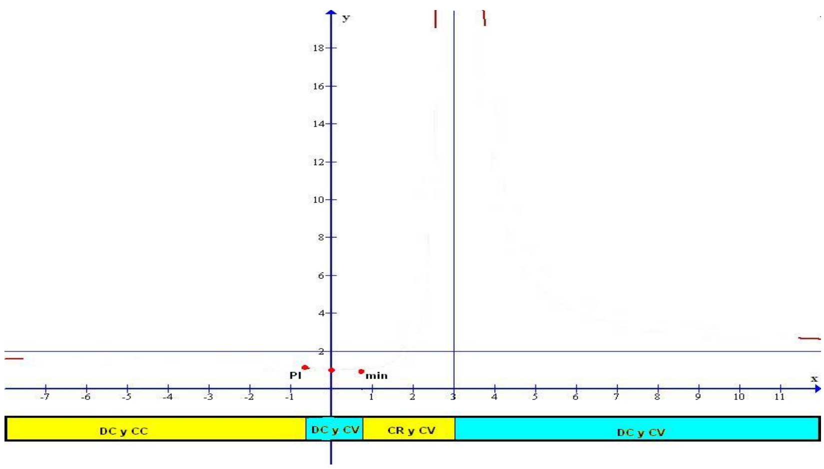
Puntos que anulan el denominador: x-3=0⇒x=3

		-3/5		3	
f´´(x)	-	0	+		+
f	CC		CV		CV

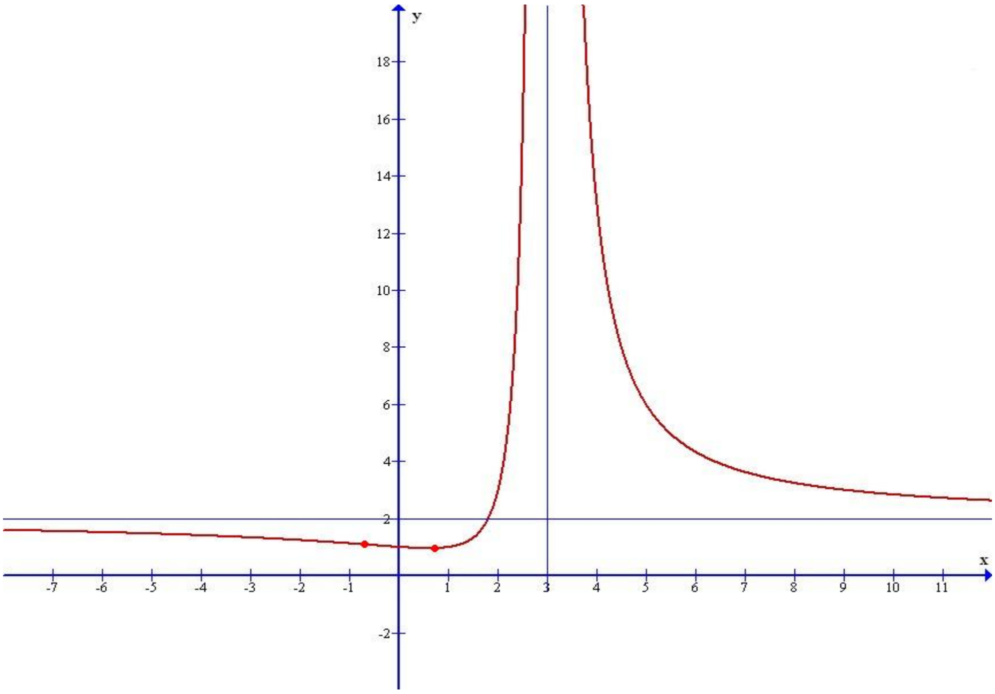
→ PI en (-3/5, f(-3/5))≅(-0.6, 1.07)

2)Representación

a)Trasladamos la información anterior a unos ejes de coordenadas:



b) Trazamos la gráfica uniendo los puntos y siguiendo las indicaciones sobre CR, DC, CC y CV



Ejemplo 2

Ejemplo 2: Estudiar y representar la función $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-1}$

1)Estudio

A) De f(x)

A1) Dominio : $x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow Dom = R-\{1\}$

A2) Puntos de corte con

Eje OX: $x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm 2 \Rightarrow$ corta a OX en (-2,0) y (2,0)

Eje OY: f(0)=4$\Rightarrow$ Pto (0,4)

A3) Simetrías: No tiene ya que el Dom no es simétrico respecto de 0.

A4) Asíntotas

i)Verticales:

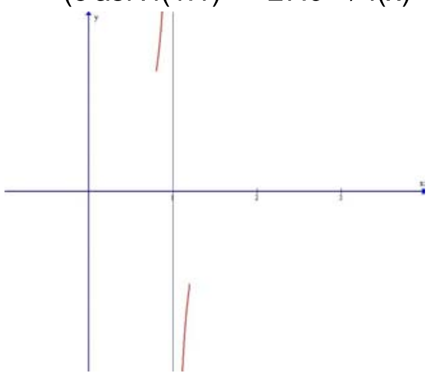
a) Determinación

El punto excluido del Dom es el 1 . Como $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4}{x-1}=\dfrac{-3}{0}=\pm\infty$ la recta **x=1** es una asíntota vertical

b) Posición:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\dfrac{-3}{0^-}=+\infty$ (ó así : $f(0.9)=31.9 \Rightarrow f(x)\to +\infty$ si $x\to 1^-$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\dfrac{-3}{0^+}=-\infty$ (ó así : $f(1.1)=-27.9 \Rightarrow f(x)\to -\infty$ si $x\to 1^+$



ii)Horizontales

a)Determinación

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-4}{x-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty \Rightarrow \text{No hay asíntota horizontal}$$

iii)Oblícuas

a)Determinación

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2-4}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-4}{x^2-x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

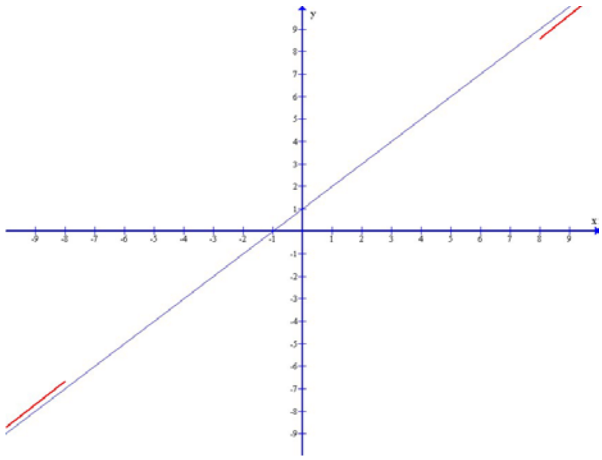
$$n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x)-mx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2-4}{x-1} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-4}{x-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x} = 1$$

Así pues, la recta **y=x+1** es una asíntota oblícua

b)Posición

$$x = 100 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{función: } f(100) = 100.96 \\ \text{Asíntota: } y = 100+1 = 101 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Hacia } +\infty \text{ la función se acerca por debajo}$$

$$x = -100 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{función: } f(\text{-}97) = -98.97 \\ \text{Asíntota: } y = -100+1 = -99 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Hacia } -\infty \text{ la función se acerca por encima}$$



B)Estudio de f´(x)

$$f'(x) = \frac{2x(x-1)-(x^2-4)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x+4}{(x-1)^2}$$

Puntos que anulan el numerador: $x^2 - 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} \notin R$

Puntos que anulan el denominador: x-1=0⇒x=1

		1	
f´(x)	+		+
f	CR		CR

C)Estudio de f´´(x)

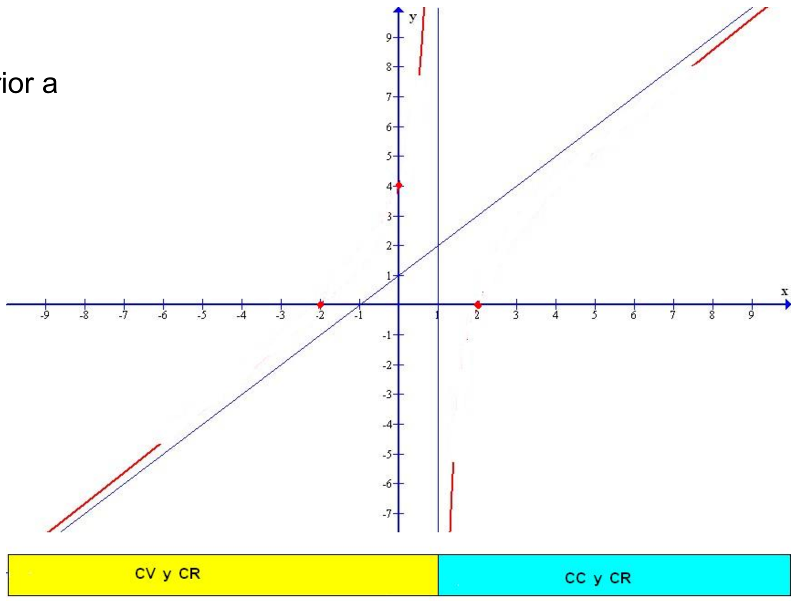
$$f''(x)=\frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x+4)2(x-1)}{(x-1)^4}\underset{\div(x-1)}{=}\frac{(2x-2)(x-1)-(x^2-2x+4)2}{(x-1)^3}=\frac{-6}{(x-1)^3}$$

Puntos que anulan el denominador: x-1=0⇒x=1

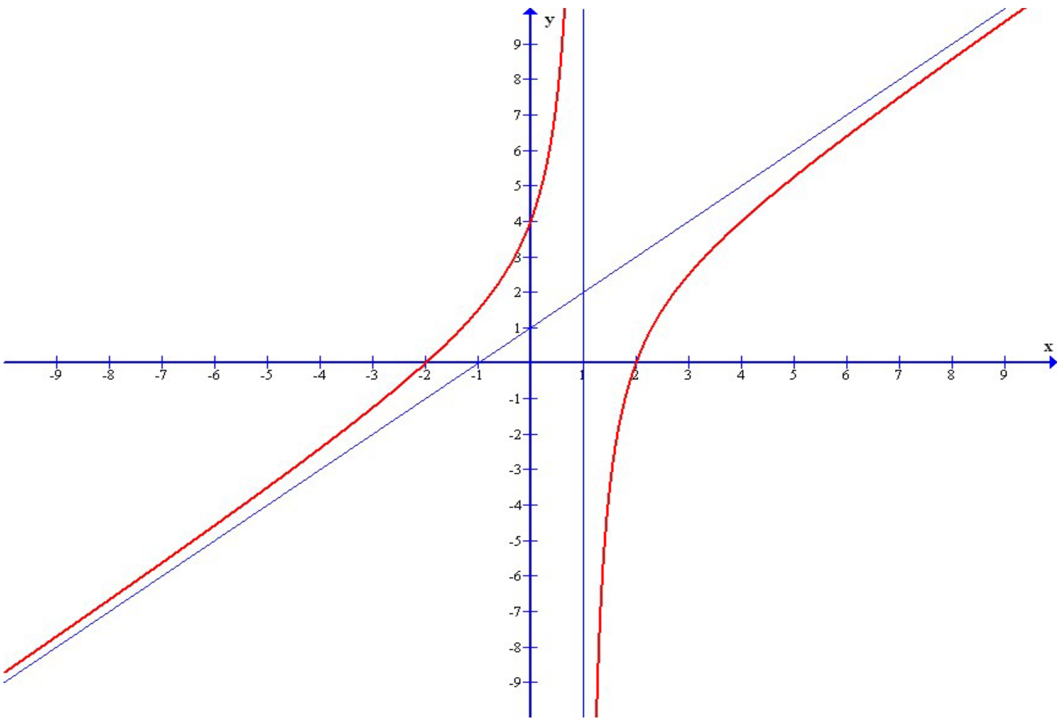
	1	
f´´(x)	+	-
f	CV	CC

2)Representación

a)Trasladamos la información anterior a



b) Trazamos la gráfica uniendo los puntos y siguiendo las indicaciones sobre CR, DC, CC y CV



4.8.- Completar el estudio de las funciones de los ejercicios 4.1 , 4.3 , 4.5 y representarlas
4.9.-Estudiar y representar las funciones siguientes:

4.9.1.- $f(x)=x+\dfrac{4}{x^2}$ **4.9.2.-** $f(x)=\dfrac{x^3}{(1+x)^2}$ **4.9.3.-** $f(x)=\dfrac{2x^2+5x+6}{x^2}$ **4.9.4.-** $f(x)=\dfrac{7x-32}{x^2-5x+4}$

4.9.5.- $f(x)=\dfrac{x^3}{x+1}$ **4.9.6.-** $f(x)=x\cdot e^{-x^2}$ (AH y=0) **4.9.7.-** $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ (AH y=0 hacia $-\infty$)

4.9.8.- $f(x)=x^2e^{-x}$ (AH $y=0$ hacia $+\infty$) **4.9.9.-** $f(x)=\dfrac{Lnx}{x}$ (AH : $y=0$) **4.9.10.-** $f(x)=Ln\dfrac{1+x}{1-x}$ (Tiene dos AV)

4.9.11.- $f(x)=\dfrac{x}{Lnx}$ (solo tiene AV) **4.9.12.-** $f(x)=xLnx$ (no tiene AV) **4.9.13.-** $f(x)=(x-1)e^x$ (AH $y=0$)

4.6.-OPTIMIZACIÓN

Un problema de optimización es un problema consistente en determinar las condiciones en que una magnitud, sometida a ciertas restricciones, se hace máxima (ó mínima según interese)

Para resolver un problema de este tipo procederemos del siguiente modo:

1.-Escribiremos la expresión matemática de la magnitud a optimizar

2.-Si en esa expresión aparece más de una variable, elegimos una de ella y expresamos las demás en términos de ella. Para ello usaremos la información del problema y resultados conocidos.
Así conseguimos expresar la magnitud a optimizar en función exclusivamente de la variable elegida

3.-Hallamos el máximo (o el mínimo) de esta función mediante los procedimientos estudiados en este tema

Ejemplo 1

Descomponer el número 36 en dos sumandos positivos de modo que sea máximo el producto del primer sumando por el cuadrado del segundo.

1.- Primer sumando: x
Segundo sumando: y
Magnitud a maximizar : $P=x\cdot y^2$

2.-Relación entre x e y : $x+y=36 \Rightarrow y=36-x$
Así pues la magnitud a optimizar será $P(x)=x(36-x)^2$

3.-$P'(x)=1\cdot(36-x)^2+x\cdot 2(36-x)(-1)=(36-x)(36-x-2x)=(36-x)(36-3x)=0\Rightarrow x=36\ ;\ x=12$
$P''(x)=(-1)(36-3x)+(36-x)(-3) \Rightarrow P''(36)=(-1)(36-3\cdot 36)=72>0 \Rightarrow$ P mínimo
$P''(12)=(36-12)(-3)=-72<0\Rightarrow$ **P máximo**

Así pues los dos sumandos pedidos son x=12 e y=36-12=24

4.10.-De una lámina de cartón cuadrada de 20 cms. de lado se recortan en las 4 esquinas cuadrados iguales de modo que al doblar y pegar se forme una caja sin tapa. ¿Cuál será la dimensión del cuadrado recortado para que resulte una caja de capacidad máxima?
4.11.- De todos los triángulos isósceles de perímetro 30 cms ¿Cuál tiene área máxima?
4.12.-Determinar las dimensiones del rectágulo de área máxima tal que al sustituir en él dos lados opuestos por dos semicircunferencias de diámetros dichos lados resulte una figura de perímetro 120 cms .
4.13.-El coste de producir **x** unidades de un determinado producto es $C(x)=x^2+6x+625$€ .¿Cuál es el

mínimo coste medio por unidad que se puede obtener?¿Con qué producción se consigue?

4.14.-Se desea construir el marco para una ventana rectangular de 6 m^2 de superficie. El metro lineal de tramo horizontal cuesta 2.5€ y el de tramo vertical 3€ ¿Cuál es el coste mínimo de dicho marco?

4.15.-Un comerciante compra un producto a 3€/Kg. y lo vende con la siguiente política de precios según el volumen del pedido:

-Para una cantidad no superior a 20 Kgs. el precio es de 6€/Kg

-A partir de 20 Kgs y hasta un máximo de 100 Kgs reduce el precio del Kg en 2 céntimos por cada Kg que exceda de los 20

a)¿Cuál es el volumen del pedido que aporta más beneficios al comerciante?

b) Un cliente que necesita 120 Kgs. del producto hace dos pedidos ¿Cuál será el volumen de cada uno de ellos que le proporciona el mínimo coste?

4.16.-En una rotonda circular de 8 metros de radio se desea disponer una zona ajardinada formando un rectángulo con sus vértices sobre el perímetro circular de la rotonda. ¿Cuál será la máxima supercie de zona ajardinada que se puede conseguir?

4.17.-la función $f(x)=ax^3-6x^2+bx+c$ no tiene extremos aunque en el punto A(2,1) la recta tangente es horizontal ¿Cuánto valen a,b,c?

4.18.-Hallar <u>p</u> y <u>q</u> sabiendo que la función $f(x)=x^3-px+q$ tiene un mínimo en el punto A(2,-13)

4.19.-Hallar <u>a</u>, <u>b</u> y <u>c</u> para que la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ tenga un punto de invlexión en A(1,-2) y corte al eje OY en B(0,1)

4.20.-La función $f(x)=\dfrac{x^3}{ax+b}$ tiene un mínimo en x=-3 y por asíntota vertical la recta x=-1 . Hallar a y b

4.21.-Una piedra preciosa pesa 10 grs. Se conoce que el valor de una piedra preciosa es proporcional al cuadrado de su peso y que el valor de la que tenemos es de 1200€. Si accidentalmente la piedra se cae y se parte en dos trozos ¿Cuál es el peso de cada trozo que nos produce la máxima pérdida económica?

PRUEBAS DE ACCESO DE GALICIA

JUNIO 2001

1.-La temperatura (en grados centígrados) de un trozo de metal sumergido en una solución durante 9 horas viene dada por $T(t) = 10 + \frac{20}{1+t} - 5t \quad , \quad 0 < t < 9$

Se pide: a) Temperatura inicial del metal, b) La temperatura, ¿aumenta o disminuye con el paso del tiempo? Justifiquese la respuesta. c) ¿Durante cuanto tiempo la temperatura del metal supera los cero grados?

2.- Dada la función f(x) = - x^2 + bx + c, calcúlense los valores **b** y **c** si esa función pasa por el punto (1 ,4) y en este punto la ecuación de la recta tangente es y = 4.

SEPTIEMBRE 2001

1.- Dada la función $f(x) = \frac{x}{x-2}$

A) Determinar: cortes con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento, asíntotas.
B) Representar su gráfica basándose en los datos del apartado A).
C) ¿Existe algún punto de la gráfica en la que la recta tangente tenga pendiente positiva? Justifiquese la respuesta.

2.- Un rectángulo, de perímetro 60, gira entorno a uno de sus lados. Calcular que dimensiones del rectángulo hacen que el cilindro generado tenga el máximo volumen posible.

JUNIO 2002

1.-Dada la parábola $f(x) = x^2 + bx + c$ calcular **b** y **c** si pasa por el punto (0,2) y tiene un mínimo en x=1 .

2.- Una empresa fabrica diariamente *x* toneladas de producto químico *A* (0 ≤ x ≤ 4) e *y* toneladas de producto químico *B;* la relación entre x e y viene dada por

$$y = \frac{24-6x}{5-x}$$

Los beneficios obtenidos con A son de 2000€ por tonelada y con B son de 3000€ por tonelada ¿Cuántas toneladas de A deben producirse diariamente para maximizar los beneficios?

SEPTIEMBRE 2002

1.- Dada la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & \text{si} \quad x \le 1 \\ x & \text{si} \quad 1 < x \le 2 \\ \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

Representarla gráficamente estudiando: puntos de corte con los ejes, crecimiento e decrecimiento, concavidad y convexidad, asíntotas.

2.- Representar la función

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

estudiando: puntos de corte con los ejes, crecimiento e decrecimiento, concavidad y convexidad, asíntotas.

JUNIO 2003

1.- Dada a función

$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ -x^2 + 4x - 3 & \text{si} \quad 1 < x \le 3 \\ \frac{x-3}{x} & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

Represéntala gráficamente estudiando: puntos de corte, crecimiento e decrecimiento, concavidad y asíntotas.

2.- a) Determinar la función f[x) si se sabe que pasa por el punto (0,1) y que su derivada es f ´(x)= x^3 + 2x.

b) Determinar el punto de la gráfica en el que la recta tangente tiene pendiente 0. ¿Que más se puede afirmar de ese punto? Justifíquese la respuesta.

SEPTIEMBRE 2003

1.- La producción y, en kg., de una cierta cosecha agrícola, depende de la cantidad de nitrógeno x, con que abonemos la tierra (en las unidades apropiadas), según la función $y=\frac{1000x}{1+x^2}$, siendo x ≥0

a) Estudiar el crecimiento e decrecimiento de la función. Calcular la producción máxima.
b) Si es rentable que la producción esté entre 400Kg. ye 500Kg. (ambos incluidos), ¿que cantidades de nitrógeno necesitaríamos?

2.- Determinar los parámetros a, b y c en la función polinómica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, sabiendo que tiene un mínimo relativo en el punto (1, 0) y un punto de inflexión en x=2/3

JUNIO 2004

1.- La función de coste total de producción de x unidades de un determinado producto es

$$C(x)=\frac{x^3}{100}+8x+20$$

a) Se define la función de coste medio por unidad como $Q(x)=\frac{C(x)}{x}$, ¿cuántas unidades *"x_0"* es necesario producir para que sea mínimo el coste medio por unidad? b) ¿Que relación existe entre *$Q(x_0)$ e $C'(x_0)$?*

2.- Una enfermedad se propaga de tal manera que, después de *t* semanas ha afectado a *N(t)* cientos de personas, donde

$$N(t)=\begin{cases}5-t^2(t-6) & \text{para} \quad 0\le t\le 6\\ -\frac{5}{4}(t-10) & \text{para} \quad 6<t\le 10\end{cases}$$

a) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de *N(t).* Calcular el máximo de personas afectadas y la semana en la que se presenta ese máximo. Calcular también la semana en la que se presenta el punto de inflexión en el número de personas afectadas, b) ¿A partir de que semana la enfermedad afecta a 250 personas como máximo?

SEPTIEMBRE 2004

1.- Los beneficios (en millones de euros por año) estimados para una empresa se ajustan a la siguiente función:

$$B(x)=\frac{5x}{x^2+4}, \quad x\ge 0$$

donde B representa los beneficios de la empresa y *x* los años transcurridos desde el momento de su constitución *(x* =0).
a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *B(x).* ¿Que información nos dan sobre la evolución de los beneficios a lo largo del tiempo? b) ¿Al cabo de cuánto tiempo obtiene la empresa el máximo beneficio? ¿Cuál es este beneficio máximo?

2.- Se compra un equipo industrial en 1990 (x =0) y se sabe que genera unos ingresos de

$$R(x)=6125-\frac{125}{4}x^2$$ (miles de euros anuales) x años después de comprarlo.

Al mismo tiempo, los costes de funcionamiento y mantenimiento son $C(x) = 2000 + 10x^2$ miles de euros anuales.
a) Representar las gráficas de las funciones *R(x)* y *C(x).* b) ¿Durante cuantos años fué rentable el equipo? c) ¿En que año el beneficio fué máximo y a cuanto ascendió el mismo?

JUNIO 2005

1.- El número de vehículos que ha pasado cierto día por el peaje de una autopista viene representado por la función

$$N(t)=\begin{cases}\left(\dfrac{t-3}{3}\right)^2+2 & , \quad 0\le t\le 9\\[2ex] 10-\left(\dfrac{t-15}{3}\right)^2 & , \quad 9<t\le 24\end{cases}$$

donde N indica el número de vehículos y t representa el tiempo transcurrido (en horas) desde las 0:00 horas.
a) ¿Entre que horas aumentó el número de vehículos que pasaban por el peaje? ¿Entre que horas disminuyó?
b) ¿A que hora pasó el mayor número de vehículos? ¿Cuántos fueron?

2.- Se quiere fabricar una caja de madera sin tapa con una capacidad de 2 m^3. Por razones de portabilidad en el transporte de la misma, el largo de la caja ha de ser doble que el ancho. Además, la madera para construir la base de la caja cuesta 12 euros por metro cuadrado, mientras que la madera para construir las caras laterales cuesta 8 euros por metro cuadrado. Hallar las dimensiones de la caja para que el coste sea mínimo. Calcular dicho coste mínimo.

SEPTIEMBRE 2005

1.- Se quiere cercar un campo rectangular que linda con un camino por uno de sus lados. Si la cerca del lado del camino cuesta 6 €/m y la de los otros lados 2 €/m, hallar las dimensiones del campo de área máxima que se puede cercar con 2560 €.
2.- La función *f(t),* $0\le t\le 10$, en la que el tiempo *t* está expresado en años, representa los beneficios de una empresa (en cientos de miles de euros) entre los años 1990 (t =0) y 2000 (t=10)

$$f(t)=\begin{cases} t+1 & \text{si} \quad 0\le t<2\\ t^2-8t+15 & \text{si} \quad 2\le t<6\\ \dfrac{3}{4}(-t+10) & \text{si} \quad 6\le t\le 10\end{cases}$$

a) Representar gráficamente *f(t),* estudiando: puntos de corte, intervalos de crecimiento y decrecimiento.
b) ¿En que años consiguió la empresa el máximo beneficio? ¿Cual fué dicho beneficio? ¿Durante cuanto tiempo hubo pérdidas?

JUNIO 2006

1.- La función f definida por $f(x)= x^3+ax^2+bx+c$ verifica que su gráfica pasa por el punto (-1,0) y tiene un máximo relativo en el punto (0,4)
a) Determinar la función f calculando a, b y c
b) Representar gráficamente la función $f(x)= x^3-3x^2+4$ estudiando: intervalos de crecimiento y decrecimiento, mínimo relativo, intervalos de concavidad y convexidad y punto de inflexión
2.-En un hospital el número N de personas afectadas por una cierta infección vírica, después de t semanas, viene dado por la función

$$N(t)=\frac{350t}{2t^2+kt+8}$$

a)Se sabe que el número de personas afectadas al cabo de 1 semana ha sido 50. Calcúlese el valor de k
b)Para el valor de k=-3, calcular el máximo de personas afectadas y la semana en que ocurre. ¿A partir de que momento, después de alcanzar el valor máximo, el número de personas afectadas es menor que 25?

SEPTIEMBRE 2006

1.- La cantidad de agua (en hm^3) de un embalse durante el último año viene dada por la función

$$C(t)=\frac{210000}{(2t-k)^2+6} \quad , \quad 0\le t\le 6$$

en donde *t* es el tiempo transcurrido en meses.
(a) Determinar el valor del parámetro k teniendo en cuenta que la cantidad máxima de agua la alcanzó al cuarto mes.
(b) Para el valor de k = 8, determinar los periodos en los que la cantidad de agua ha aumentado y en los que ha disminuido. ¿A partir de qué mes la cantidad de agua ha sido inferior a 1400 hm^3?

2.- Un vendedor de pólizas de seguros tiene un sueldo fijo mensual de 1000 euros, más una comisión que viene dada por la función $17x - 0{,}0025x^3$, donde x representa el número de pólizas vendidas.

Si el vendedor tiene mensualmente un gasto general de 200 euros, más otro de 5 euros por póliza contratada, calcula el número de pólizas que debe contratar mensualmente para que su ganancia sea máxima, ¿a cuánto asciende dicha ganancia?

JUNIO 2007

1.-Se estudia la evolución mensual del número de socios de una entidad durante el año 2005 y se observa que está modelada por la siguiente función: $f(x)=\begin{cases} -x^2+6x+a & \text{si } 0\le x\le 6 \\ 50 & \text{si } 6<x\le 8 \\ 50+(x-8)(x-12) & \text{si } 8<x\le 12 \end{cases}$ donde x es el tiempo en meses.

a) Si inicialmente se fundó con 50 socios , determinar el valor de *a*
b) Determinar en qué mes el número de socios fue máximo y en qué mes el número de socios fue mínimo
c) Si para cubrir gastos la entidad necesitaba más de 47 socios, ¿en qué meses tuvo pérdidas?

2.-Un estudio indica que , entre las 12:00 hor as y las 19:00 horas de un día laborable típico, la velocidad (en Km/h) del tráfico en cierta salida de autopista viene dada por la siguiente función: $f(x)=2x^3-21x^2+60x+20,\quad 0\le x\le 7$
donde x es el número de horas después del mediodía (x=0 corresponde a las 12:00 horas)
Representar gráficamente f (x) , para $0\le x\le 7$, estudiando: el punto de corte con el eje y, intervalos de crecimiento y decrecimiento, intervalos de concavidad y convexidad. Calcular las horas en que se presentan máximos, mínimos y puntos de inflexión para la velocidad del tráfico

SEPTIEMBRE 2007

1. El rendimiento de los trabajadores de una factoría (evaluado en una escala de 0 a 100) durante una jornada de 8 horas, viene dado por la función:

$$r(t)=\begin{cases} -10t^2+60t & \text{si } 0\le t<4 \\ 80 & \text{si } 4\le t<6 \\ 170-15t & \text{si } 6\le t\le 8 \end{cases}$$

siendo *t* el tiempo en horas.
(a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento. ¿Cuál es el rendimiento máximo?
(b) ¿En qué instantes de su jornada laboral el rendimiento se sitúa en la mitad de la escala?

2.-Una empresa ha estimado que el coste (en euros) de producir diariamente ***x*** unidades de un determinado producto viene dado por la función *C(x) = 2400 + 26x,* y que el ingreso diario (en euros) que obtiene vendiendo estas ***x*** unidades viene dado por la función $I(x) = 150x - x^2$.
(a)Calcular la función *B(x)* que expresa los beneficios (ingresos menos costes) diarios obtenidos. ¿Entre qué valores deberá estar comprendido el número de unidades producidas diariamente para que la empresa no tenga pérdidas?
(b)Hallar el número de unidades que tiene que producir diariamente para que el beneficio sea máximo. ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

JUNIO 2008

1.-Supongamos que el valor V, en euros, de un producto disminuye o se deprecia con el tiempo t, en meses, donde $V(t)=50-\dfrac{25t^2}{(t+2)^2}\quad ;\quad t\ge 0$

a) Calcular el valor inicial del producto, V(0). ¿A partir de qué mes el valor del producto es inferior a 34€?
b) Determinar la velocidad de depreciación del producto, es decir, V´(t)
c) Hallar $\lim_{t\to+\infty} V(t)$. ¿Hay algún valor por debajo del cual nunca caerá V? Justificar la respuesta

2.-El número de plazas ocupadas de un aparcamiento, a lo largo de las 24 horas de un día, viene expresado por la función $N(t)=\begin{cases} 1680+20t & \text{si } 0\le t<8 \\ -10t^2+260t+400 & \text{si } 8\le t<16 \\ -10t^2+360t-1200 & \text{si } 16\le t\le 24 \end{cases}$

a)¿A qué hora del día presenta el aparcamiento la máxima ocupación?¿cuántos coches hay a esa hora?
b)¿Entre qué horas la ocupación del aparcamiento es igual o superior a 2000 plazas?

SEPTIEMBRE 2008

1.-La distancia (en millas) entre un barco pesquero que salió a faenar durante un período de 10 días *y* su puerto base viene dada por la función:

$$M(t)=\begin{cases}36-(2t-6)^2 & ,0\le t\le 5\\ 4(10-t) & 5<t\le 10\end{cases}$$

en donde t es el tiempo transcurrido (en días) desde su salida del puerto base.
(a) ¿Después de cuántos días es máxima la distancia del pesquero a su puerto base? ¿a cuántas millas se encontraba?
(b) ¿Durante qué periodos aumentaba la distancia a su puerto base? ¿en qué períodos disminuía?
(c) ¿A partir de qué día, después de alcanzar la distancia máxima, se encontraba a menos de 12 millas del puerto base?

2.-Una institución de beneficencia estatal quiere determinar cuántos analistas debe contratar para el procesamiento de solicitudes de la seguridad social. Se estima que el coste (en euros) *C(x)* de procesar una solicitud es una función del número de analistas *x* dada por:
$C(x) = 0{,}003x^2 - 0{,}216Lnx + 5$, siendo $x>0$ (Ln = logaritmo neperiano).
(a) Si el objetivo es minimizar el coste por solicitud *C(x),* determinar el número de analistas que deberían contratarse.
(b) ¿Cuál es el coste mínimo que se espera para procesar una solicitud?

JUNIO 2009

1.-Para un programa de ayuda se estima que el número de beneficiarios *n* (en miles) durante los próximos *t* años se ajustará a la función $n(t)=\frac{1}{3}t^3-\frac{9}{2}t^2+18t\ ,\quad 0\le t\le 9$
(a) Representa la gráfica de la función, estudiando intervalos de crecimiento y de decrecimiento, máximos y mínimos (absolutos y relativos) y punto de inflexión. ¿En qué año será máximo el número de beneficiarios?, ¿cuál es dicho número?
(b) Un segundo programa para el mismo tipo de ayuda, estima que, para los próximos *t* afios, el número de beneficiarios (en miles) será $m(t)=\frac{9}{2}t\ ,\quad 0\le t\le 9$ ¿En algún año el número de beneficiarios será el mismo con ambos programas? ¿En qué intervalo de tiempo el primer programa beneficiará a más personas que el segundo?
2.- Un modelo para los costes de almacenamiento y envío de materiales para un proceso de manufactura viene dado por la función $C(x)=100\left(100+9x+\frac{144}{x}\right),\quad 1\le x\le 100$, siendo *C(x)* el coste total (en euros) de almacenamiento y transporte y *x* la carga (en toneladas) de material.
(a) Calcula el coste total para una carga de una tonelada y para una carga de 100 toneladas de material.
(b) ¿Qué cantidad *x* de toneladas de material producen un coste total mínimo? Justifica la respuesta y calcula dicho coste mínimo
(c) Si deciden no admitir costes de almacenamiento y envío superiores o iguales a 75000 euros, ¿hasta qué carga de material podrían mover?

SEPTIEMBRE 2009

1.-Un individuo ha invertido en acciones de cierta compañía durante los últimos 12 meses. El valor *V* de su inversión, en euros, en el transcurso de *t* meses se estima por la función
$V(t) = -2t^3 + 9t^2 + 240t + 1200$, siendo $0\le t\le 12$.
(a) ¿Cuánto ha invertido inicialmente?
(b) ¿Entre qué meses el valor de su inversión creció? ¿y entre cuáles decreció?
(c) El individuo vende sus acciones transcurridos los 12 meses, ¿cuál hubiera sido realmente el mejor momento para haberlo hecho? ¿Cuánto pierde por no haber las vendido en el momento óptimo?
(d) Utilizando los resultados de los apartados anteriores representa gráficamente la función, calculando además el punto de inflexión.
2.-Una organización humanitaria planea una campaña para recaudar fondos en una ciudad. Se sabe, por experiencias anteriores, que el porcentaje *P* de habitantes de la ciudad que hará un donativo es una función del número de días *t* que dure la campaña, estimada por $P(t) = 40\left(1-e^{-0{,}05t}\right),\quad t\ge 0$

(a) ¿Qué porcentaje de habitantes de la ciudad hará un donativo después de 10 días de iniciada la campaña? ¿Y después de 20 días?
(b) Calcula el ritmo de cambio, *P'(t),* del porcentaje de donantes con respecto a los días de campaña transcurridos. ¿Es la función *P(t)* creciente o decreciente?
(c) Calcula el $\lim_{t\to+\infty} P(t)$. ¿Se supera en algún día el 40% de donantes?
(d) Si la ciudad tiene 100000 habitantes y si cada donante contribuye con 2 euros, calcula el total que se habrá recaudado al cabo de 20 días.

JUNIO 2010

1.-Una empresa fabrica bicicletas y vende *cada unidad* de un determinado modelo a un precio P(x) (en euros) que depende del número x de bicicletas de ese modelo que haya fabricado. Tal función es

$$P(x) = 384 - \frac{2x^2}{75} \quad , \quad 0 < x \le 60$$

En la fabricación de las x bicicletas se produce un gasto fijo de 100 euros más un gasto variable de 256 euros por cada bicicleta fabricada.

(a) Calcula la función que expresa el beneficio obtenido por la empresa en la fabricación de x bicicletas. (b)
(b)¿Cuántas bicicletas deberá fabricar la empresa para obtener el máximo beneficio?
(c) Para el número de bicicletas anterior, calcula el gasto, el ingreso yel beneficio máximos.

2.- El número *N* de ejemplares vendidos (en miles) de una revista destinada al público adolescente es estimado por la función $N(t) = \begin{cases} 3t(10-t) & 0 \le t \le 8 \\ \dfrac{624t}{t^2+144} + 24 & t > 8 \end{cases}$, donde *t* es el tiempo transcurrido en semanas.

Determina: los períodos en los que aumentan y en los que disminuyen las ventas de la revista, cuando se alcanza el mayor número de ventas y a cuanto ascienden. ¿A qué valor tiende el número de ventas con el paso del tiempo?

SEPTIEMBRE 2010

1.- La función $C(t) = -t^3 + 9t^2 - 15t + 50 \quad ,0 \le t \le 6$, se ajusta a la cotización en euros de cierta moneda en los últimos seis años (C(t) indica la cotización en el tiempo t medido en años).
(a) Encuentra los intervalos de tiempo en los que la cotización creció y en los que decreció.
(b) ¿En qué momentos hubo una cotización más baja y más alta? ¿cuáles fueron esas cotizaciones?
(c) ¿Tiene C(t) algún punto de inflexión? En caso afirmativo, calcúlalo y traza la gráfica de la función en el intervalo dado de tiempo.

2.- Una fábrica produce diariamente un total de 20 artículos de dos modelos diferentes A y B. El coste de producción diario (en euros) viene dado por C = $6x^3$ + 450y - 2500, siendo *x* el número de modelos del tipo A e *y* el número de modelos del tipo B. ¿Cuántos modelos de cada tipo debe producir diariamente para minimizar el coste de producción diario? Calcula ese coste de producción mínimo.

JUNIO 2011

1.- Una empresa compra diversos artículos de adorno y los empaqueta en cajas para su distribución.
El coste promedio por caja (en euros) está dado por C(x) = $3x - 18\ln x + \dfrac{120}{x} + 50 \quad , x > 0$, siendo x el número de cajas que empaqueta (ln: logaritmo neperiano). Determina el número de cajas que deben empaquetar para

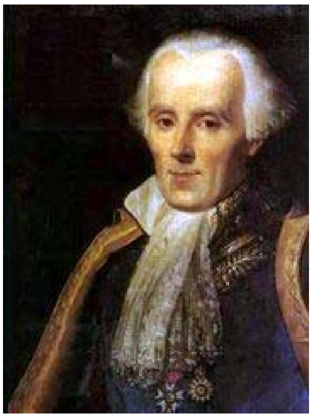
minimizar el coste promedio por caja C(x).

2.- El precio, en euros, que la acción de una empresa alcanza en el transcurso de una sesión de Bolsa, viene dado por la función $p(t) = 4t^3 - 42t^2 + 120t + 200$, $0 \leq t \leq 7$, **t** es el tiempo en horas a contar desde el inicio de la sesión. Supongamos que la sesión comienza a las 10 de la mañana (t =0) y finaliza 7 horas después (a las 5 de la tarde).

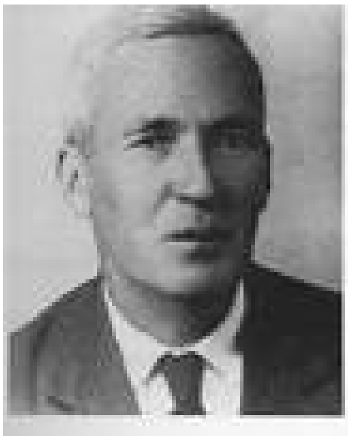
(a) ¿Entre qué horas el precio de la acción sube y entre qué horas baja? ¿A qué hora el precio de la acción alcanza un valor máximo relativo?, ¿y un valor mínimo relativo? Calcula dichos valores.

(b) ¿Se alcanza en algún momento un valor máximo absoluto?, ¿y un valor mínimo absoluto? En caso afirmativo, calcula dichos valores.

(c) Utilizando los resultados anteriores y calculando el punto de inflexión, traza la gráfica de la función **p(t).**



Laplace
1749-1827)



Kolmogorov
(1903-1987)

Fisher
(1890-1962)

BLOQUE III :

ESTADÍSTICA

TEMA1: SUCESOS ALEATORIOS

1.1.-EXPERIMENTO ALEATORIO

Se dice que un experimento es aleatorio si es imposible predecir el resultado cada vez que se realiza.

Ejemplos

A) Lanzar al aire una moneda y observar la cara superior
B) Lanzar un dado y observar la cara superior
C) Extraer una carta de la baraja
D) Lanzar un dado de quinielas

1.2.-ESPACIO MUESTRAL

El espacio muestral de un experimento aleatorio es el conjunto do todos los resultados posibles de dicho experimento . Se designa por $\mathbb{E}$.

Ejemplos

A) El espacio muestral asociado al experimento "lanzar una moneda" es

$$\mathbb{E} =\{Cara,cRuz\}$$

B) Para el experimento "lanzar un dado" el espacio muestral es

$$\mathbb{E} = \{1,,2,3,4,5,6\}$$

C) Para el experimento "lanzar un dado de quinielas" el espacio muestral es

$$\mathbb{E} = \{1,X,2\}$$

D) Para el experimento "extraer una carta de la baraja" el espacio muestral consta do 40 elementos: cada una de las cartas de la baraja.

Consideraremos solamente experimentos cuyo espacio muestral $\mathbb{E}$ conste de un numero finito de elementos.

1.3.-SUCESOS

Dado un experimento aleatorio cuyo espacio muestral es $\mathbb{E}$, se llama suceso a cada uno de los subconjuntos de $\mathbb{E}$.

Ejemplos

En el experimento "lanzar un dado" son sucesos:

A={5} que podríamos llamar "salir un cinco"
B= {1,3,5} que podríamos llamar "salir impar"
C= {3,6} que podríamos llamar "salir múltiplo de 3"
D={4,5,6} que podríamos llamar "salir más de 3"

Al conjunto de todos los sucesos ,es decir, al conjunto P($\mathbb{E}$) (partes de $\mathbb{E}$) se le llama espacio de sucesos

Ejemplo

En el experimento "lanzar un dado de quinielas" el espacio de sucesos es

$$P(\mathbb{E}) =\{ \varnothing , \{1\} , \{X\} , \{2\} ,\{1,x\} , \{1,2\} , \{X,2\} , \mathbb{E} \}$$

Al realizar el experimento se dice que se ha verificado un suceso A si el resultado obtenido es uno de los que constituyen A

Ejemplo

Al lanzar un dado se verificará el suceso A={2,4,6} ="salir par " si el resultado obtenido es un 2 ó un 4 ó un 6.

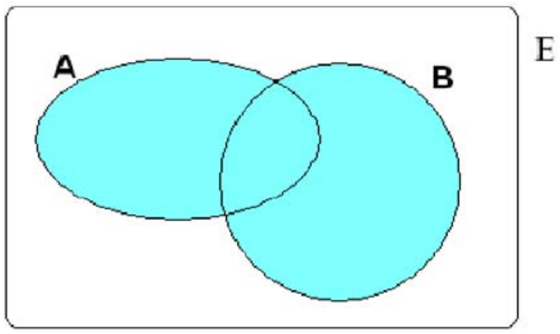
El suceso $\varnothing$ nunca se verifica: se le llama suceso imposible. El suceso E se verifica siempre: se le llama suceso seguro.
A los sucesos que constan de un solo elemento se les llama sucesos elementales.

1.4.- OPERACIONES CON SUCESOS

Los sucesos son conjuntos y como tales se pueden someter a las operaciones propias de los conjuntos, a saber:

1.4.1.- Unión de sucesos:

El suceso $A \cup B$ se llama suceso unión de A y B. El suceso $A \cup B$ se verifica cuando se verifica A ó se verifica B.

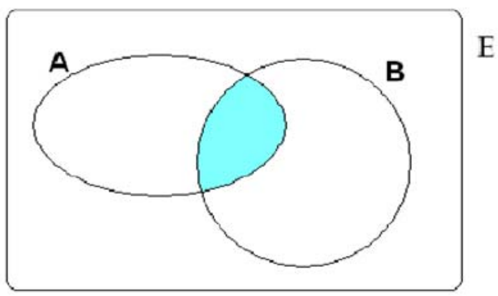


Ejemplo

Experimento:"lanzar un dado" .
Si A={2,4,6} y B={3,6} entonces $A \cup B$={2,3,4,6}

1.4.2.- Intersección de sucesos:

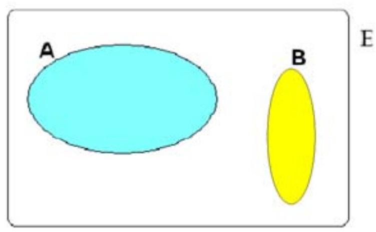
El suceso $A \cap B$ se llama suceso intersección de A y B. El suceso $A \cap B$ se verifica cuando se verifica A y se verifica B.



Ejemplo

Experimento:"lanzar un dado" .
Si A={2,4,6} y B={3,6} entonces $A \cap B$ ={6} .

Se dice que dos sucesos A y B son **incompatibles** si su intersección es el suceso imposible. Dos sucesos incompatibles no pueden verificarse simultáneamente.

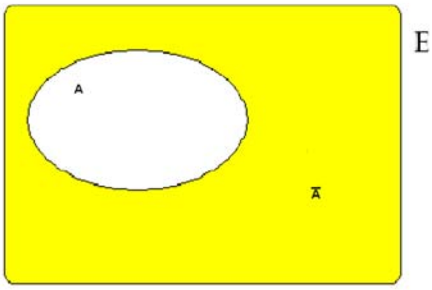


Ejemplo

En el experimento " lanzar un dado" son incompatibles los sucesos
M={1,2} = "salir menos de 3" y N={5,6}="salir más de 4"

1.4.3.- Sucesos contrarios:

El suceso $\bar{A}$ constituido por los elementos de $\mathbb{E}$ que no pertenecen a A se llama suceso contrario de A. El suceso $\bar{A}$ se verifica cuando no se verifica A (y recíprocamente)



Ejemplo

Experimento:"lanzar un dado"

$A=\{1,3,5\}$ ="salir impar" $\Rightarrow \bar{A}=\{2,4,6\}$ = "salir par"

Es evidente que dos sucesos contrarios son incompatibles (aunque sucesos incompatibles no tienen por que ser contrarios)

1.5.- ÁLGEBRA DE SUCESOS

Así pues , con los sucesos se pueden realizar las operaciones de a unión e intersección. Ademas estas operaciones con sucesos gozan de las siguientes propiedades (que son características de una estructura llamada ALGEBRA DE BOOLE) :

1.-Conmutativa: $A\cup B=B\cup A$ $\quad A\cap B = B\cap A$

2.-Asociativa: $A\cup (B\cup C) = (A\cup B)\cup C$ $\quad A\cap (B\cap C) = (A\cap B)\cap C$

3.-Distributiva: $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap (A\cup C)$ $\quad A\cap (B\cup C) = (A\cap B)\cup (A\cap C)$

4.-Neutros: $A\cup\varnothing = A$ $\quad A\cap \mathbb{E} = A$

5.-Complementación: para cada A existe un $\bar{A}$ tal que

$A\cup\bar{A} = \mathbb{E}$ $\quad A\cap\bar{A} = \varnothing$

Por ello diremos que el espacio de sucesos con la unión y la intersección es un álgebra de Boole: el álgebra de sucesos

TEMA 2: PROBABILIDAD

2.1.-FRECUENCIA ABSOLUTA Y RELATIVA DE UN SUCESO

Consideremos un experimento aleatorio que repetimos **N** veces . Consideremos un suceso A de dicho experimento. Definimos

-Frecuencia absoluta del suceso A es el número de veces **n** que se ha verificado dicho suceso en los **N** ensayos del experimento

-Frecuencia relativa del suceso A : es el cociente entre su frecuencia absoluta y el número de veces que se ha repetido el experimento. Es decir:

$$f(A) = \frac{n}{N}$$

La frecuencia relativa tiene tres propiedades básicas:

1.- $0 \leq f(A) \leq 1$ para cualquier suceso A

2- $f(E) = 1$

3.- $f(A \cup B) = f(A)+f(B)$ si A y B son sucesos incompatibles

No es difícil demostrar estas propiedades. Hágase como ejercicio. Hay otras propiedades tales como $f(\emptyset)=0$, $f(A)+f(\bar{A})= 1$ que se pueden deducir de las tres anteriores.

2.2.-IDEA DE PROBABILIDAD

La persona que tira un dado podría afirmar que el resultado va a ser un número menor que 6, pero no puede estar totalmente seguro. Pero tiene más seguridad en esto que en que salga un 6 . Es decir, hay más seguridad de que unos sucesos se verifiquen que otros.

Surge, en consecuencia, la necesidad de medir de alguna manera la seguridad de que un determinado suceso se verifique al realizar el experimento. Esta medida es lo que se conoce como probabilidad.

La primera definición de probabilidad es debida a Laplace. Es la siguiente :

"La probabilidad de un suceso A es el cociente entre el número de casos favorables al suceso y el número de casos posibles si éstos son igualmente probables"

Probabilidad de Laplace: $p(A) = \frac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}}$

Esta definición es fácil de aplicar. Por ejemplo consideremos el experimento "lanzar un dado" . Sea A el suceso "salir múltiplo de 3" .Está claro que los casos posibles son seis: 1 , 2 , 3 , 4 , 5 o 6 . Si el dado está bien construido estos seis casos son equiprobables. Los casos favorables al suceso A son dos: 3 y 6 . Por tanto P(A)= 2/6=1/3

Pero esta definición de probabilidad presenta inconvenientes. En primer lugar , desde el punto de vista formal es incorrecta ya que emplea el término a definir (*igualmente <u>probables</u>*) en la definición. Desde el punto de vista práctico solo es aplicable a los casos de equiprobabilidad , condición que por otra parte no es fácil de determinar.

Otro camino seguido para definir probabilidad es el que se basa en las frecuencias relativas teniendo en cuenta la siguiente ley:

Ley del azar: Al repetir un experimento un número elevado de veces la frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse alrededor de un cierto valor.

Es imposible demostrar que esta hipótesis es verdadera pero la experiencia muestra que se puede aceptar razonablemente. En efecto si por ejemplo lanzamos repetidamente una moneda vemos que la frecuencia relativa del suceso "salir cara" tiende a estabilizarse alrededor del valor 0,5 ,es decir, la cara tiende a salir la mitad de las veces.

De acuerdo con esta Ley del azar se puede dar la siguiente definición de probabilidad:

"La probabilidad de un suceso A es el número alrededor del cual se estabiliza su frecuencia relativa al repetir indefinidamente el experimento"

Esta definición no presenta los inconvenientes de la de Laplace, pero utiliza aspectos puramente experimentales que la hacen incómoda.

Para eliminar todas estas deficiencias, es Kolgomorov quien en 1933 introduce una definición axiomática de la probabilidad que vamos a estudiar en la siguiente pregunta.

2.3.-DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD

La idea fundamental de esta definición es considerar la íntima relación entre frecuencia relativa y probabilidad. Para ello se toman como axiomas (principios indemostrables) los aspectos más esenciales de la frecuencia (vease 2.1) y a partir de ellos se obtienen, por deducción, los demás resultados Tenemos así la definición axiomática de la probabilidad:

Dado un experimento aleatorio cuyo espacio muestral es E, se llama probabilidad a una aplicación

$$p: \mathbb{P}(\mathbb{E}) \longrightarrow \mathbf{R}$$

(*es decir , una regla por la que a cada suceso se le asigna un número - su probabilidad -) que verifica los siguientes axiomas*:

P1) $0 \leq p(A) \leq 1$ *para cualquier suceso A*

P2) $p(E) = 1$

P3) $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ *para todo par do sucesos A y B incompatibles.*

Obsérvese que como axiomas se han tomado las idealizaciones de las tres propiedades básicas de las frecuencias relativas.

Ejemplo

Consideremos el experimento "lanzar una moneda" .El espacio muestral es $\mathbb{E}$= { C, R} Definimos la aplicación $p: \mathbb{P}(\mathbb{E}) \longrightarrow \mathbf{R}$ así :

$$p(\varnothing)=0 \ , \ p(\{C\})=1/2 \ , \ p(\{R\})=1/2, \ \ p(\mathbb{E})=1$$

Esta aplicación es una probabilidad.

También lo es la aplicación $p: \mathbb{P}(\mathbb{E}) \longrightarrow \mathbf{R}$ definida por:

$$p(\varnothing)=0 \ , \ p(\{C\})=2/3 \ , \ p(\{R\}) =1/3, \ \ p(\mathbb{E})=1.$$

Respondería esta probabilidad a un experimento en el que la moneda estaría tarada de tal manera que la cara tiende a salir el doble de veces que la cruz.

EJERCICIOS

2.1.-Un experimento consiste en extraer una bola de una urna que contiene una bola azul, 2 rojas y 3 verdes y observar el color de la bola extraida.Determinar el espacio muestral, el espacio de sucesos y definir una probabilidad

2.4.-PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD

A partir de los axiomas se demuestran las siguientes propiedades de la probabilidad:

1.-Probabilidad del suceso contrario: $p(\bar{A})= 1 – p(A)$

2.-Probabilidad del suceso imposible: $p(\varnothing)= 0$.

3.-Probabilidad de la unión de sucesos incompatibles: Si A , B y C son tres sucesos incompatibles dos a dos entonces :

$$p(A \cup B \cup C) = p(A)+ p(B)+p(C)$$

4.-Probabilidad de la unión de sucesos compatibles:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

5.-Si $A \subset B$ entonces $p(A) \leq p(B)$

6.-Regla de Laplace: Sean W_1 , $W_2,....,W_n$ los **n** sucesos elementales de un experimento aleatorio, todos ellos equiprobables. Si A es la unión de **k** de estos sucesos elementales entonces:

$$p(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$$

EJERCICIOS

2.2-Se tiran tres monedas diferentes al aire. Determinar el espacio muestral y la probabilidad de obtener dos caras

2.3.-Al extraer una carta de la baraja hallar las siguientes probabilidades: A) de obtener una copa B) de obtener un rey C) de obtener una figura D) de obtener una figura de oros E)de obtener un siete ó una espada F) de no obtener bastos G) de no obtener ni bastos ni figuras

2.4.-Al lanzar dos dados ¿Cual es la probabilidad de que la suma de puntos sea 7?

2.5.-Entre 4 tornillos la mitad son defectuosos. Si elegimos dos al azar ¿Cual es la probabilidad de que aparezca al menos uno defectuoso?¿Y si eligiéramos 3?

2.6.-Al extraer dos cartas simultáneamente de la baraja hallar las siguientes probabilidades: A) de obtener dos sotas B) de obtener dos copas C) de que una de las cartas sea figura D) de obtener una copa y un basto

2.7.-En un baile se reúnen diez matrimonios disfrazados. Al elegir dos personas hallar la probabilidad A) de que sean esposos B) de que sean dos mujeres C) de que sea una mujer y un hombre D) de que una por lo menos sea mujer

2.5.- PROBABILIDAD CONDICIONADA

La obtención de información adicional sobre el resultado de un experimento puede modificar la probabilidad de algún suceso.

Por ejemplo: Consideremos el experimento "lanzar un dado" .Consideremos los sucesos A= "salir impar" = {1, 3, 5 } y B="salir > 1"= {2,3,4,5,6} . Según la regla de Laplace p(A)=3/6 y p(B)=5/6

Si al lanzar el dado nos dicen que ha salido impar (es decir, que se ha verificado A) entonces la probabilidad de B queda condicionada por la verificación de A. En efecto, la probabilidad de B sabiendo que se ha verificado A es 2/3 ya que los casos posibles se han reducido a tres (de los cuales 2 son favorables a A).

Al suceso consistente en que se verifique B habiéndose verificado A se le llama **"suceso B condicionado a A"** . Se simboliza por B/A

Observemos en el ejemplo anterior que:

p(B/A)=2/3

p(A)=3/6

$A \cap B = \{3,5\} \Rightarrow p(A \cap B) = 2/6$

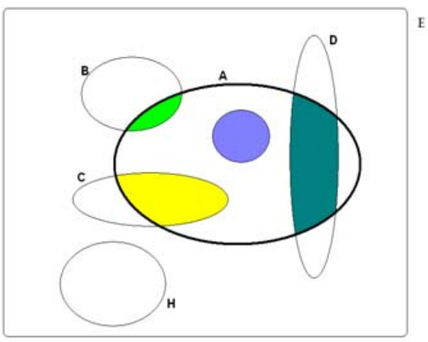
Vemos que se cumple :

$$\frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{2/6}{3/6} = \frac{2}{3} = p(B/A)$$

La anterior igualdad nos lleva a dar la siguiente definición de probabilidad condicionada:

Para cada suceso B se define la probabilidad condicionada p(B/A) ***como el*** *cociente:*

$$p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$



La probabilidad condicionada a A consiste en repartir la unidad de probabilidad de que disponemos dando a cada suceso según su "nivel de participación en A". Por ello los sucesos incompatibles con A tienen nula su probabilidad condicionada a A. Un suceso que contenga a A tiene su probabilidad condicionada a A igual a 1.

2.6.- PROBABILIDAD COMPUESTA

La noción de probabilidad condicionada se puede utilizar para calcular la probabilidad de la intersección a partir de la de uno de ellos y de la del otro condicionada a él (probabilidades que generalmente se puede calcular directamente). En efecto, sean A y B dos sucesos. Si de la fórmula de la probabilidad condicionada despejamos p(A∩B) , obtenemos:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A)$$

Que se llama fórmula de la probabilidad compuesta. Se puede generalizar para un número cualquiera de sucesos. Así para tres sucesos A, B y C tendría la siguiente expresión:

$$p(A \cap B \cap C) = p(A) \cdot p(B/A) \cdot p(C/A \cap B)$$

EJERCICIOS

2.8.-Al extraer sucesivamente 2 cartas de la baraja ¿Cuál es la probabilidad de qué las dos sean copas?
2.9.-Al extraer sucesivamente tres cartas de la baraja ¿Cuál es la probabilidad de que sean 3 ases?
2.10.-En un grupo de 30 hombres y 32 mujeres el 40% de los hombres son fumadores y el 25% de las mujeres. Elegida una persona al azar ¿Cuál es la probabilidad de que sea una mujer no fumadora?

2.7.- SUCESOS INDEPENDIENTES: REGLA DEL PRODUCTO

Si p(B/A) > p(B) entonces el suceso A favorece la probabilidad de B y si p(B/A)< p(B) la perjudica. Si p(B/A)=p(B) entonces la probabilidad de B no se ve influenciada por el hecho de que se le condicione a A. Esto nos lleva a la siguiente definición:

Se dice que A y B son sucesos independientes si p(B/A)=p(B) (ó p(A/B)=p(A))

Si A y B son sucesos independientes entonces la fórmula de la probabilidad compuesta toma la siguiente forma:

$$P(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

Ejemplo

Consideremos el experimento "lanzar un dado" Sea A="salir par" (p(A)=1/2) . Sea B="salir múltiplo de 3" (p(B)=2/6)

Para el suceso B/A ("salir múltiplo de 3 si ha salido par") los casos posibles son 2,4 y 6, de los cuales sólo el 6 es favorable. Luego p(B/A)=1/3=p(B) .Por tanto los sucesos A y B son independientes. Obsérvese que esto es debido a que la proporción de múltiplos de 3 respecto a los resultados pares (6 frente a 2,4 y 6) es la misma que la de múltiplos de 3 respecto a la totalidad de los resultados (3 y 6 frente a 1,2,3,4,5 y 6)

La independencia de sucesos resulta especialmente clara en el caso de experimentos compuestos como el siguiente: Sea el experimento "lanzar una moneda dos veces" Sean los sucesos A="salir cara la primera vez" y B="salir cara la 2ª vez" .Estos sucesos son independientes pues el hecho de que salga cara la 1ª vez no modifica la probabilidad de que salga cara la 2ª. Como aplicación de la regla del producto tenemos que la probabilidad de que salga cara las dos veces es p(A∩B). P(A)·p(B)=(1/2)(1/2)=1/4

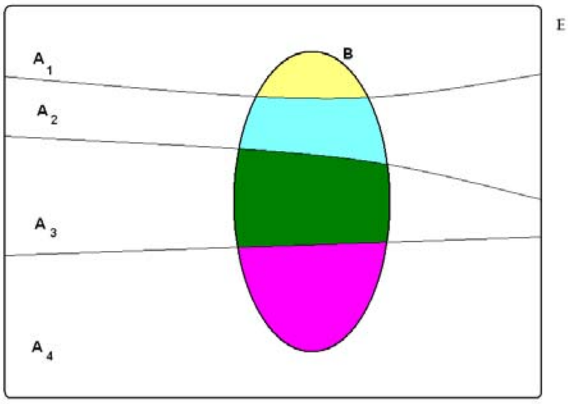
EJERCICIOS

2.11.-Al extraer una carta de la baraja encontrar dos sucesos independientes
2.12.-Se lanza un dado dos veces ¿Cual es la probabilidad de obtener par en la primera tirada e impar en la 2ª?
2.13-Se lanzan dos dados ¿Cual es la probabilidad de obtener par en un dado e impar en el otro?

2.8.- PROBABILIDAD TOTAL

Sean A_1 ,A_2 ,.......,A_n sucesos incompatibles dos a dos tales que su unión es $\mathbb{E}$. Para cualquier suceso B se verifica:

$$p(B) = p(A_1) \cdot p(B/A_1) + p(A_2) \cdot p(B/A_2) + \cdots + p(A_n) \cdot p(B/A_n)$$



Ejemplo

En una clase de 40 alumnos hay 10 que aprueban todas las asignaturas ,al 70% de los cuales les gustan las Matemáticas. Hay 15 que suspenden una ó dos asignaturas , al 50% de los cuales les gustan las Matemáticas. Finalmente hay 15 alumnos que suspenden más de dos asignaturas , al 20% de los cuales les gustan las Matemáticas. Se elige al azar un alumno de esta clase ¿Cual es la probabilidad de que le gusten las Matemáticas?

A_1="aprobar todo" $\Rightarrow p(A_1)=10/40$

A_2="suspender 1 ó 2" $\Rightarrow p(A_2)=15/40$

A_3="suspender más de 2" $\Rightarrow p(A_3)=15/40$

Si llamamos B="gustar las Matemáticas" tendremos que $p(B/A_1)= 70/100$, $p(B/A_2)= 50/100$ y $p(B/A_3)= 70/100$ y entonces según la probabilidad total:

$$p(B) = p(A_1)\cdot p(B/A_1) + p(A2)\cdot p(B/A_2) + p(A_3)\cdot p(B/A_3) =$$
$$= \frac{10}{40}\frac{70}{100} + \frac{15}{40}\frac{50}{100} + \frac{15}{40}\frac{20}{100} = 0.4375$$

2.9.- LA REGLA DE BAYES

La regla de Bayes sirve para calcular probabilidades a posteriori, es decir, para resolver los problemas del tipo: "Si un resultado B puede ser producido por varias causas incompatibles hallar la probabilidad de que ocurra debido a una de esas causas"

Consideremos el ejemplo de la pregunta anterior: Supongamos que sabemos que al alumno elegido le gustan las matemáticas.Podemos entonces preguntarnos si este alumno ha aprobado todas las asignaturas. A esto da respuesta el teorema de Bayes:

Sean A_1 ,A_2 ,.......,A_n sucesos incompatibles dos a dos tales que su unión es E .Se verifica:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + \dots\dots\dots + P(A_n)P(B/A_n)}$$

Ejemplo

Vamos a responder a la pregunta planteada previamente. Habremos de calcular cual es la probabilidad de que el alumno elegido haya aprobado todas las asignaturas sabiendo que le gustan las Matemáticas. Esta probabilidad es $p(A_1/B)$ que aplicando la Regla de Bayes es:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_1)P(B/A_1)}{P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + P(A_3)P(B/A_3)} = \frac{\frac{10}{40}\frac{70}{100}}{\frac{10}{40}\frac{70}{100} + \frac{15}{40}\frac{50}{100} + \frac{15}{40}\frac{20}{100}} = 0.4$$

EJERCICIOS

2.14.-María y Laura idean el siguiente juego: cada una lanza un dado, si en los dos dados sale el mismo número, gana Laura; si la suma de ambos es 7 gana María; y en cualquier otro caso hay empate.

a) Calcular la probabilidad de que gane Laura.
b) Calcular la probabilidad de que gane María.

2.15-Dados dos sucesos aleatorios A y B, se sabe que: $p(\overline{B}) = 3/4$ y $p(A) = p(A/B) = 1/3$

a) Razonar si los sucesos A y B son independientes.
b)Calcular $P(A \cup B)$.

2.16.- Las probabilidades de aprobar los exámenes de Historia, Lengua e Inglés son, para un alumno determinado: 2/3, 4/5 y 3/5 respectivamente. Obtener las probabilidades de:
1. Suspender las tres asignaturas.
2. Suspender solo una de las tres.
3. Suspender Lengua si se sabe que solo suspendió una asignatura de las tres

2.17.-En una determinada asignatura hay matriculados 2500 alumnos. En Junio se presentaron 1800 de los que aprobaron 1015, mientras que en septiembre, de los 700 que se presentaron, suspendieron 270. Elegido al al azar un alumno matriculado en esa asignatura,
a) Calcular la probabilidad de que la haya aprobado.
b) Si ha aprobado la asignatura, cuál es la probabilidad de haberse presentado en Septiembre.

2.18.-En un centro de Secundaria, aprueban Biología 4 de cada 5 alumnos, las matemáticas las aprueban 2 de cada 3 alumnos y 3 de cada 5 alumnos aprueban la Lengua. Elegido al azar un alumno matriculado de esas asignaturas en ese centro, calcula la probabilidad de que:
1. Suspenda esas tres asignaturas.
2. Suspenda solo una de ellas.

2.19.-El 20% de los habitantes de una determinada población son jubilados y otro 20% son estudiantes. La música clásica le gusta al 75% de los jubilados, al 50% de los estudiantes y al 20% del resto de la población. Calcula la probabilidad de que elegida al azar una persona a la que le gusta la música clásica sea jubilada.

2.20.-El 60% de las personas que visitaron un museo durante el mes de mayo eran españoles. De estos, el 40% eran menores de 20 años. En cambio, de los que no eran españoles, tenían menos de 20 años el 30%. Calcular:
a). La probabilidad de que un visitante elegido al azar tenga menos de 20 años.
b) Si se escoge un visitante al azar, !a probabilidad de que no sea español y tenga 20 años o más.

2.21.-Las máquinas A y B producen 50 y 250 piezas por hora, con un porcentaje de fallos del 1% y del 10% respectivamente. Tenemos mezcladas las piezas fabricadas en una hora y elegimos una pieza al azar. Calcular:
a)La probabilidad de que sea una pieza defectuosa fabricada en la máquina A
b)La probabilidad de que esté fabricada en la máquina A si sabemos que es defectuosa

2.22.- En el segundo curso de bachillerato de cierto instituto se han matriculado el doble mujeres que de varones. Sabiendo que un 25% de las mujeres fuman y que no lo hacen un 40% de los varones, determinar la probabilidad de que seleccionada al azar una persona en el segundo curso de bachillerato de ese instituto resulte ser una persona fumadora. Justificar la respuesta

2.23.-Una urna A contiene 5 bolas blancas y 4 negras, y otra urna B contiene 1 blanca y 2 negras. Se extrae una bola al azar de la urna A y se pone en la B. Después se extrae de la urna B una bola al azar.
a) Calcular la probabilidad de que la bola extraída de la urna B sea blanca.
b) Suponiendo que la bola extraída de la urna B ha sido blanca, calcular la probabilidad de que la bola extraída de la urna A también haya sido blanca

2.24.-Dos parejas de novios deciden ir al cine. Si se sientan al azar en cuatro butacas contiguas, ¿cuál es la probabilidad de que cada uno esté al lado de su pareja?

2.25.-Dos expertos, E1 y E2 realizan peritaciones para una cierta compañía de seguros. La probabilidad de que una peritación haya sido realizada por E1 es 0,55 y por E2 es 0.45. Si una peritación ha sido realizada por E1 la probabilidad de que de lugar al pago de una indemnización es 0.98 y si ha sido realizada por E2 la probabilidad de que dé lugar al pago de una indemnización es 0,90. Un siniestro ha supuesto a la compañía el pago de una indemnización. Hallar la probabilidad de que la peritación haya sido realizada por E2

2.26.-En una empresa se producen dos tipos de bombillas: halógenas y de bajo consumo, en una proporción de 3 a 4, respectivamente. La probabilidad de que una bombilla halógena sea defectuosa es 0,02 y de que una de bajo consumo sea defectuosa es 0,09. Se escoge al azar una bombilla y resulta defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que sea halógena?

2.27.-Un ordenador personal está contaminado por un virus y tiene cargados dos programas antivirus que actúan independientemente uno del otro. El programa p1 detecta la presencia del virus con una probabilidad de 0,9 y el programa p2 detecta el virus con una probabilidad de 0,8. ¿Cuál es la probabilidad de que el virus no sea detectado?

2.28.-En un colegio el 4% de los chicos y el 1 % de las chicas miden más de 175 cm de estatura. Además el 60% de los estudiantes son chicas. Si se selecciona al azar un estudiante y es más alto de 175 cm, ¿cuál es la probabilidad de que el estudiante sea chica?

2.29.-La probabilidad de que un estudiante universitario termine su carrera en los años establecidos por el plan de estudios es 3/5 y la de que su hermana finalice la suya sin perder ningún año es 2/3. Halla la probabilidad de que:
a)Ambos terminen sus estudios en los años establecidos
b) Solo el varón los termine en el plazo fijado
c) Al menos uno de los dos los termine en el tiempo establecido.

2.30.-En un grupo de personas, al 50% les han puesto alguna vez una multa de tráfico. Por otro lado, al 12,5% no les han puesto nunca una multa pero sí han sufrido alguna vez un accidente. Finalmente, al 60% de quienes nunca han tenido un accidente no les han puesto nunca una multa.
a) ¿Qué porcentaje no han tenido nunca un accidente ni les han puesto nunca una multa?
b) ¿Qué porcentaje no han tenido nunca un accidente?
c) Entre las personas que nunca han tenido una multa, ¿qué porcentaje no han tenido nunca un accidente?

2.31.-En la urna U1 hay 4 bolas blancas, numeradas de 1 a 4, y 2 bolas negras numeradas de 1 a 2. mientras que en la urna U2, hay 2 bolas blancas numeradas de 1 a 2 y 4 bolas negras numeradas de 1 a 4. Si se extraen al azar dos bolas, una de cada urna, hallar:
a) La probabilidad de que tengan el mismo número.
b) La probabilidad de que sean del mismo color.

2.32.-Para ir al trabajo un individuo toma el bus el 30% de las veces, o el metro (el 70% restante) y llega tarde el 40% de las veces que va en bus y e! 20% de las que va en metro. Cierto día llegó larde. ¿Cuál es la probabilidad de que tomara el bus?

2.33. -El 60% de los hombres son fumadores y el 30% de las mujeres .En una reunión hay 30 hombres y 20 mujeres. Si elegimos una persona al azar ¿Cual es la probabilidad de que sea fumadora?

2.34.-Para ir a su trabajo una persona sigue un itinerario A el 50% de los dias, un itinerario B el 40% y un itinerario C el 10%. Por el A suele llegar a tiempo el 95% de las veces, por el B el 80% y por el C el 30% . Un dia cualquiera ¿Cual es la probabilidad de que llegue a tiempo al trabajo?

2.35.-De una urna que contiene 10 bolas blancas y 20 negras se extraen dos bolas que se colocan en una segunda urna que ya contiene 8 blancas y seis negras y a continuación se extrae una bola de esta segunda urna ¿Cual es la probabilidad de que sea negra?

2.36.-Una urna contiene 4 bolas rojas, 2 negras y 3 amarillas. .Al sacar tres bolas al azar ¿Cual es la probabilidad de que al menos dos sean rojas?

2.37.-Pedro y Juan están en una reunión con otras 8 personas. Entre los presentes se reparten al azar números del 1 al 10 ¿Cuál es la probabilidad de que Pedro y Juan tengan números consecutivos?

2.38.-Se lanzan al aire 4 dados ¿Cual es la probabilidad de obtener más de 5 puntos en total?

2.39.-Al sacar tres cartas de una baraja hallar la probabilidad de que sean un as, un rey y una sota

2.40.-Una pieza de artillería dispone de 4 obuses para alcanzar un objetivo En cada disparo la probabilidad de alcanzarlo es 1/3 .¿Cual es la probabilidad de fallar los cuatro? ¿Y de fallar exactamente 2?

2.41.-Una bolsa contiene 20 bolas numeradas de 1 a 20 .Se extraen sucesivamente dos bolas. Se pide A)Probabilidad de que las dos bolas extraidas tengan número impar si se introduce la bola en la bolsa después de la primera extracción. B)Probabilidad de que la 1ª sea par y la 2ª impar , sin reemplazamiento

2.42.-Se distribuyen 4 bolas entre tres cajas sin dejar ninguna vacía.¿Cual es la probabilidad de que la primera caja tenga 2 bolas?

2.43.-El 30% de las piezas fabricadas por una máquina son defectuosas.¿Cual es la probabilidad de que al elegir 4 piezas al azar, haya al menos dos defectuosas?

2.44.-La probabilidad de que un alumno apruebe matemáticas es 0,6 , la de que apruebe lengua es 0,7 y de que apruebe las dos es 0,3 .Hallar A)La probabilidad de que apruebe al menos una. B)De que no apruebe ninguna. C)De que apruebe matemáticas y suspenda lengua

2.45.-Un dado está "cargado" de forma que al lanzarlo la probabilidad de obtener un número es proporcional a dicho número. Hallar la probabilidad de que al lanzarlo se obtenga un número par.

2.46.-Una enciclopedia consta de 8 tomos, uno de los cuales se titula "Matemáticas" .Calcular la probabilidad de que al elegir dos tomos al azar, uno de ellos sea el tomo "Matemáticas"

2.47.-Una urna contiene dos bolas , que pueden ser blancas , negras ó una blanca y una negra. Se añade una bola blanca a la bolsa y después se extrae una bola al azar.¿Cual es la probabilidad de que sea blanca?

2.48.-Un artículo es producido en 2 fábricas X e Y que producen el 60% y 40% respectivamente.La fábrica X produce un 1% de artículos defectuosos y la Y un 5% . Al comprar un articulo ¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuoso ?

2.49. -Un alumno sabe 8 de las 10 preguntas que entran para un examen. Si en el examen le ponen 3 preguntas ¿Que probabilidad tiene de aprobar si para ello tiene que A) contestar bien las tres preguntas B) contestar por lo menos dos bien

2.50. -¿Cual es la probabilidad de que al extraer cuatro cartas de la baraja , 2 sean ases?

2.51. -Se lanza una moneda cuatro veces consecutivas ¿Cual es la probabilidad de que se obtenga por lo menos una cara? ¿Y de que salgan todas caras ó todas cruces?

2.52.- A un alumno lo lleva en coche a la facultad un amigo el 80% de los días. Cuando lo lleva el amigo llega tarde el 20% de las veces. Cuando el amigo no lo lleva llega temprano a clase el 10% de las veces. Determinar

a)La probabilidad de que llegue pronto a clase y le haya llevado el amigo
b)La probabilidad de que llegue tarde a clase
c)Ha llegado pronto a clase ¿ Cuál es la probabilidad de que no le haya llevado el amigo?

2.53.-Juan es el responsable de un aula de informática y no se puede confiar en él pues la probabilidad de que olvide hacer el mantenimiento de un ordenador en ausencia del jefe es 2/3. Si Juan le hace el mantenimiento a un ordenador, éste tiene la misma probabilidad de estropearse que de funcionar correctamente, pero si no le hace el mantenimiento solo hay una probabilidad de 0.25 de funcionar correctamente. . ¿Cuál es la probabilidad de que un ordenador funcione correctamente a la vuelta del jefe?. A su regreso, el jefe se encuentra un ordenador averiado ¿Cuál es la probabilidad de que Juan no le hiciera el mantenimiento?

TEMA 3: POBLACIÓN Y MUESTRA

3.1.-POBLACIÓN Y MUESTRA

POBLACIÓN O UNIVERSO: es el conjunto de todos los individuos que tienen en común un carácter del que queremos hacer un estudio.

MUESTRA: es un subconjunto extraido de la población, cuyo estudio va a servir para deducir las características de toda la población. Al número de elementos de la muestra se le llama tamaño muestral.

3.2.-MUESTREO

¿Por qué se recurre a las muestras?

-Población excesivamente numerosa
-Población muy dificil o imposible de controlar
-Proceso de medición destructivo
-Necesidad de conocer rápidamente ciertos datos de la población

¿Cómo deben ser las muestras?

Hay dos aspectos a los que se debe prestar atención:

Su tamaño:

Si es demasiado pequeño las conclusiones acerca de la población pueden ser incorrectas. Por el contrario una muestra muy grande puede resultar muy costosa y difícil de manejar

Su forma de elección:

Es lo que se llama el muestreo. Ha de realizarse de forma que sea representativa de la población. Para ello es indispensable que sea aleatorio, es decir, que todos sus elementos se elijan al azar de modo que todos los individuos de la población tengan a priori la misma probabilidad de ser elegidos

¿Cuáles son los principales tipos de muestreo?

Muestreo aleatorio simple:

Es el más sencillo. Se numeran los elementos de la población y se seleccionan al azar los n elementos que debe contener la muestra

Muestreo aleatorio estratificado:

Si la población puede dividirse en estratos , se elige la muestra fijando de antemano el número de individuos de cada estrato. Cuando estos números son proporcionales a los tamaños de los estratos se dice que el muestreo es estratificado con reparto proporcional

3.3.-PARÁMETROS Y ESTADÍSTICOS

Parámetros de una población ó parámetros:

Media μ: indica el "centro" de la población
Varianza σ^2 : indica en que grado está dispersa la población en torno a la media
Desviación típica σ

Estadísticos muestrales ó estadísticos:

Media $\overline{X}$: indica el "centro" de la muestra
Varianza S^2 : indica el grado de dispersión de la muestra respecto a la media
Cuasivarianza $S_{n-1}^2 = \frac{n}{n-1} S^2$
Desviación típica S

3.4.-VARIABLE ALEATORIA

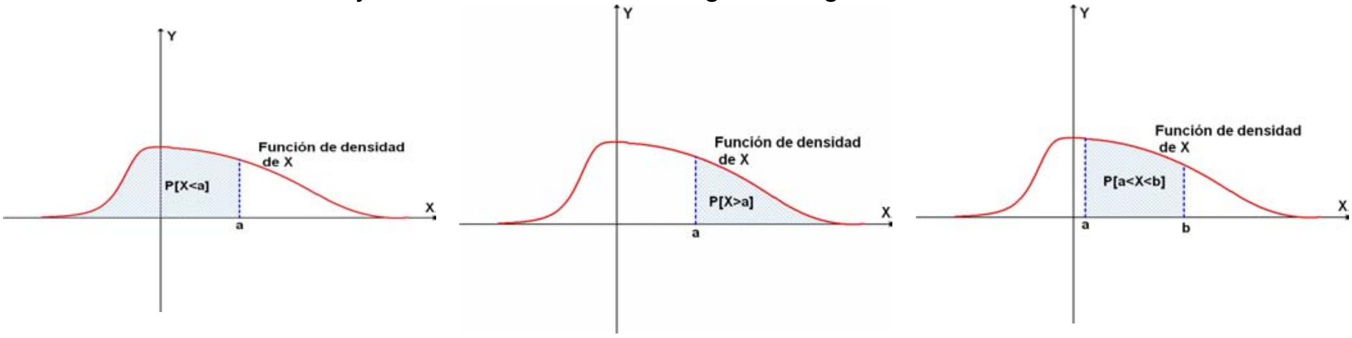
Una variable aleatoria es una variable X que puede tomar cualquiera de los valores numéricos asociados al carácter que estudiamos en la población. Puede ser :

-Continua: si toma cualquier valor en un intervalo

- Discreta: si solo toma valores enteros

3.5.-VARIABLE ALEATORIA NORMAL

Función de densidad de una variable aleatoria continua: es una función a partir de cuya gráfica se calculan las probabilidades (como área por debajo de la gráfica) de que la variable aleatoria tome determinados valores tal y como se muestra en la siguiente figura:

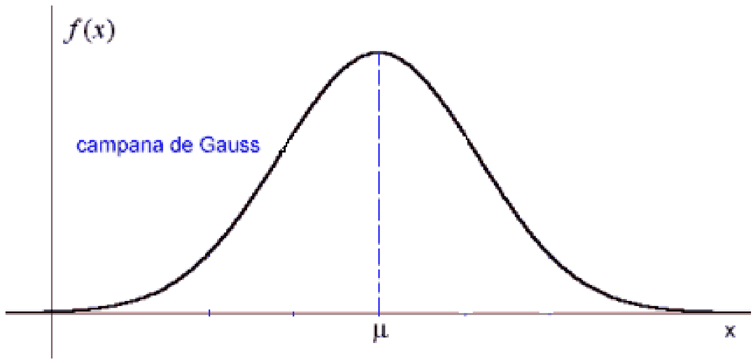


Variable aleatoria normal

Una variable aleatoria X continua se dice que es normal (o que tiene una distribución normal) de media μ y desviación típica σ , si su función de densidad es la curva normal (o campana de Gauss) que describimos a continuación:

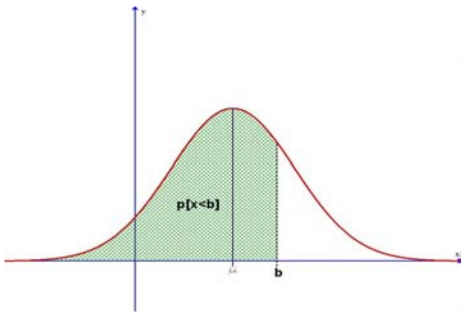
Curva normal o campana de Gauss:

Es la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ que vemos a continuación:



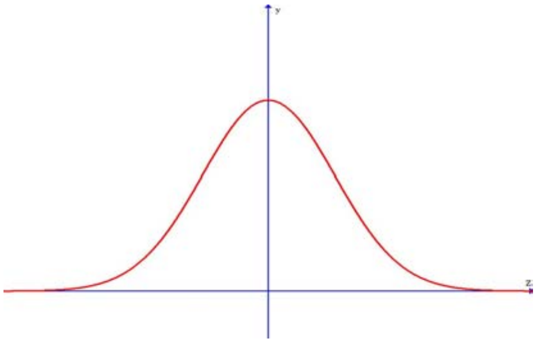
Esta curva es simétrica respecto de la recta vertical x=μ y el área que limita con el eje OX mide 1 u^2 (como en toda función de densidad)

Que X es normal de media μ y desviación típica σ se expresa escribiendo $X \in N(\mu ; \sigma)$. En este caso la probabilidad **p[X<b]** es lo que mide el area limitada por la curva normal con OX hasta x=b , tal y como se muestra en la siguiente figura



Variable normal tipificada:

Se llama así a la variable normal de media $\mu=0$ y desviación típica $\sigma=1$, es decir la variable N(0; 1) Se designa con la letra Z .Su curva normal es la siguiente:

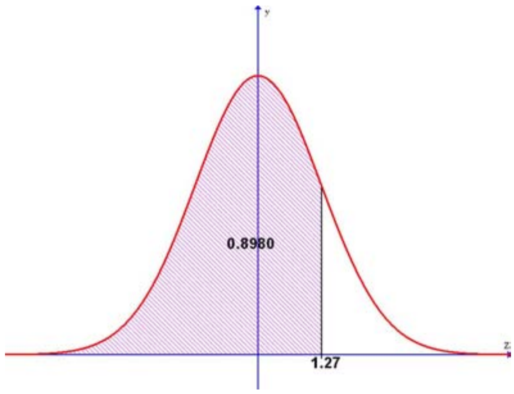


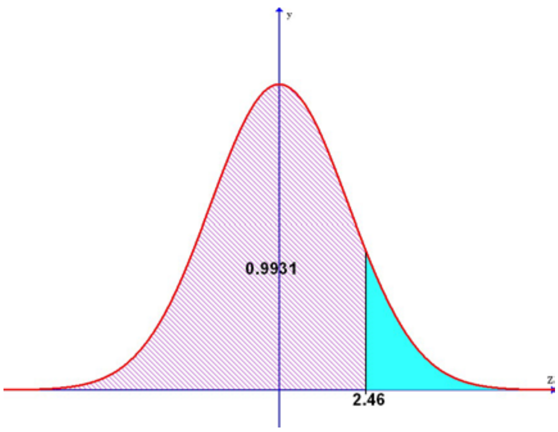
que es simétrica respecto del eje OY. Las áreas por debajo de esta curva están tabuladas (ver página 110)

3.6.-CALCULO DE AREAS BAJO LA CURVA NORMAL TIPIFICADA

Caso 1

P[Z<1,27] = (tabla)= 0,8980





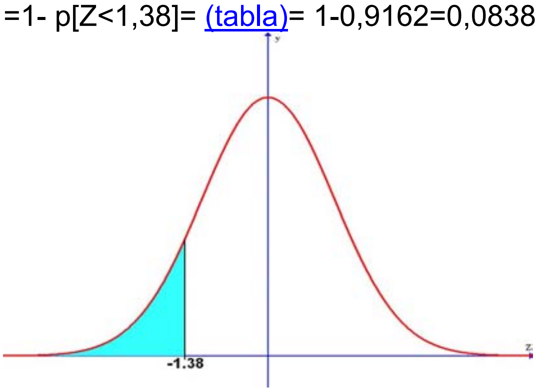
Caso 2

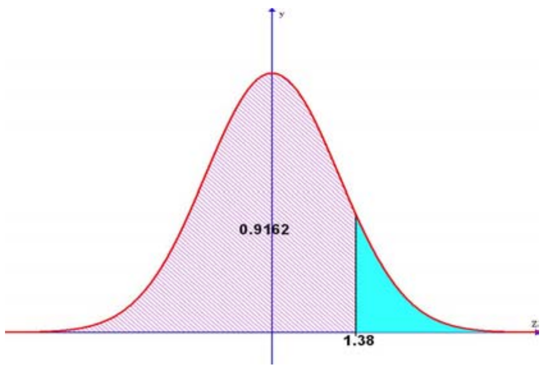
P[Z>2,46] = 1- p[Z<2,46] = (tabla)= 1-0,9931=0,0069

Caso 3

P[Z<-1,38] = p[Z>1,38] =

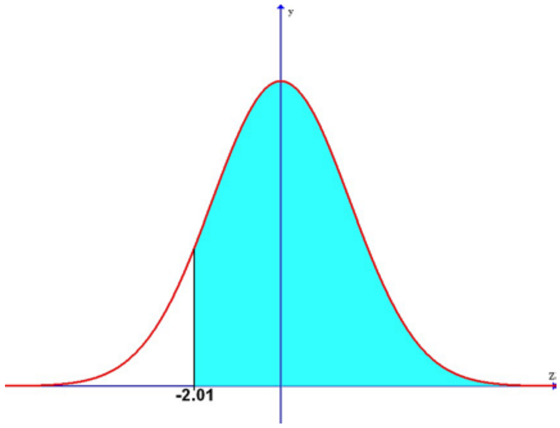
=1- p[Z<1,38]= (tabla)= 1-0,9162=0,0838

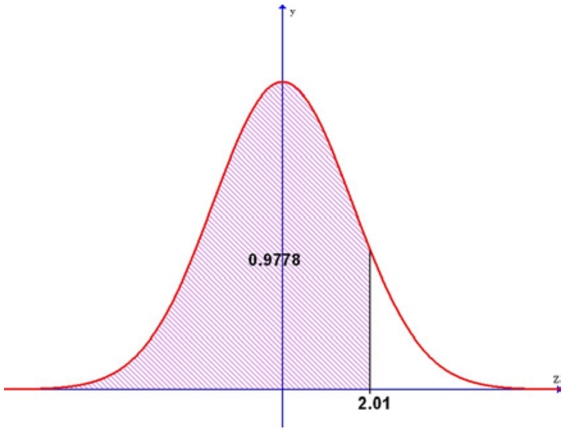




Caso 4

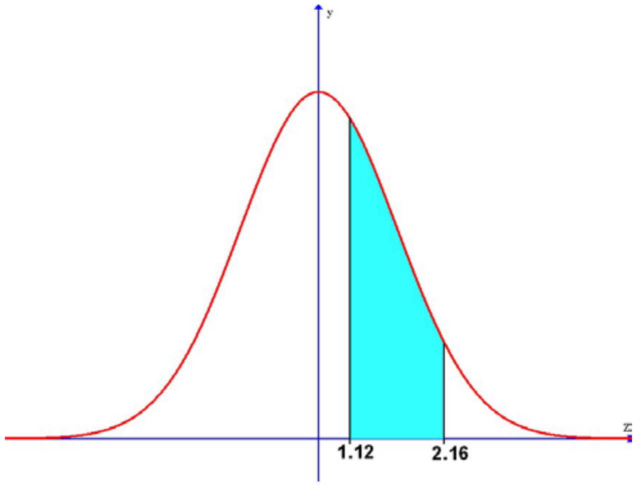
P[Z>-2,01] = p[Z<2,01] = (tabla)= 0,9778

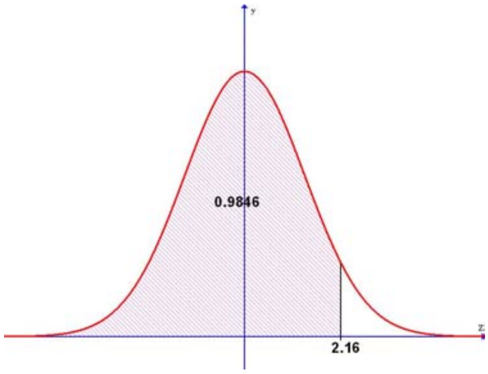


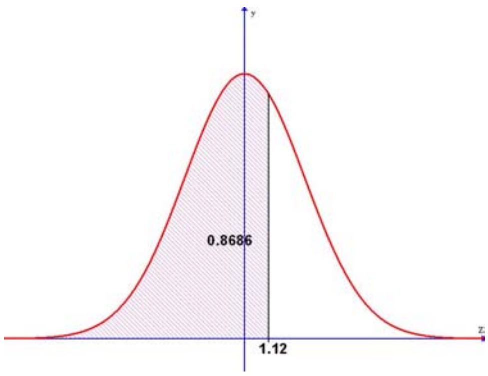


Caso 5

P[1,12<Z<2,16] = p[Z<2,16] - p[Z<1,12]
= (tabla)= 0,9846- 0,8686 =0,1160

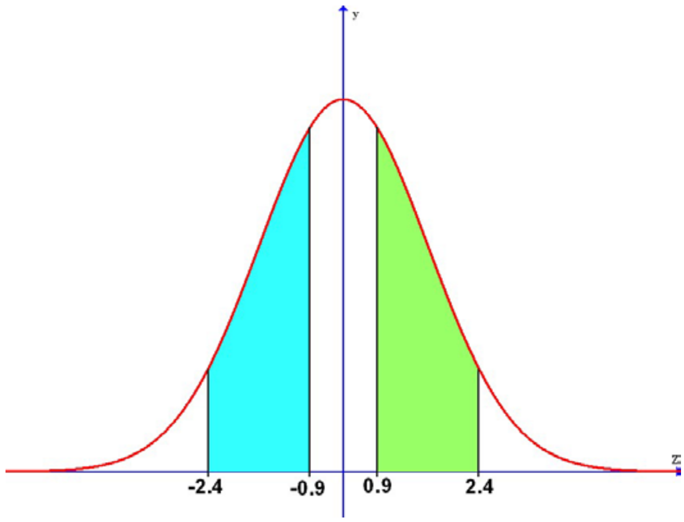






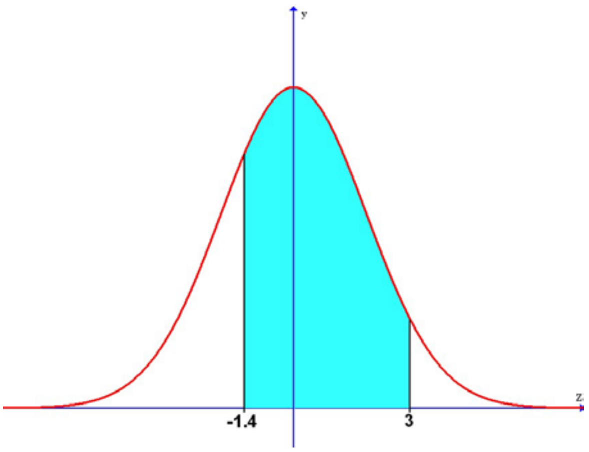
Caso 6

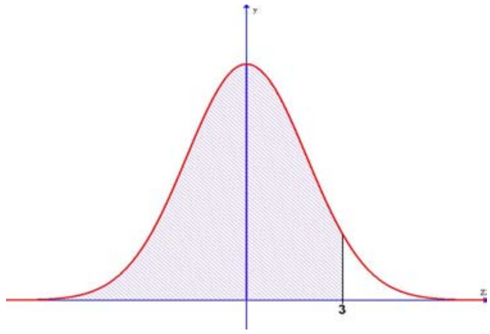
P[-2,4<Z<-0,9] = P[0,9<Z<2,4] =
(caso anterior) P[Z<2,4]- P[Z<0,9] =
(tabla)= 0,9918- 0,8159 =0,1759

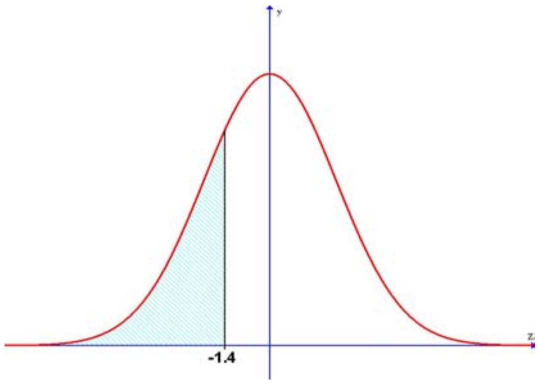


Caso 7

P[-1,4<Z<3] = P[Z<3] - P[Z<-1,4] = (tabla) 0,9987- {1-P[Z<1,4]} (caso3) = 0,9987- {1- (tabla) 0,9192} =0,9987+0,9192 -1=0,9179







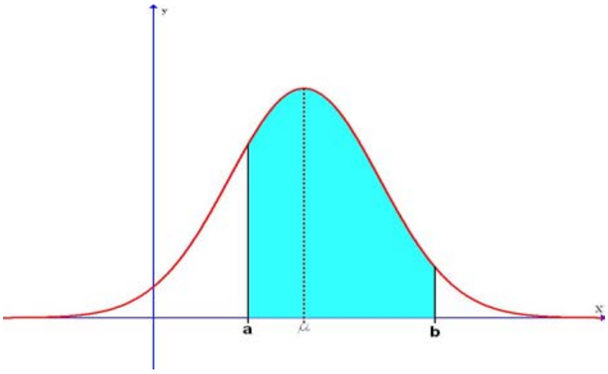
3.7.-CALCULO DE AREAS BAJO UNA CURVA NORMAL N(μ ; σ)

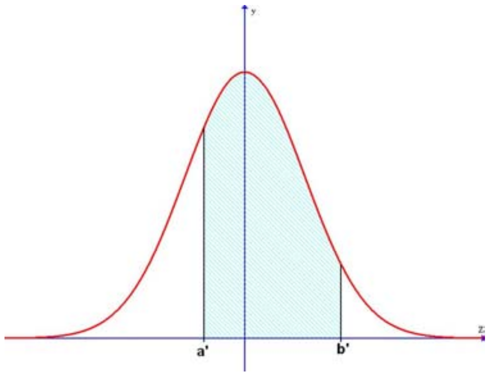
Si X es una variable con una distribución N(μ ; σ) entonces

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\sigma}}$$

tiene una distribución N(0 ;1) , es decir, es la variable normal tipificada

Entonces: **P[a<X<b] = P[a´<Z< b´]**





teniendo en cuenta que:

$$X = a \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{a-\mu}{\sigma} = a'$$

$$X = b \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{b-\mu}{\sigma} = b'$$

EJERCICIOS

3.1.-Si X sigue una distribución N(2,1 ; 1,6)

a) hallar las siguientes probabilidades p[X>1,3] , p[1<X<4]

b) Si p[2,3<X<k]=0,3212 ¿Cuánto vale k?

3.2.-Calcula k para que p[-k<Z<k] valga a) 0.9 ,b) 0.95 , c) 0.99

3.8.-VARIABLE ALEATORIA BINOMIAL

Consideremos el siguiente experimento aleatorio,llamado “Proceso de Bernouilli” consistente en realizar N pruebas (ó ensayos) de un experimento con las siguientes características:

a)En cada prueba solo se consideran dos resultados posibles: uno que llamaremos éxito y su contrario que llamaremos fracaso

b)Los N ensayos son independientes, es decir, que el resultado de un ensayo no influye en el resultado del siguiente. En consecuenciala probabilidad del éxito y del fracaso se mantienen constantes en todo el proceso. Llamaremos **p** y **q**=1-p a sus respectivas probabilidades.

Considerenos la variable aleatoria X = número de éxitos obtenidos en los N ensayos .Esta variable se llama **variable binomial** y los valores que puede tomar son : 0,1,2,……,N.
La probabilidad de obtener r éxitos , es decir, la probabilidad de que X=r viene dada por:

$$P[X=r]=\binom{N}{r}p^r q^{N-r}$$

Ejemplo

Lanzamos un dado 4 veces ¿Cuál es la probabilidad de que salga un 6 tres veces?. Consideramos un éxito obtener un 6 y un fracaso no sacar un 6.
Probabilidad del éxito: p= 1/6
Probabilidad del fracaso: q=1- (1/6)= 5/6
Variable binomial X= nº de éxitos

Nos piden la probabilidad de obtener 4 éxitos : $P[X=4]=\binom{4}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1 \cong 0.015$

Aproximación de la binomial mediante la normal

Cuando N es un número grande resulta engorroso el cálculo de la expresión $P[X=r]=\binom{N}{r}p^r q^{N-r}$. Una propiedad importante de la distribución normal es que puede utilizarse para el cálculo de probabilidades de una binomial. En efecto si Np≥5 y Nq≥5 entonces la distribución binomial es de forma muy aproximada igual due una distribución $\mathbf{N}(Np;\sqrt{Npq})$.
Para utilizar esta aproximación se ha de tener en cuenta que el suceso X=r de la binomial se considera equivalente al suceso $r-\frac{1}{2}\le X\le r+\frac{1}{2}$ de la normal

Ejemplo

Supongamos que una máquina produce un 25% de piezas defectuosas. Si se toma una muestra de 100 piezas ¿Cuál es la probabilidad de que contenga 6 defectuosas? ¿Y de que contenga un máximo de 6?
Estamos ante una variable binomial con N=100 , p=0.25 y q=0.75 y las probabilidades buscadas son:

$$P[X=6]=\binom{100}{6}0.25^6\cdot 0.75^{94} \quad \text{y} \quad P[X\le 6]=P[X=0]+P[X=1]+\ldots\ldots+P[X=6]=\ldots\ldots$$

Como Np=25 y Nq=75 resulta que la binomial es prácticamente igual a la normal
$\mathbf{N}(Np;\sqrt{Npq})=(25;4.3)$ con lo que para hallar las anteriores probabilidades haremos
$P[X_B=6]=P[5.5\le X_N\le 6.5]$ (tipificar y usar las tablas)
$P[X_B\le 6]=P[X_N\le 6.5]$ (tipificar y usar las tablas)

EJERCICIOS

3.3.-Se lanzan un dado 6 veces ¿Cual es la probabilidad de obtener 4 veces un múltiplo de 3?

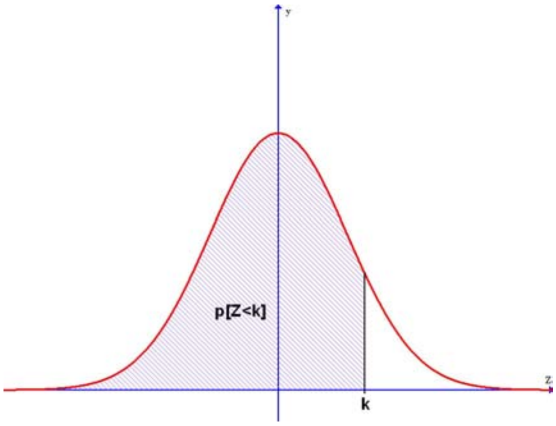
3.4.-Una pieza de artillería dispone de 10 obuses para alcanzar un objetivo En cada disparo la probabilidad de alcanzarlo es 3/4 .¿Cual es la probabilidad de fallar los 10?

3.5.-El 30% de las piezas fabricadas por una máquina son defectuosas.¿Cual es la probabilidad de que en una caja que coniene 100 piezas haya a lo sumo 6 defectuosas?

3.6.-Se extrae una carta de la baraja 12 veces devolviéndola de cada vez ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos la mitad de las veces salga una figura?

3.7.-Se lanza una moneda 10000 veces consecutivas ¿Cual es la probabilidad de que se obtenga cara entre 4980 y 5050 veces?

TABLA DE DISTRIBUCIÓN NORMAL TIPIFICADA N(0,1)



K=

	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0,1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0,2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0,3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0,4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0,5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0,6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0,7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0,8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8079	0.8105	0.8133
0,9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1,0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1,1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1,2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1,3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1,4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1,5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1,6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1,7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1,8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1,9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2,0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2,1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2,2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2,3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2,4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2,5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2,6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2,7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2,8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2,9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3,0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

TEMA 4: DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DE LA MEDIA MUESTRAL
TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE

4.1.-DISTRIBUCIÓN DE LAS MEDIAS MUESTRALES

Consideremos una variable aleatoria **X**. Cada muestra de tamaño **n** que podemos tomar de la población nos proporciona un valor para la media . Estos son los valores que puede tomar la variable aleatoria $\overline{X}$ (media muestral). Acerca de su distribución consideraremos dos resultados:

Si la variable **X** es normal con media **μ** y desviación típica **σ** entonces la variable media muestral $\overline{X}$ también es normal con la misma media **μ** y con desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Es decir: $\mathbf{X} \in \mathbf{N}(\mu;\sigma) \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathbf{X}} \in \mathbf{N}\left(\mu;\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

El otro resultado se conoce como teorema central del límite

4.2.-TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE

Si la variable **X** sigue una distribución de probabilidad cualquiera (normal o no) con media **μ** y desviación típica **σ** y se toman muestras de tamaño **n>30** , entonces la variable media muestral $\overline{X}$ es aproximadamente normal con la misma media **μ** y con desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Es decir : Si **X** tiene media **μ** y desviación típica **σ** y **n>30** entonces

$$\overline{\mathbf{X}} \in \mathbf{N}\left(\mu;\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

4.3.-DISTRIBUCIÓN DE LA PROPORCIÓN

Además de la media, existen otros parámetros de uso frecuente. Tal es el caso de la proporción de individuos de una población que presentan una determinada característica.

Consideremos una población en la que la proporción de individuos que presentan una determinada característica es **p** (y **q=1-p** la proporción de los que no la presentan) . En cada muestra de tamaño **n** habrá una proporción $\hat{p}$ de individuos con esa característica . Si n>30 (ó np y nq=n(1-p) son ambas ≥5) entonces $\hat{p}$ es normal de media **p** y desviación típica $\sqrt{\frac{pq}{n}}$

Es decir : Si n>30 (ó np y nq=n(1-p) son ≥5) entonces $\hat{p} \in \mathbf{N}(p;\sqrt{\frac{pq}{n}})$

EJERCICIOS

4.1.-El peso X , en Kgs, del alumnado de un instituto sigue una distribución N(58;8) . Los alumnos están distribuidos en 20 aulas. Se toma una muestra eligiendo al azar un alumno de cada aula. Hallar la probabilidad de que la media de los pesos de esos alumnos esté comprendida entre 60 y 65 Kgs

4.2.- Las bolsas de azúcar envasadas por una cierta máquina tiene una media de 500 grs con una desviación típica de 35 grs. Las bolsas se empaquetan en cajas de 100 unidades. Hallar la probabilidad de que la media de los pesos de las bolsas de una caja sea menor que 495 grs.

4.3.-En un centro de enseñanza se ha determinado que el 20% de los alumnos no tienen hremanos. En una excursión participan 50 alumnos de ese centro ¿Cuál es la probabilidad de más del 30% de esos alumnos no tengan hermanos?

TEMA 5: ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS

5.1.-ESTIMACIÓN PUNTUAL

Cuando desconocemos un parámetro de la población , tomamos una muestra de tamaño n y calculamos el estadístico correspondiente que será una estimación puntual del parámetro de la población.

Así la media muestral $\overline{\mathbf{X}}$ sirve para estimar la media poblacional **μ.** La desviación típica muestral **S** sirve para estimar la desviación típica poblacional **σ.**

Pero la estimación puntual sirve de poco si no conocemos el grado de aproximación entre el estadístico y el parámetro que estima.

Por este motivo se procede a la estimación por intervalos

5.2.-ESTIMACIÓN POR INTERVALOS

A partir de una muestra de tamaño n podemos estimar el valor de un parámetro de la población del siguiente modo:

1.-Dando un intervalo dentro del cual confiamos que esté el parámetro . Se llama intervalo de confianza

2.-Hallando la probabilidad de que tal cosa ocurra. A dicha probabilidad de le llama nivel de confianza

El nivel de confianza se designa por 1-**α** (a **α** se le llama nivel de significación)

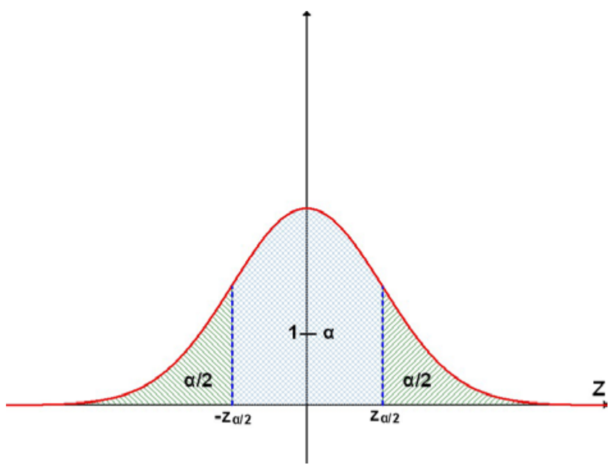
En este curso solo haremos estimaciones de la media poblacional y de la proporción. Conseguiremos mayor eficacia en la estimación aumentando el tamaño de la muestra. Esta mayor eficacia se manifiesta de dos formas:

a) Disminuyendo el intervalo de confianza (obviamente cuanto más pequeño sea el intervalo más precisos estamos siendo)
b) Aumentando el nivel de confianza (obviamente a mayor nivel de confianza más seguridad en la estimación)

5.3.-INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA MEDIA

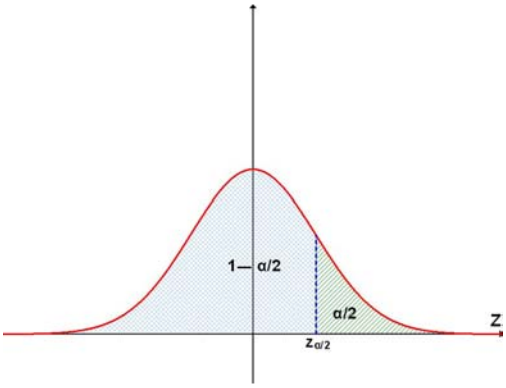
Se desea estimar la media **μ** de una población cuya desviación típica **σ** es conocida . Para ello se recurre a una muestra de tamaño **n** en la cual se obtiene una media muestral $\overline{\mathbf{x}}$.

Fijamos un nivel de confianza 1-**α** (los niveles más usuales son 0.90=90% , 0.95=95% , 0.99=99%). Por $z_{\alpha/2}$ designamos el valor de la variable normal tipificada Z que cumple que $P\left[-z_{\alpha/2} \le Z \le z_{\alpha/2}\right] = 1-\alpha$ tal y como se indica en la siguiente figura:



EJERCICIOS

5.1.-Utiliza la siguiente figura



Para comprobar que los valores de $z_{\alpha/2}$ para los niveles de confianza más usuales son los siguientes:

1-α	$z_{\alpha/2}$
0.90=90%	1.645
0.95=95%	1.960
0.99=99%	2.575

Si la población de partida es normal (o si el tamaño de la muestra es **n>30**), entonces

$$\overline{X} \in N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

y el intervalo de confianza de **μ** con un nivel de confianza del 1-**α** es

$$I = \left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Este es el intervalo que contiene la media poblacional **μ** para el el (1-**α**)·100% de las muestras

El valor $E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ se llama **error máximo admisible** . Evidentemente depende de :

-El tamaño muestral **n**: de manera que cuanto mayor es el tamaño muestral , más pequeño es el error E y el intervalo de confianza es más pequeño (mejor estimación)

-El nivel de confianza 1-**α** : de manera que cuanto mayor sea el nivel de confianza , es decir cuanta mayor seguridad deseemos, mayor será $z_{\alpha/2}$ (y en consecuencia el error) por lo que el intervalo aumentará.

Observación:

Si la desviación típica σ de la población es desconocida , hay que estimarla a partir de la muestra. La forma más correcta de hacerlo es mediante el estadístico

$$s_{n-1} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\, s$$

(es decir, la raíz de la cuasivarianza) . Sin embargo para valores relativamente grandes de **n** puede utilizarse la desviación típica de la muestra **s.**

5.3.1.-Determinación del tamaño de la muestra

A veces el nivel de confianza y el error máximo admisible los fijamos de antemano y entonces tenemos que hallar el tamaño de la muestra para conseguir esas condiciones.

Conseguiremos el valor mínimo del tamaño de la muestra despejando **n** en la expresión de E:

$$z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq E \Rightarrow \sqrt{n} \geq \frac{z_{\alpha/2}\cdot\sigma}{E} \Rightarrow n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2$$

5.3.2-Determinación del nivel de confianza

A veces se desea hallar el intervalo de confianza para la media poblacional con un error E determinado y para ello se toma una muestra de tamaño **n.** En este caso interesa saber el nivel de confianza con el que se realiza la estimación. Se tiene que ::

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{E\sqrt{n}}{\sigma}$$

Conocido $z_{\alpha/2}$, mediante las tablas obtenemos el valor de $\alpha/2$ que nos da el nivel de confianza $1-\alpha$

5.4.INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA PROPORCION

Se desea estimar la proporción **p** de individuos que presentan una determinada caraterística. Para ello se recurre a una muestra de tamaño **n** de la cual se obtiene una proporción muestral $\hat{p}$ (siendo $\hat{q}$=1-$\hat{p}$)

Si n>30 (ó n$\hat{p}$≥5 y n(1-$\hat{p}$)≥5) entonces el intervalo de confianza de **p** con un nivel de confianza del $1-\alpha$ es

$$I = \left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\ ,\ \bar{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)$$

donde el error máximo admisible es en este caso $E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

5.4.1.-Determinación del tamaño de la muestra

A veces el nivel de confianza y el error máximo admisible los fijamos de antemano y entonces tenemos que hallar el tamaño de la muestra para conseguir esas condiciones. Al Al igual que ocurria con la media conseguiremos el valor mínimo del tamaño de la muestra despejando **n** en la expresión de **E**

5.4.2-Determinación del nivel de confianza

A veces se desea hallar el intervalo de confianza para la proporción poblacional con un error **E** determinado y para ello se toma una muestra de tamaño **n.** En este caso interesa saber el nivel de confianza con el que se realiza la estimación. Para ello en la expresi´´on de **E** despejaremos $z_{\alpha/2}$ cuyo valor nos permite calcular $1-\alpha$

EJERCICIOS

5.2.-Un fabricante de pilas alcalinas sabe que el tiempo de duración, en horas, de las pilas que fabrica sigue una distribución Normal de media desconocida y varianza 3600. Con una muestra de su producción, elegida al azar, y un nivel de confianza del 95% ha obtenido para la media el intervalo de confianza (372.6; 392.2).
a)Calcular el valor que obtuvo para la media de la muestra y el tamaño muestral utilizado.
b) ¿Cuál sería el error de su estimación, si hubiese utilizado unl muestra de tamaño 225 y un nivel de confianza del 86,9% ?

5.3.-El peso de los paquetes enviados por una determinada empresa de transportes se distribuye según una ley Normal, con una desviación típica de 0,9 kg. En un estudio realizado con una muestra aleatoria de 9 paquetes, se obtuvieron los siguientes pesos en kilos;
9.5 10 8.5 10.5 12,5 10,5 12,5 13 12
a)Hallar un intervalo de confianza, al 99%, para el peso medio de los paquetes enviados por esa empresa.
b) Calcular el tamaño mínimo que debería tener una muestra, en el caso de admitir un error máximo de 0,3 kg, con un nivel de confianza del 90%.

5.4.-Las alturas, expresadas en centímetros, de los estudiantes de segundo de Bachillerato se distribuye normalmente con una desviación típica de 20 cm. En un colectivo de 500 estudiantes de segundo de Bachillerato se ha obtenido una media de 160 cm.
Calcula, con una probabilidad del 98%, entre qué valores estará la media de la altura de la población total de estudiantes de segundo de Bachillerato.

5.5.-Se quiere estimar la media de la nómina mensual que reciben los directivos de las compañías multinacionales que operan en Europa.
a) Si la varianza de la nómina en la población es de 1000 €^{2}. ¿Cuál es la varianza de la media muestral cuando el tamaño de la muestra es de 100?
b)Si en las condiciones del apartado anterior obtenemos un intervalo de confianza (4000,4016). ¿Qué nivel de confianza tiene la estimación?

5.6.-El peso medio de una muestra aleatoria de 100 naranjas de una determinada variedad variedad es de 272 grs. Se sabe que la desviación típica poblacional es de 20 grs. A un nivel de significación de 0.05 hallar el intervalo de confianza para la media poblacional

5.7.-En un pais se sabe que la altura de la población se distribuye normalmente con una desviación típica de 10 cms.
a)Si la media poblacional fuera de 170 cms, calcular la probabilidad que la media muestral de una muestra de 64 personas difiera menos de un centímetro de la media de la población.
b) ¿Cuál es el tamaño muestral que se debe tomar para estimar la media de la altura de la población con un error menor de 2 cms y con un nivel de confianza del 95%?
c) Y si en el apartado anterior aumentamos el nivel de confianza al 99 % ¿qué tamaño muestral se necesitará?

5.8.-Para determinar el porcentaje de alumnos que tienen acceso a Internet en su domicilio se ha encuestado a 60 alumnos resultando que 42 sí lo tienen. Determinar el intervalo de confianza para la proporción de alumnos con acceso a Internet en su domicilio a un nivel de confianza del 95%

5.9.-La estatura de los miembros de una población se distribuye según la ley normal de media desconocida y desviación típica 9 cm. Con el fin de estimar la media se toma una muestra de 9 individuos de la población, obteniéndose para ellos una media aritmética igual a 170 cm.
a) Calcula el intervalo de confianza al nivel del 95% para la estatura media de la población
b) Calcula el tamaño muestral necesario para estimar la media de la población con una precisión de ±5 cm y un nivel de confianza del 99%.

5.10.-El precio de ciertos electrodomésticos puede considerarse una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 100 euros Los precios en euros correspondientes a una muestra de 9 de estos electrodomésticos son
255 85 120 290 80 80 275 290 135
a) Construir un intervalo de confianza al 98% para la media población
b) Hallar el tamaño mínimo que debe tener la muestra, para que con el nivel de confianza del 99% el error de estimación del precio medio no supere los 50 euros.

5.11.-Un estudio realizado por el departamento de Lengua de un Instituto estima que la proporción de alumnos que durante un curso leen al menos 6 libros de lectura es del 0.45.
a)Por la dirección de la biblioteca escolar se decide realizar una encuesta para determinar dicho porcentaje con un error no superior a 0.05 a un nivel de confianza del 95% ¿Cuál será el tamaño mínimo de la muestra?
b)Si se decide tomar una muestra de tamaño 300 ¿cuál es el nivel de confianza de que el error no supera 0.05?

5.12.-Se quiere conocer la permanencia media de pacientes en un hospital, con el fin de estudiar una posible ampliación del mismo. Se tienen datos referidos a la estancia, expresada en días, de 800 pacientes, obteniéndose los siguientes resultados: $\overline{X}=81$ días; .S = 9 días. Se pide obtener un intervalo de confianza del 95% para la estancia media.

5.13.-El salario medio correspondiente a una muestra de 900 personas de una población dada es de 725 euros. Se sabe que los salarios de esa población siguen una distribución normal con desviación típica de 84 euros. ¿Se puede afirmar que el salario medio de dicha población es de 700 euros con un nivel de confianza del 95%?

5.14.-Una máquina de refrescos está ajustada de manera que la cantidad de líquido despachada se distribuye en forma normal con una desviación típica de 0.15 dl. Encontrar un intervalo de confianza del 97% para la media de todos los refrescos si una muestra aleatoria de 36 refrescos tiene un contenido promedio de 2.25dl

5.15.-De una encuesta realizada a 1200 hogares de una ciudad se ha obtenido que la proporción de las que utilizan microondas es del 0.30.
a) Calcular el intervalo de confianza para la proporción de hogares que utilizan el microondas en dicha ciudad a un nivel de confianza del 92%
b) Para una estimación con un error menor que 0.04 a un nivel de confianza del 95% ¿de que tamanño deberíamos elegir la muestra?

TEMA 6: CONTRASTE DE HIPÓTESIS

6.1.-INTRODUCCIÓN. DEFINICIONES

En el tema anterior estudiamos como obtener, a partir de una muestra, un intervalo que con un nivel de confianza determinado contiene a un parámetro desconocido de la población.

En esta tema abordamos la teoría de la decisión estadística que consiste en utilizar la información obtenida de una muestra para tomar una decisión sobre la aceptación de una hipótesis relativa a la población.

Definiciones:

✧Se llama **hipótesis nula**, denotada por H_0 , la hipótesis sobre la población que queremos contrastar. Será aceptada o rechazada después de obtener información de la muestra.

✧La hipótesis contraria a la hipótesis nula se llama **hipótesis alternativa** y se denota por H_1. Obviamente si se acepta H_0 se rechaza H_1 y viceversa

✧Un contraste de hipótesis es un procedimiento para, a partir de una muestra significativa, decidir si una hipótesis se acepta o se rechaza. Los contrastes de hipótesis pueden ser de dos tipos:

- ✷ Contraste bilateral: Si la hipótesis nula adopta la forma de igualdad
- ✷ Contraste unilateral: Si la hipótesis nula adopta la forma de desigualdad

✧Estadístico de contraste es el estadístico muestral utilizado en el contraste

✧Nivel de significación es un valor probabilístico , muy pequeño, que se fija previamente a la aplicación del contraste. Se simboliza por α **.** Es la probabilidad de que la hipótesis nula se rechace siendo cierta

✧Se llama **región crítica** al conjunto de valores del estadístico de contraste que nos llevan a rechazar la hipótesis nula y **región de aceptación** el conjunto de valores que nos lleva a aceptarla.

6.2.-CONTRASTE DE HIPÓTESIS

Los 5 pasos a seguir en un contraste de hipótesis son los siguientes:

A.- Formular las hipótesis nula y alternativa

B.- Elegir un nivel de significación

C.- Determinación de la región crítica y de la región de aceptación

D.- A partir de la muestra (de tamaño mayor que 30 si la población no es normal) determinar el valor del estadístico de contraste

E.-Aceptar la hipótesis nula si el valor del estadístico de contraste pertenece a la región de aceptación o rechazarla si pertenece a la región crítica

6.3.-CONTRASTE DE HIPÓTESIS PARA LA MEDIA

6.3.1.-Contraste bilateral

Partimos de una población con una media μ desconocida y una desviación típica σ_0 conocida

A.- Hipótesis nula $H_0 : \mu=\mu_0$

Hipótesis alternativa : $H_1 : \mu\neq\mu_0$

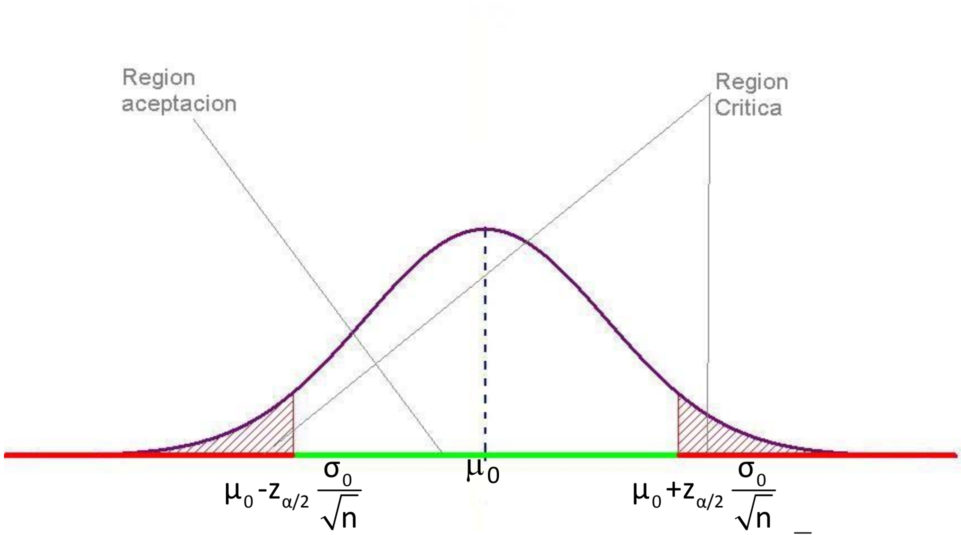
B.- Elegimos un nivel de significación α

C.-Determinación de la región crítica y de la región de aceptación

Región de aceptación: $\left(\mu_0 - z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \mu_0 + z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$

Región crítica : $\left(-\infty, \mu_0 - z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right) \cup \left(\mu_0 + z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, +\infty\right)$

En el grafico siguiente representamos las dos regiones



D.-Determinamos el valor del estadístico de contraste (la media $\overline{X}$ de la muestra)

E.- Se acepta (si $\overline{X}$ pertenece a la región de aceptación) o rechaza la Hipótesis nula

Nota: Si la desviación típica no es conocida utilizaremos en su lugar la desviación típica **S** de la muestra

Ejemplo 1

Las pilas de una determinada marca tienen una duración de media desconocida con una desviación típica de 80 horas. Se toma una muestra de 100 pilas y se comprobó que su duración media era de 1670 horas. ¿Se puede afirmar , con un nivel de significación del 5% , que la duración media de las pilas de esa marca es de 1700 horas?

A.- Hipótesis nula : μ**=1700**

Hipóteis alternativa: μ**≠1700**

B.- Nivel de significación α**=0.05 .** Por lo tanto $z_{\alpha/2}$=1.96

C.- Región de aceptación:

$$\left(\mu_0 - z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \mu_0 + z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$$ = (1700-1.96·80/10, 1700-1.96·80/10) =(1684.32,1715,68)

D.-Media muestral : 1670

E.-Como la media muestral no pertenece a la región de aceptación se rechaza la hipótesis de que la duración media de las pilas de la marca es de 1700 horas

6.3.2.-Contraste unilateral

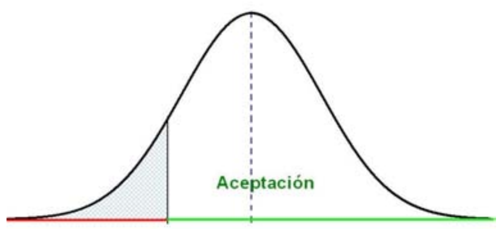
Partimos de una población con una media μ desconocida y una desviación típica σ_0 conocida

A.- Hipótesis nula H_0 : $\mu \leq \mu_0$ (ó $\mu \geq \mu_0$)

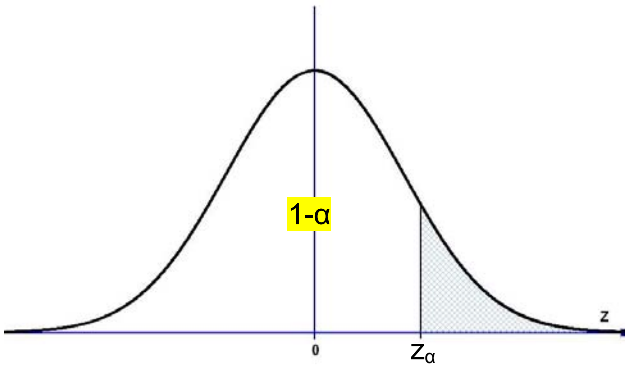
Hipótesis alternativa : H_1 : $\mu > \mu_0$ (ó $\mu < \mu_0$)

B.- Elegimos un nivel de significación α

C.-Determinación de la región crítica y de la región de aceptación

$H_0 : \mu \leq \mu_0$	$H_0 : \mu \geq \mu_0$
Región de aceptación: $\left(-\infty, \mu_0 + z_\alpha \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$ Región crítica : $\left(\mu_0 + z_\alpha \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, +\infty\right)$	Región de aceptación: $\left(\mu_0 - z_\alpha \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, +\infty\right)$ Región crítica : $\left(-\infty, \mu_0 - z_\alpha \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$
 $\mu_0 + z_\alpha \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$	 $\mu_0 - z_\alpha \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$

donde z_α es el valor que verifica $P[Z < z_\alpha] = 1-\alpha$ (ver la siguiente figura)



D.-Determinamos el valor del estadístico de contraste (la media $\overline{X}$ de la muestra)

E.- Se acepta o rechaza la Hipótesis nula

Nota: Si la desviación típica no es conocida utilizaremos en su lugar la desviación típica **S** de la muestra

Ejemplo 2

Para la realización de una prueba se considera que el tiempo apropiado es de 45 minutos. Se mide el tiempo empleado por 50 personas elegidas al azar obteniéndose un tiempo medio de 45.2 minutos con una desviación típica de de 4 minutos. ¿Se puede considerar , con un nivel de significación del 10% , que los 45 minutos es un tiempo suficiente para realizar la prueba?

A.- Hipótesis nula : $\mu \leq$ **45**

Hipóteis alternativa: $\mu >$ **45**

B.- Nivel de significación α**=0.10 .** Por lo tanto z_α=1.28

C.- Región de aceptación:

$$\left(-\infty, \mu_0 + z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right) = (-\infty\ ,\ 45+1.28\cdot 4/7.07) = (-\infty, 45.72)$$

D.-Media muestral : 45.2

E.-Como la media muestral pertenece a la región de aceptación se acepta la hipótesis de que 45 minutos es un tiempo adecuado para la realización de la prueba

---

6.4.-CONTRASTE DE HIPÓTESIS PARA LA DIFERENCIA DE MEDIAS

6.4.1.-Contraste bilateral

Partimos de dos poblaciones : una con media μ_1 desconocida y una desviación típica σ_1 conocida ; otra media μ_2 desconocida y una desviación típica σ_2 conocida. De la primera extraemos una muestra de tamaño $\mathbf{n_1}$ con una media $\overline{X}_1$ y de la segunda otra de tamaño $\mathbf{n_2}$ con una media $\overline{X}_2$. Se trata de contrastar si las dos poblaciones tienen la misma media.

A.- Hipótesis nula H_0 : $\mu=\mu_1-\mu_2=0$ (es decir $\mu_1=\mu_2$)
Hipótesis alternativa : H_1 : $\mu=\mu_1-\mu_2\neq 0$ (es decir $\mu_1\neq\mu_2$)

B.- Elegimos un nivel de significación α

C.-Determinación de la región de aceptación: $\left(0-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\ ,\ 0+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$

D.-Determinamos el valor del estadístico de contraste (la diferencia de medias $\overline{X}=\overline{X}_1-\overline{X}_2$)

E.- Se acepta o rechaza la Hipótesis nula

6.4.2.-Contraste unilateral

A.- Hipótesis nula H_0 : $\mu=\mu_1-\mu_2\leq 0$ (es decir $\mu_1\leq\mu_2$) ; ó $\mu=\mu_1-\mu_2\geq 0$ (es decir $\mu_1\geq\mu_2$)
Hipótesis alternativa : H_1 : $\mu=\mu_1-\mu_2>0$ (es decir $\mu_1>\mu_2$) ; ó $\mu=\mu_1-\mu_2<0$ (es decir $\mu_1<\mu_2$)

B.- Elegimos un nivel de significación α

C.-Determinación de la región de aceptación:

$$\left(-\infty, 0+z_\alpha\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right) \quad ; \quad ó \quad \left(0-z_\alpha\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\ ,+\infty\right)$$

D.-Determinamos el valor del estadístico de contraste (la diferencia de medias $\overline{X}=\overline{X}_1-\overline{X}_2$)

E.- Se acepta o rechaza la Hipótesis nula

Ejemplo 3

Para comprobar que entre el alumnado de un centro escolar las alumnas dedican más tiempo a la lectura que los alumnos, el departamento de matemáticas realiza una encuesta a una muestra de 50 alumnas y una muestra de 40 alumnos. Para las alumnas se obtiene que por término medio se dedican 10.1 horas semanales con una desviación de 1.4 horas y para los alumnos 10.3 horas con una desviación de 1.8 horas. ¿Se puede considerar , con un nivel de significación del 5% , que las alumnas dedican más tiempo a la lectura que los alumnos del centro?

A.- Hipótesis nula : $\mu=\mu_1-\mu_2>0$ (es decir $\mu_1>\mu_2$)

Hipóteis alternativa: $\mu=\mu_1-\mu_2\leq 0$

B.- Nivel de significación $\alpha=0.05$. Por lo tanto $z_\alpha=1.645$

C.- Región de aceptación:

$$\left(0-z_\alpha\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},+\infty\right)=\left(0-1.645\sqrt{\frac{1.4^2}{50}+\frac{1.8^2}{40}},+\infty\right)=(-0.57,+\infty)$$

D.-Diferencia de medias: $\overline{X}=\overline{X}_1-\overline{X}_2=10.1-10.3=-0.2$

E.-Como el valor de $\overline{X}$ pertenece a la región de aceptación se acepta la hipótesis de que las alumnas dedican más tiempo a la lectura que los alumnos.

Nota: Lo que realmente concluimos e que no se puede rechazar la hipótesis debido a que estamos aceptando como improbables solo el 5% de los resultados posibles. (Se puede comprobar que si aumentamos el nivel de significación al 20% , es decir aceptaríamos como improbables el 20% de los resultados, la hipótesis ya no resulta aceptable)

6.5.-CONTRASTE DE HIPÓTESIS PARA LA PROPORCIÓN

6.5.1.-Contraste bilateral

Partimos de una población con una proporción desconocida **p** de individuos que poseen una cierta característica (y una proporción **q=1-p** que no la tienen)

A.- Hipótesis nula H_0 : $p=p_0$

Hipótesis alternativa : H_1 : $p\neq p_0$

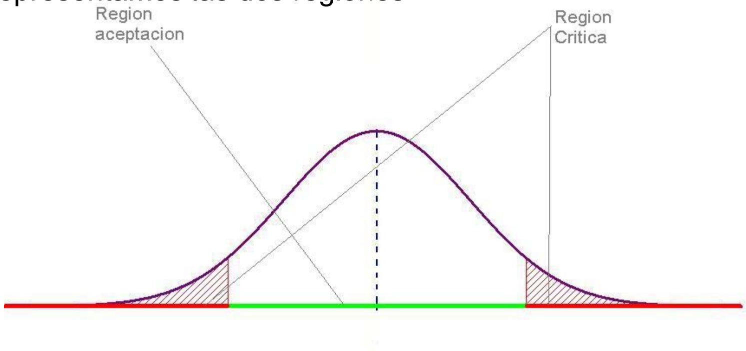
B.- Elegimos un nivel de significación α

C.-Determinación de la región crítica y de la región de aceptación

Región de aceptación: $$\left(p_0-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0q_0}{n}},\,p_0+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0q_0}{n}}\right)$$

Región crítica : $$\left(-\infty,\,p_0-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0q_0}{n}}\right)\cup\left(p_0+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0q_0}{n}},+\infty\right)$$

En el grafico siguiente representamos las dos regiones



$p_0 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}$ $\quad p_0 \quad$ $p_0 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}$

D.-Determinamos el valor del estadístico de contraste (la proporción $\hat{p}$ de la muestra)

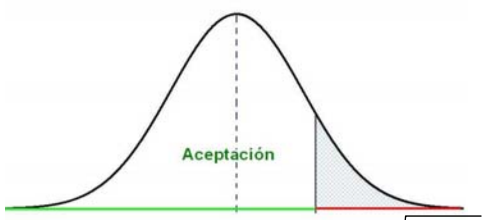
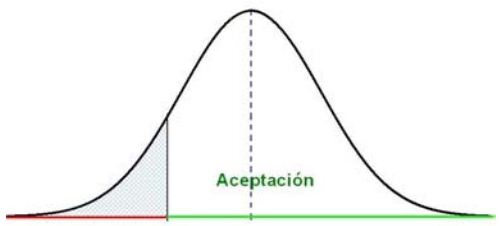
E.- Se acepta o rechaza la Hipótesis nula

6.5.2.-Contraste unilateral

A.- Hipótesis nula H_0 : **$p \leq p_0$** (ó **$p \geq p_0$**)
Hipótesis alternativa : H_1 : **$p > p_0$** (ó **$p < p_0$**)

B.- Elegimos un nivel de significación α

C.-Determinación de la región crítica y de la región de aceptación

H_0 : **$p \leq p_0$**	H_0 : **$p \geq p_0$**
Región de aceptación $\left(-\infty, p_0 + z_\alpha\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}\right)$ Región crítica:	Región de aceptación: $\left(p_0 - z_\alpha\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}, +\infty\right)$ Región crítica
 $p_0 + z_\alpha\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}$	 $p_0 - z_\alpha\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}$

D.-Determinamos el valor del estadístico de contraste (la proporción $\hat{p}$ de la muestra)

E.- Se acepta o rechaza la Hipótesis nula

6.6.-ERRORES EN LOS CONTRASTES DE HIPÓTESIS

Al aplicar un contraste de hipótesis podemos cometer dos tipos de error:

Error tipo I : Se comete cuando se rechaza la hipóteis nula siendo realmente verdadera. La probabilidad de cometer un error de este tipo es **α**

Error tipo II : Se comete cuando se acepta la hipótesis nula siendo realmente falsa. La probabilidad de cometer este tipo de error depende del tamaño de la muestra. Cuanto mayor es dicho tamaño más pequeña es la probabilidad de cometer este tipo de error

EJERCICIOS

6.1.- En los años 60, la estatura media de los españoles varones que hacían el servicio militar era de 170 cm,. En la actualidad, se ha realizado un muestreo a 36 adultos varones dando una media de 172 cm. Con una desviación típica S=2 cm
Se pide:
a) ¿Podemos afirmar, con una confianza del 95%, que esa diferencia es debida al azar?
b) ¿Qué se puede decir si esa media se ha calculado utilizando una muestra de 900 jóvenes?

6.2.- En una comunidad autónoma se estudia el número medio de hijos por mujer a partir de los datos disponibles en cada municipio. Se supone que este número sigue una distribución normal con desviación típica igual a 0,08. El valor medio de estos datos para 36 municipios resulta ser igual a 1,17 hijos por mujer.
Se desea contrastar, con un nivel de significación de 0,01, si el número medio de hijos por mujer en la comunidad es de 1,25.

6.3.- Según los datos de un censo de 1970, el analfabetismo en cierto país alcanzaba el 40% de la población. Una reciente encuesta realizada sobre una muestra aleatoria de 800 personas, arroja el dato de que 300 de ellas son analfabetas.
¿Puede considerarse, con un nivel de confianza del 95%, que se ha reducido el nivel de analfabetismo?

6.4.- Según un estudio realizado por una empresa hotelera durante el año 1992, la distribución del tiempo de estancia de cada viajero fue normal con una media de 3,7 días y una desviación típica de 1,1 días. A lo largo del año 2000 se analizó el tiempo de estancia de 49 viajeros elegidos al azar, obteniéndose una media de 3,5 días. ¿Podemos afirmar que esta diferencia es debida al azar con una confianza del 88%? Con el mismo nivel de confianza, ¿cambiaría la respuesta si esta media de 3,5 días se hubiera obtenido al analizar el tiempo de estancia de 100 viajeros elegidos al azar?

6.5.- Se afirma que la proporción de personas que contratan un determinado servicio telefónico es, como mínimo, del 23%. Sin embargo, la compañía telefónica sospecha que actualmente dicha proporción ha variado. Para comprobarlo hace una encuesta a 500 clientes potenciales entre los que solo 98 piensan contratar dicho servicio.
Con un nivel de significación del 5%, determinar si es aceptable la afirmación inicial.

6.6.- A partir de los datos recogidos sobre una muestra aleatoria de 121 pequeñas y medianas empresas de una región se ha calculado, para el año 2000, un beneficio medio de 89 millones de euros con una varianza de 30,25 euros^2.
Contestar justificando las respuestas:
a) ¿Podríamos rechazar (con un nivel de significación del 0,001) la afirmación de que los beneficios medios en la pequeña y mediana empresa de dicha región son de 90 millones de euros?

6.7.- En las últimas elecciones, celebradas hace un año, el 52 por ciento de los votantes de una ciudad estaban a favor del alcalde. Una encuesta, realizada recientemente, indica que, de 350 ciudadanos elegidos al azar, 198 están a favor del alcalde:
a) ¿Se puede afirmar, con un nivel de confianza del 90%, que el alcalde gana popularidad?
b) ¿Se obtiene la misma respuesta que en el apartado anterior si el nivel de confianza es igual a 0,99?

6.8.- Una fábrica de ordenadores produce dos modelos diferentes: uno portátil y otro de sobremesa. Tras unos estudios realizados, se concluye que el número de errores del sistema del modelo portátil se distribuye normalmente con varianza 5; y que en el modelo de sobremesa, el número de errores sigue una distribución normal con varianza 7.
Elegidos al azar 50 ordenadores de cada moodelo, se observa un número medio de errores de 15 y 10, respectivamente.
¿Podemos afirmar, a un nivel de confianza del 95%, que el número medio de errores, en ambos modelos, es el mismo?
b) ¿Qué podemos decir respecto al 1% de nivel de significación?

6.9.- Se sabe que la edad (en años) de los aspirantes a un puesto de trabajo en un determinado organismo oficial es una variable normal con desviación típica igual a 5. Se observa una muestra de 125 personas que se presentan a una prueba para optar a un puesto de trabajo en el citado organismo, obteniéndose una edad media igual a 22,3 años:
a) ¿Se puede afirmar, con un nivel de significación del 5%, que es igual a 21 la edad media de los que optan a un puesto de trabajo en el organismo oficial?
b) ¿Se puede afirmar, si el nivel de significación es del 1 %, que dicha edad media es menor o igual que 22?

6.10.- Un establecimiento vende paquetes de carbón para barbacoa de peso teórico 10 kg. Se supone que el peso de los paquetes sigue una distribución normal con desviación típica 1 kg. Para contrastar la citada hipótesis, frente a que el peso teórico sea distinto de 10 kg, se escogen al azar 4 paquetes que pesan en kilogramos, respectivamente: 8, 10, 9, 8
Se desea que la probabilidad de aceptar la hipótesis nula, cuando esta es cierta, sea 0,95. Se pide:
a) La región crítica del contraste.
b) ¿Se debe rechazar la hipótesis nula?

6.11.- Se supone que el peso de las sandías de cierta variedad sigue una distribución normal con desviación tipíca de 1 kg. Se toma una muestra aleatoria de 100 sandías y se observa que el peso medio es de 6 kg.
a) Calcúlese un intervalo de confianza al 95% para el peso medio de esa variedad de sandía.
b) ¿Puede aceptarse la hipótesis de que el verdadero peso medio de las sandías es de 5 kg, frente a que sea diferente, con un nivel de significación de 0,05?

6.12.- En un estudio diseñado para demostrar si existe una diferencia entre las alturas medias de mujeres adultas nacidas en dos países diferentes, las muestras arrojan los siguientes resultados:
n = 120; X= 162,7; (Sx = 2,50)
m =150; Y= 61, 8; (Sy = 2, 62)
Utilizar un nivel de significación de 0,05 para contrastar la hipótesis nula de que las medias de la población correspondientes son iguales contra la hipótesis alternativa de que no son iguales.

6.13.- En el año 1990 el 25% de los partos fueron de madres de más de 30 años. Este año se ha tomado una muestra de 120 partos de los cuales 34 fueron de madres de más de 30 años.
a) Con una significación del 10%, ¿se puede aceptar que la proporción de partos de madres de más de 30 años sigue siendo como mucho del 25%, frente a que ha aumentado?

6.14.- Una empresa de automóviles está estudiando las mejoras que ha incluido en la nueva generación de su gama de utilitarios. Hasta ahora, los kilómetros que uno de estos automóviles podía recorrer -con un uso normal- sin que fueran necesarias reparaciones importantes seguía una Normal con media 220 (en miles de kilómetros) y desviación típica 15 (en miles de kilómetros). Las mejoras parecen haber surtido efecto, puesto que con 100 automóviles de la nueva generación se ha obtenido una media de 225 (en miles de kilómetros) sin ningún tipo de problema grave. Suponiendo que la desviación típica se ha mantenido:
a) Plantea un test para contrastar la hipótesis de que las mejoras no han surtido efecto o incluso que han empeorado la situación, frente a que sí han surtido efecto, como parecen indicar los datos. Si se concluyera que la media sigue igual o incluso bajó, y sin embargo esta conclusión fuera falsa, ¿cómo se llama el error cometido?
b) Con un nivel de significación del 1 %, ¿a qué conclusión se llega?

6.15.- Se quiere estimar la media de la nómina mensual que reciben los directivos de las compañías multinacionales que operan en Europa.
a) Si la varianza de la nómina en la población es de 1000 €^{2}. ¿Cuál es la varianza de la media muestral cuando el tamaño de la muestra es de 100?
b) Si en las condiciones del apartado anterior, la media muestral es de 4008 €. ¿Se rechazaría, con un nivel de confianza del 0,95, la hipótesis de que la nómina media es de 4000 €?

6.16.- A principios de año, un estudio en cierta ciudad indicaba que un 15% de los conductores utilizaban el móvil con el vehículo en marcha. Con el fin de investigar la efectividad de las campañas que se han realizado desde en- tonces para reducir estos hábitos, recientemente se ha hecho una encuesta a 120 conductores y 12 hacían un uso indebido del móvil.
a) Plantea un test para contrastar que las campañas no han cumplido su objetivo frente a que sí lo han hecho, como parecen indicar los datos. ¿A qué conclusión se llega con un nivel de significación de14%?

6.17.-Se quiere contrastar si el nivel de colesterol en sangre de un grupo de enfermos es mayor que el de una población que se ha tomado como referencia, y que es de 160 u. .Se sabe que la desviación típica de la cantidad de colesterol en sangre es de 20 u.

Para ello se toma una muestra de 50 enfermos resultando una media muestral de 165 u. ¿Se rechazará la hipótesis con un nivel de significación de 0.025?

6.18.- Se desea determinar el número de familias que les gustaría disponer de televisión digital en sus domicilios. Para ello se considera una muestra de 400 familias y se observa el número de los que les gustaría, obteniendo un resultado de 188. En estas condiciones:

¿Se puede afirmar que la proporción de personas que les gustaría disponer de televisión digital es 0,5 a un nivel de significación de 0,02?
¿Se puede afirmar que la proporción de personas que les gustaría disponer de televisión digital es menor que 0,5 a un nivel de significación de 0,02?

6.19.-Una empresa dedicada a la fabricación de luminosos publicitarios anuncia que , como máximo, hay un 1% de luminosos defectuosos. Se selecciona una muestra de 100 rótulos y se observa que aparecen 3 defectuosos. Con un nivel de significación del 5% ¿Podemos aceptar la hipótesis del fabricante?¿Y con un nivel de confianza del 99%?

6.20.- Antes de la puesta en marcha del carné por puntos, la velocidad en cierta carretera seguía una Normal de media 80 kilómetros por hora y desviación típica 10. Pasado unos meses de la introducción de dicha medida, sobre 40 vehículos observados a diferentes horas del día se obtuvo una media de 75 kilómetros por hora. Si la velocidad sigue siendo una Normal con la misma desviación típica:
Plantea un test para contrastar la hipótesis de que con dicha medida la situación sigue igual, frente a que, como parece, ha mejorado. ¿A qué conclusión se llega para un nivel de significación de15%?

6.21.- Según los datos de cierta comunidad autónoma relativos al impuesto sobre la renta, en el pasado ejercicio fiscal la contribución media fue de 4000 euros. En una muestra de 500 declaraciones del año en curso, elegidas al azar, la contribución media ha sido de 4120 euros, con una desviación típica de 1200 euros. ¿Puede decirse, con un 95% de confianza, que ha variado la aportación media de los contribuyentes? ¿Y con un 99% de confianza?

6.22.- Un banco decide contratar guardias de seguridad para sus nuevas sucursales. Para ello contacta con dos empresas de seguridad; para estar seguros de elegir la opción correcta deciden aplicarles un test a los aspirantes de ambas empresas. Se sabe que las desviaciones típicas de los guardias de la primera empresa es 8 y la desviación típica de los de la segunda 7. De la primera empresa se seleccionaron 60 aspirantes y tras aplicarles el test obtuvieron una puntuación media de 70 puntos; de la segunda empresa se seleccionaron 50 aspirantes y la puntuación media fue de 73 puntos. A la vista de estos resultados
a) ¿podemos afirmar que existe alguna diferencia entre las puntuaciones medias de los aspirantes de las dos empresas de seguridad para un nivel de significación de 0,05?
b) ¿podemos afirmar que la puntuación media de la 1ª empresa es peor que la de la segunda para un nivel de significación del 0,10?

PRUEBAS DE ACCESO DE GALICIA

JUNIO 2001

1.- Cuando los motores llegan al final de una cadena de producción, un inspector escoge los que deben pasar una inspección completa. Supóngase que se producen un 10% de motores defectuosos, y que el 60% de tódos los motores defectuosos y el 20% de los buenos pasan una inspección completa. Calcúlese:
a) Probabilidad de que un motor elegido al azar sea defectuoso y pase la inspección. b) Probabilidad de que un motor elegido al azar sea bueno y pase la inspección. c) Si conocemos que el 24% de los motores pasan la inspección, ¿qué porcentaje de los mismos son defectuosos?

2.- a) La duración de cierto tipo de motor es una variable normal con una media de 10 años y desviación típica de 2 años. E fabricante garantiza el buen funcionamiento de los motores por un período de 3 años. ¿Qué porcentaje de motores se espera que no cumplan la garantía?
b) Una fábrica de conservas desea conocer el tiempo que tarda en estropearse un producto que tiene almacenado. Elige una muestra de 400 unidades, resultando que el tiempo medio de descomposición de estes productos es de 172 horas. Por experiencias anteriores se conoce que la desviación típica de la variable normal tiempo de descomposición es de 5 horas.
Con un nivel de confianza del 95%, ¿entre qué valores se halla el tiempo medio de descomposición para la totalidad del producto almacenado?

SEPTIEMBRE 2001

1.- Una máquina A produce cada día el duplo de piezas que una máquina B. El 6% de las piezas fabricadas por la máquina A son defectuosas, mientras que de las fabricadas por la máquina B solo son defectuosas el 3%. Calcúlese
i) la probabilidad de que una pieza de la producción total sea defectuosa
ii) ¿Cual es el número esperado de piezas defectuosas en un lote de 100?
iii) ¿Cuál es la probabilidad de que en un lote de 6 piezas ninguna sea defectuosa?
2. A) Un supervisor sometió una muestra de 16 fusibles a una cierta sobrecarga. Los tiempos que tardaron en fundirse dieron una media de 10,63 minutos. Considerando que la variable "tiempo que tarda en fundirse un fusible sometido a esa sobrecarga" es normal con una desviación típica de 2,48 minutos, construir un intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza del 95%. ¿Cual debe ser el tamaño de la muestra para que el error en la estimación de la media sea inferior a 1 minuto con un nivel de confianza del 95%?
2.- B) Sean A y B sucesos independientes con P(A) = 0,6 y P(B) = 0,2. Calcúlese
$P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$ y $P(A/B)$.

JUNIO 2002

1.- En una cierta prueba, el 35 por ciento de la población examinada obtuvo una nota superior a 6, el 25 por ciento entre 4 y 6, y el 40 por ciento inferior a 4. Suponiendo que las notas siguen una distribución normal, calcular la nota media y la desviación típica. ¿Que porcentaje de la población tiene una nota que se diferencia de la media en menos de 2 unidades?
2.- En una ciudad el 20 por ciento de las casas están aseguradas contra los incendios. Con el fin de establecer una encuesta , una compañía de seguros selecciona 5 casas al azar. Se pide:
a) Número de casas que se espera que estén aseguradas.
b) Probabilidad de que ninguna esté asegurada.
c) Probabilidad de que alguna esté asegurada.
.

SEPTIEMBRE 2002

1.- Durante un año las personas de una ciudad utilizan tres tipos de transportes, metro (M), autobús (A) y coche particular (C). Las probabilidades de que durante un año tengan usado unos u otros transportes son las siguientes:
$P(M) = 0,3$, $P(A) = 0,2$, $P(C) = 0,15$ $P(M \cap A) = 0,1$, $P(M \cap C) = 0,05$
$P(A \cap C)=0,06$, $P(M \cap A \cap C)=0,01$
Calcular las siguientes probabilidades:
a) Que una persona utilice algún medio de transporte.
b) Que una persona viaje en metro y no en autobús.
c) Que una persona viaje en metro o en coche y no en autobús.
d) Que una persona viaje a pié.

JUNIO 2003

1.- Considérese una población en la que se estudia una característica X que sigue una distribución normal de media $\mu=12$ y varianza $\sigma^2=16$. Se considera una muestra aleatoria de tamaño n=9. ¿Cual es la probabilidad de que la media muestral $\overline{X}$ tenga un valor superior a 14?

2.-b) Sean A y B dos sucesos tales que P(A) = 0'6 y P(B) = 0'3. Si P(A/B) = 0'1 calcúlese $P(A\cup B)$ y $P(\overline{B}/A)$ siendo $\overline{B}$ el complementario del suceso B.

SEPTIEMBRE 2003

1.-En una ciudad el 80% de la población adulta mira la TV, el 30% lee algún libro y el 25% mira la TV y lee algún libro. Si pide
a)De entre los que leen libros ¿Qué porcentaje mira la TV?
b)Porcentaje de los que no miran TV y sí lee algún libro
c)Porcentaje de los que no hacen ninguna de las de los cosas

2.-La cantidad de mineral, en Tm, que produce semanalmente una mina es una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media 10 Tm y desviación típica 4 Tm
Calcular la probabilidad de que la producción de una semana sea superior la 12 Tm

JUNIO 2004

1.-En una empresa, el 20% de los trabajadores son mayores de 45 años, el 8% desempeña algún puesto directivo y el 6% es mayor de 45 años y desempeña algún puesto directivo.
a) ¿Qué porcentaje de los trabajadores tiene más de 45 años y no desempeña ningún cargo directivo?
b) ¿Qué porcentaje de los trabajadores no es directivo ni mayor de 45 años?
c)Si la empresa tiene 150 trabajadores, ¿cuántos son directivos y no tienen más de 45 años?
2.- Se sabe que el gasto semanal (en euros) en ocio para los jóvenes de una cierta ciudad sigue una distribución normal con desviación típica σ conocida.
a) Para una muestra aleatoria de 100 jóvenes de esa ciudad, el intervalo de confianza al 95% para el gasto medio semanal μ es (27 , 33). Hallar la correspondiente media muestral $\overline{x}$ y el valor de σ .
b) ¿Qué número de jóvenes tendríamos que seleccionar al azar, como mínimo, para garantizar, con una confianza del 95%, una estimación de dicho gasto medio con un error máximo no superior la 2 euros semanales?

SEPTIEMBRE 2004

1.-Una comisaría de policía metropolitana está formada por 1200 agentes: 960 hombres y 240 mujeres. A lo largo de los dos últimos años fueron ascendidos 324 agentes. En la siguiente tabla se muestra el reparto específico de los ascensos para agentes masculinos y femeninos:

	ASCENDIDOS	NO ASCENDIDOS	TOTAL
HOMBRES	288	672	960
MUJERES	36	204	240
TOTAL	324	876	1200

a)Calcular la probabilidad de ascenso para un agente del sexo masculino.
b)Calcular la probabilidad de ascenso para una agente del sexo femenino.
c)En esta comisaría, ¿el ascenso es dependiente o independiente del hecho de ser el policía hombre o mujer? Justifíquese la respuesta.
2.- Para determinar la edad promedio de sus clientes, un fabricante de ropa para caballero coge una muestra aleatoria de 50 clientes y calcula su edad media que resulta $\overline{x}$ = 36 años.
Si se sabe que la variable edad sigue una distribución normal con desviación típica σ = 12 años.
a) Determinar con un 95% de confianza el intervalo de la media de edad de todos los clientes.
b) si se desea que la media de la muestra no difiera en más de 2 años de la media de la población, con probabilidad 0,95 ¿cuantos clientes se deberían tomar como mínimo en la muestra?

JUNIO 2005

1.-El cuadro de personal de unos grandes almacenes está formado por 200 hombres y 300 mujeres. La cuarta parte de los hombres y la tercera parte de las mujeres solo trabajan en el turno de mañana. Elegido un empleado al azar
a)¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y solo trabaje en el turno de mañana?
b)Sabiendo que solo trabaja en el turno de mañana ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer?

2.-El peso de los alumnos de bachillerato de una ciudad tiene media μ desconocida y una desviación típica de σ=5.4 Kg. Tomamos una muestra aleatoria de 100 alumnos de bachillerato de esa ciudad
a) Si la media de la muestra es de 60 Kgs , calcular con un nivel de confianza del 99%, el intervalo de confianza para el peso medio μ de todos los alumnos de bachillerato de la ciudad
b)Si hace la siguiente afirmación: "el peso medio de los alumnos de bachillerato de esa ciudad está comprendido entre 59 y 61 Kgs" ¿ Con qué nivel de confianza se hace la afirmación?

SEPTIEMBRE 2005

1.- Una encuesta revela que el 40% de los jóvenes de cierta ciudad tiene estudios, de los cuales el 15% no tiene trabajo. Del 60% que no tiene estudios, un 25% no tiene trabajo.
a)Determinar el porcentaje de jóvenes de esa ciudad que no tiene trabajo
b)Entre los que no tienen trabajo ¿Qué porcentaje tiene estudios?
c)Calcular la probabilidad de que elegido al azar un joven de esa ciudad tenga estudios y trabaje
2.-Una fábrica desea conocer el tiempo que tarda en estropearse un producto que tiene almacenado. Para ello elige una muestra de 100 unidades, resultando un tiempo medio de descomposición de 120 horas. Por experiencias anteriores si conoce que la desviación típica de la variable normal "tiempo de descomposición" es de 5 horas
a) ¿Cómo si distribuye la variable "tiempo medio de descomposición" para muestras de 100 productos
b) Con un nivel de confianza del 95% ¿Entre que valores si encuentra el tiempo medio de descomposición para la totalidad del producto almacenado?

JUNIO 2006

1.-Una investigación de mercado de 800 personas reveló los siguientes hechos sobre la capacidad de recordar un anuncio televisivo de un producto en particular y la adquisición de dicho producto:

	Recuerdan el anuncio	*No recuerdan el anuncio*
Compran el producto	160	80
No compran el producto	240	320

a) Calcular la probabilidad de que una persona recuerde el anuncio o compre el producto
b) Si una persona recuerda el anuncio del producto ¿Qué probabilidad existe de que lo compre?
c) ¿El hecho de comprar el producto depende o no de recordar el anuncio? Justifíquese la respuesta

2.-a)El sueldo , en euros, de los empleados de una fábrica sigue una distribución normal de media μ=1500€ y una desviación típica σ=400€ . Se elige al azar una muestra de 25 empleados de esa fábrica ¿Cuál es la probabilidad de que la media de sus sueldos esté comprendida entre 1420 y 1600€?
b) Si solamente conocemos la desviación típica σ=400€ y desconocemos la media μ de los sueldos de los empleados de esa fábrica ¿qué tamaño de muestra deberíamos tomar para estimar μ con un nivel de confianza del 95% si se admite un error máximo de 100€?

SEPTIEMBRE 2006

1.- En un estudio realizado en cierto IES, en el que se imparte la ESO y el Bachillerato, se han recogido los siguientes datos:
- El 60% de los alumnos son mujeres.
- El 15% de los hombres estudian Bachillerato.
- El 20% de las mujeres estudian Bachillerato.
- El 30% de las mujeres que estudian Bachillerato eligen la opción de letras.

(a) Calcular la probabilidad de que un alumno de ese IES, elegido al azar, sea mujer, estudie Bachillerato y curse la opción de letras, (b) ¿Qué porcentaje del alumnado estudia Bachillerato? (c) ¿Qué porcentaje de los estudiantes de Bachillerato son hombres?

2.- Un fabricante de bombillas de bajo consumo sabe que el tiempo de duración, en horas, de las bombillas que fabrica sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 180 horas.
Con una muestra de dichas bombillas, elegida al azar, y un nivel de confianza del 97%, ha obtenido para la media el intervalo de confianza (10072'1, 10127' 9).
(a) Calcular el valor que obtuvo para la media de la muestra y el tamaño de muestra utilizado.
(b) Si se quiere que el error de su estimación sea como máximo de 24 horas y se utiliza una muestra de tamaño 225, ¿cuál será entonces el nivel de confianza?

JUNIO 2007

1.-En una ciudad en la que hay doble número de hombres que de mujeres se declara una epidemia. Un 4% de los habitantes son hombres y están enfermos, mientras que un 3% son mujeres y están enfermas. Se elige al azar un habitante de ciudad, calcular

a) la probabilidad de que sea hombre

b) si es hombre, la probabilidad de que esté enfermo

c) la probabilidad de que la persona sea mujer o esté sana

2.-El gasto mensual (en euros) en electricidad por familia, para las familias de cierta ciudad, sigue una distribución normal de media **μ** desconocida y desviación tipica **σ**=25 euros

a) A partir de una muestra de 100 familias de esa ciudad se ha obtenido el intervalo de confianza (45, 55) para el gasto medio mensual por familia en electricidad. Determinar el nivel de confianza con que se ha construido el intervalo

b)¿Qué número de familias tendríamos que seleccionar al azar , como mínimo, para garantizar, con un nivel de confianza del 99% , una estimación de dicho gasto medio con un error máximo no superior a 3 euros?

SEPTIEMBRE 2007

1.- En una ciudad, el 55% de la población en edad laboral son hombres; de ellos, un 12% está en el paro. Entre las mujeres el porcentaje de paro es del 23%. Si en esta ciudad se elige al azar una persona en edad laboral,

(a) ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre y no esté en el paro?

(b) ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer y esté en el paro?

(c) Calcular el porcentaje de paro en esa ciudad.

2.-En un determinado país se sabe que la altura de la población sigue una distribución normal con desviación típica de 10 cm.

a) Si la media poblacional fuese de 172 cm., calcular la probabilidad de que la media de una muestra de 64 personas esté comprendida entre 171 y 173 cm.

b) Si la media de una muestra de 64 personas es de 173,5 cm., hallar un intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza del 99%.

c)¿Qué tamaño de muestra se debe tomar para estimar la media de la altura de la población con un error menor de 2 cm. y un nivel de confianza del 95%?

JUNIO 2008

1.-En un mercado de valores cotizan un total de 60 empresas, de las que 15 son del sector bancario, 35 son industriales y 10 son del sector tecnológico. La probabilidad de que un banco de los que cotizan en el mercado se declares en quiebra es de 0,01 ; la probabilidad de que se declare en quiebra una empresa industrial es 0,02 y de que lo haga una empresa tecnológica es 0,1 .

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se produzca una quiebra en una empresa del citado mercado de valores?

b) Habiéndose producido una quiebra ¿cuál es la probabilidad de que se trate de una empresa tecnológica?

2.-En una determinada población se sabe que el valor de la tasa diaria de consumo de calorías sigue una distribución normal con desviación típica σ =400 calorías.

a) Si la media poblacional es μ = 1600 calorías y se elige al azar una muestra aleatoria de 100 personas de esa población , determinar la probabilidad de que el consumo medio diario de calorías en esa muestra esté comprendido entre 1550 y 1660 calorías

b) Si desconocemos la media μ y con el mismo tamaño de muestra se afirma que “el consumo medio diario en esa población toma valores entre 1530 y 1670 calorías” , ¿con qué nivel de confianza se realiza esa afirmación?

SEPTIEMBRE 2008

1.-En una determinada población, el 40% de sus habitantes son inmigrantes de los que el 65% trabaja en el campo, mientras que sólo el 20% de la población no inmigrante trabaja en el campo.

(a) ¿Qué porcentaje de la población trabaja en el campo?

(b) ¿Qué porcentaje de los que no trabajan en el campo son inmigrantes?

(c) ¿Qué porcentaje de la población trabaja en el campo o no es inmigrante?

Se sabe que el tiempo de reacción frente a cierto estímulo de los individuos de un grupo a estudio sigue una distribución normal con desviación típica a = 0'1 segundos.

(a) Para una muestra de 36 individuos de ese grupo se obtiene un tiempo medio de reacción de 2 segundos. Determinar, con un nivel de confianza del 99%, el intervalo para el tiempo medio de reacción frente al estímulo de los individuos del grupo.

(b) Se quiere estimar el tiempo medio de reacción con un error máximo de 0'02 segundos y tomando una muestra de 100 individuos, ¿cuál será entonces el nivel de confianza con el que se hace la estimación?

JUNIO 2009

1.-La tabla siguiente muestra el número de defunciones por grupo de edad y sexo en una muestra de 500 fallecimientos de cierta región

	Grupo de edad (años)			
	0-10 (D)	11-30 (T)	31-50 (C)	Mayor de 50 (V)
Hombres (H)	200	20	25	60
Mujeres (M)	120	15	20	40

(a) Describe cada uno de los siguientes sucesos y calcula sus probabilidades: *i)* $H \cup T$, *ii)* $M \cap (T \cup V)$, *iii)* $\overline{T} \cap \overline{H}$

(b) Calcula el porcentaje de fallecimientos con respecto al sexo.

(c) En el rango de edad de más de 50 años, ¿cuál es el porcentaje de hombres fallecidos?, ¿es mayor o menor que el de mujeres en ese mismo rango de edad?

2.-*(a)* La renta anual por familia para los residentes de un gran barrio sigue una distribución $N(\mu, \sigma)$, siendo la renta media anual por familia, μ, 20000 euros. Conocemos que, de 100 familias seleccionadas al azar de ese barrio, 67 tienen renta anual inferior a 20660 euros. ¿Cuál es entonces el valor de la desviación típica σ?

(b) Si la renta anual por familia sigue una distribución $N(20000, 1500)$, calcula el porcentaje de muestras de 36 familias cuya renta media anual supere los 19500 euros.

(e) ¿Qué número de familias tendríamos que seleccionar, como mínimo, para garantizar, con el 99% de confianza, una estimación de la renta media anual por familia para todo el barrio, con un error no superior a 300 euros?

SEPTIEMBRE 2009

1.-Una empresa quiere comercializar una herramienta eléctrica para la construcción y por lo tanto es probada por 3 de cada 5 trabajadores del sector. De los que la han probado, el 70% da una opinión favorable, el 5% da una opinión desfavorable y el resto opina que le es indiferente. De los que no han probado la herramienta, el 60% da una opinión favorable, el 30% opina que le es indiferente y el resto da una opinión desfavorable.
Se sabe que la empresa comercializará la herramienta si al menos el 65% de los trabajadores del sector da una opinión favorable.
(a) Si un trabajador elegido al azar da una opinión desfavorable, ¿cuál es la probabilidad de que haya probado la herramienta?
(b) ¿Qué porcentaje de trabajadores da una opinión favorable? ¿Comercializará la empresa la herramienta? Razona la respuesta.
(c) Calcula el porcentaje de trabajadores que prueba la herramienta y opina que le es indiferente.

2. Un diseñador industrial desea estimar el tiempo medio que tarda un adulto en ensamblar un cierto tipo de juguete. Por experiencias previas conoce que la variable tiempo de ensamblaje sigue una distribución normal, con media μ y desviación típica σ= 5 minutos.
(a) Seleccionada al azar una muestra de 64 adultos su media resultó ser de 20 minutos. ¿Entre qué valores se encuentra el tiempo medio real de ensamblaje, con una confianza del 95%?
(b) Supongamos que μ= 20 minutos. Por razones comerciales decide que cambiará el modelo de juguete si el tiempo medio de ensamblaje, en muestras de 64 adultos, es superior a 21 minutos, ¿con qué probabilidad tomará esa decisión?
(c) Calcula cuántos adultos deberá seleccionar, como mínimo, para garantizar, con un 95% de confianza, una estimación de dicho tiempo medio con un error no superior a un minuto.

JUNIO 2010

1.1.-Un estudio sociológico afirma que 3 de cada 10 personas de una determinada población son obesas, de las cuales el 60% sigue una dieta. Por otra parte, el 63% de la población no es obesa y no sigue una dieta.
(a) ¿Qué porcentaje de la población sigue una dieta?

(b) Si una persona elegida al azar sigue una dieta, ¿cuál es la probabilidad de que sea obesa?

1.2.- El peso (en gramos) de los pollos que llegan a un matadero sigue una distribución normal con una desviación típica de σ=320 gramos.
(a) Si se ha establecido el intervalo (2990, 3130) como intervalo de confianza para la media μ a partir de una muestra de 64 pollos, ¿cuál es el valor de la media muestral, $\overline{X}$?. ¿con qué nivel de confianza se ha construido el intervalo?
(b) ¿Cuántos pollos deberíamos pesar para que el nivel de confianza del intervalo anterior sea del 97%?

2.1.- Sean A y B sucesos tales que $P(A \cap B) = 0{,}1 ; P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}6 ; P(A / B) = 0{,}5$, donde $\overline{A}$ y $\overline{B}$ denotan los sucesos contrarios de A y B respectivamente.
(a) Calcula las probabilidades siguientes: P(B) y P(A∪B).
(b) ¿Son los sucesos A y B independientes? Justifica la respuesta.
2.2.- (a) Las puntuaciones de un test de aptitud realizado a los alumnos de un centro de enseñanza siguen una distribución normal N(μ=1000 , σ=600). Calcula la probabilidad de que la puntuación media, para una muestra de 64 alumnos, esté comprendida entre 964 y 1036 puntos.
(b) ¿Cuántos alumnos deberíamos seleccionar, como mínimo, para garantizar con un 99,5% de confianza una estimación de la puntuación media de todos los alumnos del centro, con un error no superior a 150 puntos?

SEPTIEMBRE 2010

1.1.- Se realiza un estudio para determinar si los hogares de una pequeña ciudad se suscribirían a un servicio de televisión por cable. Los hogares se clasifican de acuerdo a su nivel de renta: alta, media o baja. La siguiente tabla nos muestra las probabilidades de las distintas intersecciones:

	Renta baja	Renta media	Renta alta
Se suscribirían	0,05	0,15	0,10
No se suscribirian	0,15	0,47	0,08

(a) Si el hogar suscribe el servicio, ¿cuál es la probabilidad de que sea de renta alta?
(b) ¿Son renta y posible suscripción a la televisión por cable independientes? Justificar la respuesta.
(c) Calcula la probabilidad de que un hogar seleccionado al azar pertenezca al menos a una de estas categorías: "renta media" o "desean suscribirse".

1.2.- Un equipo de la guardia civil de tráfico realiza controles de velocidad en una travesía de una determinada población. Se sabe que la variable velocidad en travesía (en km/h) sigue una normal con media II. y desviación típica 0".
(a) Tras controlar el paso por la travesía de 100 vehículos, nos dicen que: "la velocidad media en travesía, μ, toma valores entre 56,08 km/h y 63,92 kmlh, con el 95% de confianza". Con esta información calcula σ y el valor de la media de la muestra $\overline{X}$
(b) Si tomamos como μ= 60 km/h y con el valor de σ = 20 km/h, calcula el porcentaje de muestras de 64 vehículos cuya velocidad media supere los 65 km/h.

2.1.- Un estudio estima que, en general, la probabilidad de que una empresa tecnológica no obtenga los beneficios anuales esperados es 0,5; la probabilidad de que una entidad bancaria no alcance al final del año tos beneficios esperados es 0,2 y la probabilidad de que ambas empresas no obtengan los beneficios anuales esperados es 0,1.
(a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una de las dos no obtenga los beneficios anuales esperados? (b) ¿Cuál es la probabilidad de que solamente una de las dos no obtenga los beneficios anuales esperados?

2.2.- (a) Si los salarios anuales de los trabajadores de cierta empresa se distribuyen según una N(μ;σ = 1200), calcula un intervalo del 95% de confianza para el salario medio anual de los trabajadores de la em presa, si para eso se seleccionan al azar 64 trabajadores y se obtiene que su salario medio anual es 26000 euros.
(b) ¿Qué tamaño de muestra se necesita para garantizar, con un 97% de confianza, una estimación del salario medio anual de los trabajadores de la empresa, con un error no superior a 200 euros?

JUNIO 2011

1.1.- Se quiere realizar un estudio sobre la situación laboral de los trabajadores en tres sectores de la economía que denotaremos por 8_1, 8_2 Y 8_3, La mitad de los trabajadores pertenecen al primer sector 8_1, yel resto se reparten en partes iguales entre los otros dos sectores 8_2 y 8_3. El 8% de los del sector 8_1, el 4% de los del sector 8_2 y el 6% de los del sector 8_3 están en el paro.

(a) Calcula el porcentaje de paro entre los trabajadores de dicho estudio.
(b) ¿Qué porcentaje de los que tienen trabajo pertenecen al tercer sector 8_3?

1.2.- La probabilidad de que se entregue un cheque sin fondos en una entidad bancaria es 0,14. Si en dicha entidad se reciben 900 cheques, calcula:
(a) El número esperado de cheques sin fondo.
(b) La probabilidad de que se entreguen más de 110 cheques sin fondo.

2.1.-Debido a la futura fusión de dos entidades de ahorro, un estudio preliminar estima que, como máximo, un 5% de los clientes causará baja en la nueva entidad resultante. Un analista de mercados sospecha que la proporción de bajas será mayor y, para contrastarlo, realiza una encuesta a 400 clientes, elegidos al azar, sobre su intención de seguir operando con la nueva entidad resultante de la fusión. De ellos, 370 contestan que seguirían con la nueva entidad.
(a) Plantea un test para contrastar la hipótesis de que la proporción es la que se formula en el estudio preliminar frente a la que sospecha el analista. ¿A qué conclusión se llega con un nivel de significación del 5%?
(b) Explica, en el contexto del problema, en qué consisten los errores de tipo I y de tipo II.

2.2.-Se conoce que la renta por persona declarada por todos los ciudadanos de un país sigue aproximadamente una distribución normal con media 10840 euros y desviación típica 2700 euros. Con objeto de analizar la renta de los contribuyentes domiciliados en una cierta Administración de Hacienda, se ha tomado una muestra aleatoria de 400 declaraciones, obteniéndose una renta media de 10500 euros por persona. Si se supone que se mantiene la desviación tí pica,
(a) plantea un test para contrastar la hipótesis de que la renta media de las declaraciones presentadas en la Administración es la misma que la global para todo el pafs, frente a que es menor, tal como parece indicar la muestra, y explica claramente a que conclusión se llega, con un nivel de significación del 1 %
(b) calcula un intervalo del 98% de confianza para la renta media de los contribuyentes de la citada Administración.