Ecuaciones

3

ACTIVIDADES

1. Escribe un polinomio de grado 3 y con término independiente −1. Determina sus términos y su valor numérico para x = 2 y x = −2.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$P(x)=2x^3+3x-1\to\begin{cases}P(2)=2\cdot 2^3+3\cdot 2-1=21\\ P(-2)=2\cdot(-2)^3+3\cdot(-2)-1=-23\end{cases}$$

2. Efectúa la siguiente operación de polinomios.

$$(-2x^3+x^2+x-1)(x-2)+(3x+1)(x+3)$$

$$-2x^3+x^2+x-1\ \ x-2\ +\ 3x+1\ \ x+3\ =-2x^4+5x^3+2x^2+7x+5$$

3. Dados los siguientes polinomios, calcula.

$$P(x)=x^3-3x^2+1 \qquad Q(x)=3x^2-2x-2$$

a) $P(1)+P(-1)$
b) $P(0)-2Q(0)$
c) $P(3)+Q(2)$
d) $P(-2)\cdot Q(-2)$
e) $P(-1)-3Q(-1)$
f) $Q(-4)+4Q(1)$

a) $P\ 1\ +P\ -1\ =-1-3=-4$

b) $P\ 0\ -2Q\ 0\ =1+4=5$

c) $P(3)+Q(2)=1+6=7$

d) $P\ -2\ \cdot Q\ -2\ =\ -19\ \cdot 14=-266$

e) $P\ -1\ -3Q\ -1\ =-3-9=-12$

f) $Q(-4)+4Q(1)=54-4=50$

4. Realiza estas divisiones de polinomios.

a) $(10x^4-3x^2+1):(x^2-1)$
b) $(6x^3+5x):(2x^2)$

a) $10x^4-3x^2+1\ :\ x^2-1\ =10x^2+7$ y el resto es 8.

b) $6x^3+5x\ :\ 2x^2\ =3xy$ y el resto es $5x$.

5. Divide estos polinomios utilizando la regla de Ruffini.

a) $(x^3+3):(x+1)$
b) $(4x^5-12x^3-20x+2):(x+2)$

a) $x^3+3\ :\ x+1\ =x^2-x+1$ y el resto es 2.

	1	0	0	3
−1		−1	1	−1
	1	−1	1	2

b) $4x^5-12x^3-20x+2\ :\ x+2\ =4x^4-8x^3+4x^2-8x-4$ y el resto es 10.

	4	0	−12	0	−20	2
−2		−8	16	−8	16	8
	4	−8	4	−8	−4	10

6. **Comprueba si los siguientes números son raíces del polinomio $P(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 6x - 8$.**

a) $x = 1$ b) $x = 2$ c) $x = -1$ d) $x = -4$

a) $P(1) = 1^4 + 3 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 - 8 = 0$

Por tanto, $x = 1$ es una raíz del polinomio.

b) $P(2) = 2^4 + 3 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 8 = 36$

c) $P(-1) = (-1)^4 + 3 \cdot (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) - 8 = -18$

d) $P(-4) = (-4)^4 + 3 \cdot (-4)^3 - 2 \cdot (-4)^2 + 6 \cdot (-4) - 8 = 0$

Por tanto, $x = -4$ es una raíz del polinomio.

7. **Calcula las raíces enteras de los polinomios que aparecen a continuación.**

a) $x^5 + 4x^4 + x^3 - 6x^2$ b) $x^3 - 5x^2 - 29x + 105$

a) $x^5 + 4x^4 + x^3 - 6x^2 = x^2 \; x^3 + 4x^2 + x - 6 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0 \end{cases}$

	1	4	1	−6
1		1	5	6
	1	5	6	0
−2		−2	−6	
	1	3	0	
−3		−3		
	1	0		

Las raíces enteras son {–3, –2, 0, 1}.

b) Se aplica Ruffini directamente:

	1	−5	−29	105
7		7	14	−105
	1	2	−15	0
−5		−5	15	
	1	−3	0	
3		3		
	1	0		

Las raíces enteras son {–5, 3, 7}.

8. **Factoriza estos polinomios.**

a) $2x^4 - 2x^2$ b) $x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 4x$

a) $2x^4 - 2x^2 = 2x^2 \; x - 1 \; x + 1$

b) $x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 4x = x \; x - 2^{\;2} \; x^2 + 1$

9. **Encuentra las raíces enteras de estos polinomios.**

a) $2x^4 - 13x^3 + 27x^2 - 18x$ b) $3x^3 - 7x^2 - 7x + 3$

a) $2x^4 - 13x^3 + 27x^2 - 18x = x\ \ 2x^3 - 13x^2 + 27x - 18 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^3 - 13x^2 + 27x - 18 = 0 \end{cases}$

	2	−13	27	−18
2		4	−18	18
	2	−9	9	0
3		6	−9	
	2	−3	0	

La última raíz no es entera: $2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}$.

Entonces, las raíces enteras son {0, 2, 3}.

b) Se aplica Ruffini directamente:

	3	−7	−7	3
−1		−3	10	−3
	3	−10	3	0
3		9	−3	
	3	−1	0	

La última raíz no es entera: $3x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3}$.

Entonces, las raíces enteras son {−1, 3}.

10. **Simplifica estas fracciones algebraicas.**

a) $\frac{x^2 + x}{x^2 + 2x + 1}$ b) $\frac{2x^2 + 2x - 12}{4x + 12}$

a) $\frac{x^2 + x}{x^2 + 2x + 1} = \frac{x\ \ x+1}{x+1\ \ x+1} = \frac{x}{x+1}$ b) $\frac{2x^2 + 2x - 12}{4x + 12} = \frac{2\ \ x-2\ \ x+3}{4\ \ x+3} = \frac{x-2}{2}$

11. **Reduce a común denominador estas fracciones.**

$\frac{5}{x^2 + 2x - 3}$ $\frac{3x}{x^2 - 1}$ $\frac{x - 1}{x^2 + 2x + 1}$

m.c.m. $(x^2 + 2x - 3, x^2 - 1, x^2 + 2x + 1) = \ x+1\ ^2\ \ x+3\ \ x-1$

$$\frac{5}{x^2 + 2x - 3} = \frac{5\ \ x+1\ ^2}{x+1\ ^2\ \ x+3\ \ x-1}$$

$$\frac{3x}{x^2 - 1} = \frac{3x\ \ x+1\ \ x+3}{x+1\ ^2\ \ x+3\ \ x-1}$$

$$\frac{x-1}{x^2 + 2x + 1} = \frac{x-1\ ^2\ \ x+3}{x+1\ ^2\ \ x+3\ \ x-1}$$

12. **Opera y simplifica.**

$$\frac{3}{3x^2+6x}+\frac{1}{x}-\frac{2-x}{6x+12}$$

$$\frac{3}{3x^2+6x}+\frac{1}{x}-\frac{2-x}{6x+12}=\frac{x^2+4x+18}{6x(x+2)}$$

13. **Realiza las siguientes operaciones.**

a) $\dfrac{5}{x^2+2x-3}\cdot\dfrac{x^2-1}{3x}$

b) $\dfrac{x-1}{x^2+2x+1}:\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$

a) $\dfrac{5}{x^2+2x-3}\cdot\dfrac{x^2-1}{3x}=\dfrac{5\;\;x-1\;\;x+1}{x+3\;\;x-1\cdot 3x}=\dfrac{5x+5}{3x^2+9x}$

b) $\dfrac{x-1}{x^2+2x+1}:\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}=\dfrac{x-1\;\;x+1}{x+1^{\,2}\;\;x-1\;\;x-2}=\dfrac{1}{x+1\;\;x-2}$

14. **Clasifica y resuelve estas ecuaciones de segundo grado.**

a) $x^2-10x+21=0$

b) $3x^2+20x+12=0$

c) $3x^2+9x-4=0$

d) $4x^2-12x+9=0$

e) $3x^2-18x=0$

f) $4x^2-36=0$

g) $-8x^2+40=0$

h) $-5x^2+30x=0$

a) Ecuación completa:

$$x^2-10x+21=0\rightarrow x=\frac{-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot 1\cdot 21}}{2\cdot 1}$$

$$\rightarrow x=\frac{10\pm 4}{2}\rightarrow\begin{cases}x_1=7\\x_2=3\end{cases}$$

b) Ecuación completa:

$$3x^2+20x+12=0\rightarrow x=\frac{-20\pm\sqrt{20^2-4\cdot 3\cdot 12}}{2\cdot 3}$$

$$\rightarrow x=\frac{-20\pm 16}{6}\rightarrow\begin{cases}x_1=-\dfrac{2}{3}\\x_2=-6\end{cases}$$

c) Ecuación completa:

$$3x^2+9x-4=0\rightarrow x=\frac{-9\pm\sqrt{9^2-4\cdot 3\cdot(-4)}}{2\cdot 3}$$

$$\rightarrow x=\frac{-9\pm\sqrt{129}}{6}\rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{-9+\sqrt{129}}{6}=0{,}39\\x_2=\dfrac{-9-\sqrt{129}}{6}=-3{,}39\end{cases}$$

d) Ecuación completa:

$$4x^2-12x+9=0\rightarrow x=\frac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4\cdot 4\cdot 9}}{2\cdot 4}$$

$$\rightarrow x=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$$

e) Ecuación incompleta:

$3x^2 - 18x = 0 \rightarrow 3x(x - 6) = 0 \rightarrow x_1 = 0 \qquad x_2 = 6$

f) Ecuación incompleta:

$4x^2 - 36 = 0 \rightarrow x = \sqrt{9} \rightarrow x_1 = -3 \qquad x_2 = 3$

g) Ecuación incompleta:

$-8x^2 + 40 = 0 \rightarrow x = \sqrt{5}$

h) Ecuación incompleta:

$-5x^2 + 30x = 0 \rightarrow 5x(-x + 6) = 0 \rightarrow x_1 = 0 \qquad x_2 = 6$

15. Resuelve estas ecuaciones.

a) $x^2 + 2x = 15$

b) $2x^2 = 7x + 2$

c) $3x^2 - 3 = 20 - 2(x - 5)$

d) $8x^2 + (2 - x)(5x + 1) = 15x + (3 + x)(x - 1) - 3$

a) $x^2 + 2x = 15 \rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot -15}}{2 \cdot 1} \rightarrow x = \frac{-2 \pm 8}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

b) $2x^2 = 7x + 2 \rightarrow 2x^2 - 7x - 2 = 0$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{-7^{\ 2} - 4 \cdot 2 \cdot -2}}{2 \cdot 2} \rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{65}}{4} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{7 - \sqrt{65}}{4} = -0{,}27 \\ x_2 = \dfrac{7 + \sqrt{65}}{4} = 3{,}77 \end{cases}$$

c) $3x^2 - 3 = 20 - 2\ \ x - 5\ \ \rightarrow 3x^2 + 2x - 33 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot -33}}{2 \cdot 3} \rightarrow x = \frac{-2 \pm 20}{6} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{11}{3} \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

d) $8x^2 + \ 2 - x\ \ 5x + 1\ = 15x + \ 3 + x\ \ x - 1\ - 3 \rightarrow 2x^2 - 8x + 8 = 0$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{-8^{\ 2} - 4 \cdot 2 \cdot 8}}{2 \cdot 2} \rightarrow x = \frac{8 \pm 0}{4} \rightarrow x = 2$$

16. Determina el número de soluciones que tiene cada ecuación sin resolverla.

a) $-2x^2 + 5x - 8 = 0$

b) $9x^2 + 30x + 25 = 0$

c) $-5x^2 + 9x - 6 = 0$

d) $2x^2 - x - 3 = 0$

e) $-x^2 + 9x - 2 = 0$

f) $0{,}34x^2 + 0{,}5x - 1 = 0$

Calculamos el discriminante:

a) $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-8) = -39 < 0$. No tiene solución real.

b) $\Delta = b^2 - 4ac = 30^2 - 4 \cdot 9 \cdot 25 = 0$. Tiene una solución.

c) $\Delta = b^2 - 4ac = 9^2 - 4 \cdot (-5) \cdot (-6) = -39 < 0$. No tiene solución real.

d) $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25 > 0$. Tiene dos soluciones.

e) $\Delta = b^2 - 4ac = 9^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2) = 73 > 0$. Tiene dos soluciones.

f) $\Delta = b^2 - 4ac = 0{,}5^2 - 4 \cdot 0{,}34 \cdot (-1) = 1{,}61 > 0$. Tiene dos soluciones.

17. **Resuelve las ecuaciones bicuadradas que aparecen a continuación.**

a) $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$

b) $x^4 - x^2 + 2 = 16x^2 - 14$

c) $11(x^4 + 1) - 7 = 25x^2(1 - x^2)$

a) $x^4 + 5x^2 - 36 = 0 \to z^2 + 5z - 36 = 0$

$$z = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36)}}{2 \cdot 1} \to z = \frac{-5 \pm 13}{2} \to \begin{cases} z_1 = -9 \\ z_2 = 4 \end{cases}$$

$z_1 = -9 \to x^2 = -9 \to$ No tiene solución real.

$z_2 = 4 \to x_1 = -2 \quad x_2 = 2$

b) $x^4 - x^2 + 2 = 16x^2 - 14 \to x^4 - 17x^2 + 16 = 0 \to z^2 - 17z + 16 = 0$

$$z = \frac{17 \pm \sqrt{(-17)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1} \to z = \frac{17 \pm 15}{2} \to \begin{cases} z_1 = 1 \\ z_2 = 16 \end{cases}$$

$z_1 = 1 \to x_1 = -1 \quad x_2 = 1$

$z_2 = 16 \to x_3 = -4 \quad x_4 = 4$

c) $11(x^4 + 1) - 7 = 25x^2(1 - x^2) \to 36x^4 - 25x^2 + 4 = 0 \to 36z^2 - 25z + 4 = 0$

$$z = \frac{25 \pm \sqrt{(-25)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 36}}{2 \cdot 36} \to z = \frac{25 \pm 7}{72} \to \begin{cases} z_1 = \dfrac{1}{4} \\ z_2 = \dfrac{4}{9} \end{cases}$$

$z_1 = \frac{1}{4} \to x_1 = -\frac{1}{2} \quad x_2 = \frac{1}{2}$

$z_2 = \frac{4}{9} \to x_3 = -\frac{2}{3} \quad x_4 = \frac{2}{3}$

18. **Resuelve estas ecuaciones con fracciones algebraicas.**

a) $\dfrac{x + 1}{x - 1} - 1 = \dfrac{1}{x}$

b) $\dfrac{2x^4 + 4}{x^4} = \dfrac{x^2 - 3}{x^2} + 2$

a) $\dfrac{x+1}{x-1} - 1 = \dfrac{1}{x} \to \dfrac{x(x+1)}{x(x-1)} - \dfrac{x(x-1)}{x(x-1)} = \dfrac{x-1}{x(x-1)} \to x = -1$

b) $\dfrac{2x^4+4}{x^4} = \dfrac{x^2-3}{x^2} + 2 \to \dfrac{2x^4+4}{x^4} = \dfrac{x^2(x^2-3)}{x^4} + \dfrac{2x^4}{x^4} \to x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

$x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \to z^2 - 3z - 4 = 0$

$$z = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} \to z = \frac{3 \pm 5}{2} \to \begin{cases} z_1 = -1 \\ z_2 = 4 \end{cases}$$

$z_1 = -1 \to x^2 = -1 \to$ No tiene solución real.

$z_2 = 4 \to x_1 = -2 \quad x_2 = 2$

19. **Resuelve estas ecuaciones con radicales.**

a) $x - 41 = 2\sqrt{x+1}$

b) $1 + 2\sqrt{x+1} = 3\sqrt{4x-3} - 4$

a) $x-41=2\sqrt{x+1} \to x^2-82x+1681=4\;x+1\; \to x^2-86x+1677=0$

$$x=\frac{86\pm\sqrt{-86\;^2-4\cdot 1\cdot 1677}}{2\cdot 1} \to x=\frac{86\pm\sqrt{688}}{2} \to \begin{cases} x_1=43-2\sqrt{43} \\ x_2=43+2\sqrt{43} \end{cases}$$

Tras la comprobación, se obtiene que $x_1=43+2\sqrt{43}$ es la única solución válida.

b) $1+2\sqrt{x+1}=3\sqrt{4x-3}-4 \to 4\;x+1\;=36x-30\sqrt{4x-3}-2 \to$

$\to 900\;4x-3\;=1024x^2-384x+36 \to 64x^2-249x+171=0$

$$x=\frac{249\pm\sqrt{-249\;^2-4\cdot 64\cdot 171}}{2\cdot 64} \to x=\frac{249\pm 135}{128} \to \begin{cases} x_1=\dfrac{57}{64} \\ x_2=3 \end{cases}$$

Tras la comprobación, se obtiene que $x_2=3$ es la única solución válida.

20. **Resuelve las siguientes ecuaciones que se encuentran en forma factorizada.**

a) $2(x-3)(x+5)(x-1)=0$

b) $x^2(x+4)(x-4)(x-9)=0$

c) $(3x-1)(2x+3)(x+2)=0$

d) $3x(x+5)^3(3x-1)=0$

e) $(x^2+x-2)(x^2-9)=0$

a) $x_1=-5 \quad x_2=1 \quad x_3=3$

b) $x_1=-4 \quad x_2=0 \quad x_3=0 \quad x_4=4 \quad x_5=9$

c) $x_1=-2 \quad x_2=-\dfrac{3}{2} \quad x_3=\dfrac{1}{3}$

d) $x_1=-5 \quad x_2=-5 \quad x_3=-5 \quad x_4=0 \quad x_5=\dfrac{1}{3}$

e) $x_1=-3 \quad x_2=-2 \quad x_3=1 \quad x_4=3$

21. **Factoriza las ecuaciones y resuélvelas.**

a) $x^4-2x^3-13x^2+38x-24=0$

b) $x^5-6x^4+10x^3-6x^2+9x=0$

c) $x^4+8x^3+17x^2+8x+16=0$

a) $(x-1)(x-2)(x-3)(x+4)=0$

$x_1=1 \quad x_2=2 \quad x_3=3 \quad x_4=-4$

b) $x(x-3)^2(x^2+1)=0$

$x_1=0 \quad x_2=3$

c) $(x+4)^2(x^2+1)=0$

$x=-4$

22. **Escribe una ecuación que tenga como soluciones 2, 3 y 7.**
¿Cuál es el mínimo grado que puede tener?

Respuesta abierta, por ejemplo:

$x-2\quad x-3\quad x-7\ =0\rightarrow$ El mínimo grado que puede tener es 3.

23. **Resuelve de estas ecuaciones logarítmicas.**

a) $\log(x-2)+\log(2x-1)=\log(3x-4)$
b) $\log(x+3)=\log(7x-27)-\log(x-4)$

a) $\log(x-2)+\log(2x-1)=\log(3x-4)\rightarrow(x-2)(2x-1)=3x-4\rightarrow 2x^2-8x+6=0\rightarrow\begin{cases}x_1=1\\x_2=3\end{cases}$

b) $\log(x+3)=\log(7x-27)-\log(x-4)\rightarrow(x+3)(x-4)=7x-27\rightarrow x^2-8x+15=0\rightarrow\begin{cases}x_1=5\\x_2=3\end{cases}$

24. **Soluciona las siguientes ecuaciones.**

a) $\log_3(2x-1)=1$
b) $\log_2(3x-2)=2$
c) $\log_x 2+\log_x 5=1$
d) $\log_x 12+\log_x 18=3$

a) $\log_3(2x-1)=1\rightarrow 3=2x-1\rightarrow x=2$

b) $\log_2(3x-2)=2\rightarrow 4=3x-2\rightarrow x=2$

c) $\log_x 2+\log_x 5=1\rightarrow\log_x 10=1\rightarrow x=10$

d) $\log_x 12+\log_x 18=3\rightarrow\log_x 216=3\rightarrow x^3=216\rightarrow x=6$

25. **Resuelve estas ecuaciones.**

a) $5^{3x+1}=625$
b) $2^{\frac{3x+1}{4}}=\frac{1}{32}$
c) $3^{x^2-7x+12}=729$
d) $5^{\frac{x-1}{x+2}}=25$
e) $4^{x^3-7x^2+12x+3}=64$
f) $4^{x-6}=32$
g) $3^{\frac{x-2}{3}}=\frac{1}{3}$
h) $6^{2x^2+\frac{3}{5}}=6^{\frac{23x}{10}}$
i) $17^{\frac{x-3}{3x-2}}=289$
j) $3^{x^4+13x^2+4}=3^{6x^3-12x}$

a) $5^{3x+1}=625\rightarrow 3x+1=4\rightarrow x=1$

b) $2^{\frac{3x+1}{4}}=\frac{1}{32}\rightarrow\frac{3x+1}{4}=-5\rightarrow x=-7$

c) $3^{x^2-7x+12}=729\rightarrow x^2-7x+12=6\rightarrow x^2-7x+6=0\rightarrow\begin{cases}x_1=-6\\x_2=-1\end{cases}$

d) $5^{\frac{x-1}{x+2}}=25\rightarrow\frac{x-1}{x+2}=2\rightarrow x=-5$

e) $4^{x^3-7x^2+12x+3}=64\rightarrow x^3-7x^2+12x+3=3\rightarrow x\ \ x^2-7x+12\ =0\rightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=3\\x_3=4\end{cases}$

f) $4^{x-6}=32\rightarrow 2(x-6)=5\rightarrow x=\frac{17}{2}$

g) $3^{\frac{x-2}{3}}=\frac{1}{3}\rightarrow\frac{x-2}{3}=-1\rightarrow x=-1$

h) $6^{2x^2+\frac{3}{5}}=6^{\frac{23}{10}}\rightarrow 2x^2+\frac{3}{5}=\frac{23}{10}\rightarrow 20x^2+6=23\rightarrow 20x^2=17\rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{17}{20}}$

i) $17^{\frac{x-3}{3x-2}}=289\rightarrow\frac{x-3}{3x-2}=2\rightarrow 5x=1\rightarrow x=\frac{1}{5}$

j) $3^{x^4+13x^2+4}=3^{6x^3-12x}\rightarrow x^4-6x^3+13x^2+12x+4=0\rightarrow\begin{cases}x_1=-\sqrt{2}\\x_2=\sqrt{2}\end{cases}$

26. Halla el valor de *x* en las siguientes ecuaciones.

a) $4^x=2^{x-6}$

b) $3^{\frac{7x-3}{4}}=9^{x-2}$

c) $49^x=7^{3-x^2}$

d) $5^{x^4+4}=25^{\frac{5x^2}{2}}$

a) $4^x=2^{x-6}\rightarrow 2x=x-6\rightarrow x=-6$

b) $3^{\frac{7x-3}{4}}=9^{x-2}\rightarrow\frac{7x-3}{4}=2(x-2)\rightarrow x=12$

c) $49^x=7^{3-x^2}\rightarrow 2x=3-x^2\rightarrow x^2+2x-3=0\rightarrow\begin{cases}x_1=-4\\x_2=1\end{cases}$

d) $5^{x^4+4}=25^{\frac{5x^2}{2}}\rightarrow x^4+4=5x^2\rightarrow\begin{cases}x_1=2\text{ y }x_2=-2\\x_3=1\text{ y }x_4=-1\end{cases}$

27. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $3^{2x-1}-2^x=0$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}+3^{2-x}=0$

c) $5^{3x+2}=3^{5x+2}$

d) $\sqrt[3]{3^{x^2}}=9^{x-1}$

a) $3^{2x-1}=2^x\rightarrow(2x-1)\log 3=x\log 2\rightarrow x(2\log 3-\log 2)=\log 3\rightarrow x=\frac{\log 3}{2\log 3-\log 2}\approx 0{,}7304$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}+3^{2-x}=0\rightarrow(3-x)\log\left(\frac{1}{2}\right)=(2-x)\log(-3)$

No existen logaritmos de números mayores o iguales que 0. La ecuación no tiene solución real.

c) $5^{3x+2}=3^{5x+2}\rightarrow(3x+2)\log 5=(5x+2)\log 3\rightarrow x(3\log 5-5\log 3)=2\log 3-2\log 5\rightarrow x=\frac{2\log 3-2\log 5}{3\log 5-5\log 3}\approx 1{,}5369$

d) $\sqrt[3]{3^{x^2}}=9^{x-1}\rightarrow 3^{\frac{x^2}{3}}=3^{2(x-1)}\rightarrow x^2-6x+6=0\rightarrow\begin{cases}x_1=3+\sqrt{3}\\x_2=3-\sqrt{3}\end{cases}$

SABER HACER

28. Determina el valor de *k* en cada uno de los siguientes casos.

a) $3x^2 - 6x + k = 0$ tenga 2 soluciones.

b) $3x^2 - 6x + k = 0$ tenga 1 solución.

c) $3x^2 - 6x + k = 0$ no tenga solución.

d) $x^2 + kx + 25 = 0$ tenga 2 soluciones.

e) $x^2 + kx + 25 = 0$ tenga 1 solución.

f) $x^2 + kx + 25 = 0$ no tenga solución.

a) $-6^{2} - 4 \cdot 3 \cdot k > 0 \rightarrow 36 - 12k > 0 \rightarrow k < 3$

b) $-6^{2} - 4 \cdot 3 \cdot k = 0 \rightarrow 36 - 12k = 0 \rightarrow k = 3$

c) $-6^{2} - 4 \cdot 3 \cdot k < 0 \rightarrow 36 - 12k < 0 \rightarrow k > 3$

d) $k^2 - 4 \cdot 25 \cdot 1 > 0 \rightarrow k^2 - 100 > 0$

k debe pertenecer al intervalo $-\infty, -10 \cup 10, +\infty$

e) $k^2 - 4 \cdot 25 \cdot 1 = 0 \rightarrow k^2 - 100 = 0 \rightarrow k_1 = -10 \quad k_2 = 10$

f) $k^2 - 4 \cdot 25 \cdot 1 < 0 \rightarrow k^2 - 100 < 0$

k debe pertenecer al intervalo $-10, 10$.

29. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

b) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$

c) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

d) $x^6 + 9x^3 + 8 = 0$

e) $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$

f) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$

a) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0 \rightarrow z^2 - 9z + 8 = 0$

$$z = \frac{9 \pm \sqrt{-9^{2} - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} \rightarrow z = \frac{9 \pm 7}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 1 \\ z_2 = 8 \end{cases}$$

$z_1 = 1 \rightarrow x^3 = 1 \rightarrow x_1 = 1 \qquad z_2 = 8 \rightarrow x^3 = 8 \rightarrow x_2 = 2$

b) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0 \rightarrow z^2 + 7z - 8 = 0$

$$z = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot -8}}{2 \cdot 1} \rightarrow z = \frac{-7 \pm 9}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = -8 \\ z_2 = 1 \end{cases}$$

$z_1 = -8 \rightarrow x^3 = -8 \rightarrow x_1 = -2 \qquad z_2 = 1 \rightarrow x^3 = 1 \rightarrow x_2 = 1$

c) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0 \rightarrow z^2 - 7z - 8 = 0$

$$z = \frac{7 \pm \sqrt{-7^{2} - 4 \cdot 1 \cdot -8}}{2 \cdot 1} \rightarrow z = \frac{7 \pm 9}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = -1 \\ z_2 = 8 \end{cases}$$

$z_1 = -1 \rightarrow x^3 = -1 \rightarrow x_1 = -1 \qquad z_2 = 8 \rightarrow x^3 = 8 \rightarrow x_2 = 2$

d) $x^6 + 9x^3 + 8 = 0 \rightarrow z^2 + 9z + 8 = 0$

$$z = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} \rightarrow z = \frac{-9 \pm 7}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = -8 \\ z_2 = -1 \end{cases}$$

$z_1 = -8 \rightarrow x^3 = -8 \rightarrow x_1 = -2 \qquad z_2 = -1 \rightarrow x^3 = -1 \rightarrow x_2 = -1$

e) $x^8 - 15x^4 - 16 = 0 \rightarrow z^2 - 15z - 16 = 0$

$$z = \frac{15 \pm \sqrt{-15^{\,2} - 4 \cdot 1 \cdot -16}}{2 \cdot 1} \rightarrow z = \frac{15 \pm 17}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = -1 \\ z_2 = 16 \end{cases}$$

$z_1 = -1 \rightarrow x^4 = -1 \rightarrow$ No tiene solución real $\quad z_2 = 16 \rightarrow x^4 = 16 \rightarrow x_1 = -2 \quad x_2 = 2$

f) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0 \rightarrow z^2 - 17z + 16 = 0$

$$z = \frac{17 \pm \sqrt{-17^{\,2} - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1} \rightarrow z = \frac{17 \pm 15}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 1 \\ z_2 = 16 \end{cases}$$

$z_1 = 1 \rightarrow x^4 = 1 \rightarrow x_1 = -1 \quad x_2 = 1 \qquad z_2 = 16 \rightarrow x^4 = 16 \rightarrow x_3 = -2 \quad x_4 = 2$

30. Resuelve las siguientes ecuaciones con fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{2x^3 - x^2 - 2x + 25}{x^2 - 1} = 2x$ b) $\dfrac{x^3 + x^2 + 7x + 2}{x^2 + 2x + 4} = x - 2$ c) $\dfrac{x^3 + 5x^2 - 5x - 21}{x^2 + x - 6} = x + 3$

a) $\dfrac{2x^3 - x^2 - 2x + 25}{x^2 - 1} = 2x \rightarrow x^2 - 25 = 0 \rightarrow x_1 = -5 \quad x_2 = 5$

b) $\dfrac{x^3 + x^2 + 7x + 2}{x^2 + 2x + 4} = x - 2 \rightarrow x^2 + 7x + 10 = 0 \rightarrow x_1 = -2 \quad x_2 = -5$

c) $\dfrac{x^3 + 5x^2 - 5x - 21}{x^2 + x - 6} = x + 3 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x_1 = -1 \quad x_2 = 3$

31. Resuelve las siguientes ecuaciones con fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{x^2 - x}{3x + 1} = \dfrac{-x}{2x - 1}$

b) $\dfrac{x}{x + 6} = \dfrac{x - 5}{x - 3}$

c) $\dfrac{x - 1}{x - 3} = \dfrac{x - 2}{x - 4}$

d) $\dfrac{x - 3}{x - 1} = \dfrac{x - 4}{x - 2}$

a) $\dfrac{x^2 - x}{3x + 1} = \dfrac{-x}{2x - 1} \rightarrow 2x^3 + 2x = 0 \rightarrow x = 0$

b) $\dfrac{x}{x + 6} = \dfrac{x - 5}{x - 3} \rightarrow 4x - 30 = 0 \rightarrow x = \dfrac{15}{2}$

c) $\dfrac{x - 1}{x - 3} = \dfrac{x - 2}{x - 4} \rightarrow 2 = 0 \rightarrow$ No tiene solución.

d) $\dfrac{x - 3}{x - 1} = \dfrac{x - 4}{x - 2} \rightarrow 2 = 0 \rightarrow$ No tiene solución.

32. Resuelve estas ecuaciones.

a) $\sqrt{x^2 - 3} = 1$

b) $x = \sqrt{x + 6}$

c) $\dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{x}{2} + 6}$

d) $\sqrt{3x + 19} = x + 3$

a) $\sqrt{x^2-3}=1 \rightarrow x^2-4=0 \rightarrow x_1=-2 \quad x_2=2$

b) $x=\sqrt{x+6} \rightarrow x^2-x-6=0 \rightarrow x_1=-2 \quad x_2=3$

c) $\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{x}{2}+6} \rightarrow x^2-2x-24=0 \rightarrow x_1=-4 \quad x_2=6$

d) $\sqrt{3x+19}=x+3 \rightarrow x^2+3x-10=0 \rightarrow x_1=2 \quad x_2=-5$

Tras sustituir el par de soluciones obtenidas en su correspondiente ecuación, se puede afirmar que todas son soluciones válidas.

33. Resuelve estas ecuaciones.

a) $\sqrt{2x+8}-\sqrt{x}=2$

b) $\sqrt{x^2-5}+\sqrt{x-2}=3$

c) $\sqrt{2x}+\sqrt{4x-7}=x+1$

d) $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x^2+3x+9}=2x+1$

a) $\sqrt{2x+8}-\sqrt{x}=2 \rightarrow x^2-8x+16=0 \rightarrow x=4$

b) $\sqrt{x^2-5}+\sqrt{x-2}=3 \rightarrow x^4-2x^3-23x^2-12x+216=0 \rightarrow x=3$

c) $\sqrt{2x}+\sqrt{4x-7}=x+1 \rightarrow x^4-8x^3-8x+64=0 \rightarrow x=2 \quad x=8$

d) $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x^2+3x+9}=2x+1 \rightarrow 9x^4-24x^3-90x^2-84x+45=0 \rightarrow x=5$

34. Resuelve estas ecuaciones.

a) $x^3-3x^2+2x=0$

b) $3x^5-13x^4+16x^3-4x^2=0$

c) $4x^5-12x^4+9x^3-2x^2=0$

d) $x^4-1=0$

a) $x^3-3x^2+2x=0 \rightarrow x\ \ x-1\ \ x-2\ =0 \rightarrow x_1=0 \quad x_2=1 \quad x_3=2$

b) $3x^5-13x^4+16x^3-4x^2=0 \rightarrow x^2\ \ 3x-1\ \ x-2\ ^2=0 \rightarrow x_1=0 \quad x_2=\frac{1}{3} \quad x_3=2$

c) $4x^5-12x^4+9x^3-2x^2=0 \rightarrow x^2\ \ 2x-1\ ^2\ \ x-2\ =0 \rightarrow x_1=0 \quad x_2=\frac{1}{2} \quad x_3=2$

d) $x^4-1=0 \rightarrow\ \ x-1\ \ x+1\ \ x^2+1\ =0 \rightarrow x_1=-1 \quad x_2=1$

35. Calcula el valor de *x* en los logaritmos que aparecen a continuación.

a) $\log_5 x=4$

b) $\log(x-1)=2$

c) $\log_3(7x-1)=3$

d) $\log(x^2+36)=2$

a) $\log_5 x=4 \rightarrow x=5^4=625$

b) $\log\ (x-1)=2 \rightarrow x-1=100 \rightarrow x=101$

c) $\log_3(7x-1)=3 \rightarrow 7x-1=27 \rightarrow x=4$

d) $\log\ (x^2+36)=2 \rightarrow x^2+36=100 \rightarrow x^2=64 \rightarrow \begin{cases} x_1=8 \\ x_2=-8 \end{cases}$

36. Calcula el valor de *x* en las expresiones que aparecen a continuación.

a) $\log_x 32 = 5$

b) $\log_x 0{,}1 = -1$

c) $\log_{x^2} 64 = 3$

d) $\log_{(x-2)} 27 = 3$

a) $\log_x 32 = 5 \rightarrow x^5 = 2^5 \rightarrow x = 2$

b) $\log_x 0{,}1 = -1 \rightarrow x^{-1} = 10^{-1} \rightarrow x = 10$

c) $\log_{x^2} 64 = 3 \rightarrow x^6 = 2^6 \rightarrow x = 2$

d) $\log_{(x-2)} 27 = 3 \rightarrow (x-2)^3 = 3^3 \rightarrow x - 2 = 3 \rightarrow x = 5$

37. Un fabricante quiere mezclar un producto A, que cuesta 40 €/kg, con otro producto B, que cuesta 20 €/kg. Para obtener una mezcla de 50 kg y cuyo coste sea de 1 650 €, averigua las cantidades que tiene comprar de cada producto y a cuánto debe vender para obtener un beneficio bruto del 20 %.

	Kilogramos	Precio total
Producto A	x	$40x$
Producto B	$50 - x$	$20(50 - x)$
Total	50	1 650

Tenemos que resolver la ecuación: $40x + 20(50 - x) = 1\,650$

$40x + 20(50 - x) = 1\,650 \rightarrow 40x + 1\,000 - 20x = 1\,650 \rightarrow 20x = 650 \rightarrow x = 32{,}50$

De modo que la mezcla lleva 32,5 kilos de producto A y 17,5 kilos de producto B.

El kilo sale a $\frac{1650}{50} = 3$ €, de modo que para obtener un 20 % de beneficio, hay que vender el kilo de mezcla a $33 \cdot 1{,}20 = 39{,}60$ €.

ACTIVIDADES FINALES

38. Escribe en cada caso un polinomio como se indica y halla su valor para $x = 3$ y $x = -1$.

a) De grado 4 y sin término independiente.

b) De grado 3 y sin términos de grado 2 ni 1.

c) De grado 2 y la suma de sus coeficientes sea 10.

d) Que sea un binomio de grado 3 con término independiente.

Respuesta abierta, por ejemplo:

a) $P(x) = x^4 + x \rightarrow \begin{cases} P(3) = 3^4 + 3 = 84 \\ P(-1) = (-1)^4 - 1 = 0 \end{cases}$

b) $P(x) = 4x^3 + 2 \rightarrow \begin{cases} P(3) = 4 \cdot 3^3 + 2 = 110 \\ P(-1) = 4 \cdot (-1)^3 + 2 = -2 \end{cases}$

c) $P(x) = 2x^2 + 5x + 3 \rightarrow \begin{cases} P(3) = 2 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 + 3 = 36 \\ P(-1) = 2 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1) + 3 = 0 \end{cases}$

d) $P(x) = x^3 - 1 \rightarrow \begin{cases} P(3) = 3^3 - 1 = 26 \\ P(-1) = (-1)^3 - 1 = -2 \end{cases}$

39. Efectúa las siguientes operaciones de polinomios.

a) $(3x^2 - 2x + 5) + (x^3 - 5x^2 + 2x - 1) - (x^4 + 1)$

b) $\left(-2x^3 + \frac{5}{2}x - 1\right) \cdot \left(x + \frac{2}{3}\right)$

c) $(5 + 3x^2)\left[\left(9 - \frac{x^3}{3}\right) - \left(x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 5\right)\right]$

d) $(3x - 2) \cdot (2x - 3) - \left[\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\left(x - \frac{x^2}{2}\right)\right]$

a) $(3x^2 - 2x + 5) + (x^3 - 5x^2 + 2x - 1) - (x^4 + 1) = -x^4 - 2x^2 + 3$

b) $\left(-2x^3 + \frac{5}{2}x - 1\right) \cdot \left(x + \frac{2}{3}\right) = -2x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$

c) $5 + 3x^2 \left[\left(9 - \frac{x^3}{3}\right) - \left(x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 5\right)\right] = -3x^6 - x^5 - \frac{28}{5}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 11x^2 + 20$

d) $(3x - 2) \cdot (2x - 3) - \left[\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\left(x - \frac{x^2}{2}\right)\right] = 6x^2 - 9x - 4x + 6 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^4}{3} + \frac{x^5}{6} + \frac{x^5}{4} - \frac{x^6}{8} =$

$= -\frac{x^6}{8} + \frac{5}{12}x^5 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 6x^2 - 13x + 6$

40. Halla el valor numérico del polinomio para los siguientes valores de *x*.

$$P(x) = 6x^4 - 61x^3 + 185x^2 - 158x + 40$$

a) $x = -5$ c) $x = 4$ e) $x = -\frac{1}{2}$ g) $x = -\frac{2}{3}$

b) $x = 5$ d) $x = -4$ f) $x = \frac{1}{2}$ h) $x = \frac{2}{3}$

a) $P(-5) = 6 \cdot (-5)^4 - 61 \cdot (-5)^3 + 185 \cdot (-5)^2 - 158 \cdot (-5) + 40 = 16830$

b) $P(5) = 6 \cdot 5^4 - 61 \cdot 5^3 + 185 \cdot 5^2 - 158 \cdot 5 + 40 = 0$

c) $P(4) = 6 \cdot 4^4 - 61 \cdot 4^3 + 185 \cdot 4^2 - 158 \cdot 4 + 40 = 0$

d) $P(-4) = 6 \cdot (-4)^4 - 61 \cdot (-4)^3 + 185 \cdot (-4)^2 - 158 \cdot (-4) + 40 = 1264$

e) $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 - 61 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 185 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 158 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 40 = \frac{693}{4}$

f) $P\left(\frac{1}{2}\right) = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 - 61 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 185 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 158 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 40 = 0$

g) $P\left(-\frac{2}{3}\right) = 6 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^4 - 61 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^3 + 185 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 158 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 40 = \frac{6\,664}{27}$

h) $P\left(\frac{2}{3}\right) = 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 - 61 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + 185 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 158 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) + 40 = 0$

41. **Realiza las siguientes divisiones de polinomios y di cuál es el polinomio cociente y el resto en cada caso.**

a) $(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1) : (x^2 - 3)$
b) $(5x^2 - 3x + 2) : (2x - 3)$
c) $(3x^6 + 5x^3 - x + 3) : (x^3 - 2x + 1)$
d) $(x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1) : (x^3 - x + 1)$

a) $(x^5+x^4+x^3+x^2+1):(x^2-3)=x^3+x^2+4x+4$ con resto $-12x-11$

b) $(5x^2-3x+2):(2x-3)=\frac{5}{2}x+\frac{9}{4}$ con resto $\frac{35}{4}$.

c) $(3x^6+5x^3-x+3):(x^3-2x+1)=3x^3+6x+2$ con resto $12x^2-3x+1$.

d) $(x^8-x^6+x^4-x^2+1):(x^3-x+1)=x^5-x^2+x-1$ con resto x^2-2x+2.

42. **Divide los siguientes polinomios utilizando la regla de Ruffini.**

a) $(2x^5 + 3x^4 + 7x^3 - 11x^2 - 1) : (x - 1)$
b) $(4x^2 - x + 1) : (x + 1)$
c) $(3x^6 + 5x^3 - x + 3) : (x + 3)$
d) $(x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1) : (x - 2)$

a)

	2	3	7	−11	0	−1
1		2	5	12	1	1
	2	5	12	1	1	0

Cociente: $2x^4+5x^3+12x^2+x+1$ Resto: 0

b)

	4	−1	1
−1		−4	5
	4	−5	6

Cociente: $4x-5$ Resto: 6

c)

	3	0	0	5	0	−1	3
−3		−9	27	−81	228	−684	2 055
	3	−9	27	−76	228	−685	2 058

Cociente: $3x^5-9x^4+27x^3-76x^2+228x-685$ Resto: 2058

d)

	1	0	−1	0	1	0	−1	0	1
2		2	4	6	12	26	52	102	204
	1	2	3	6	13	26	51	102	205

Cociente: $x^7+2x^6+3x^5+6x^4+13x^3+26x^2+51x+102$ Resto: 205

43. **Comprueba si los valores $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$ son raíces de estos polinomios.**

a) $x^5 - x^4 - 3x^3 + x^2 + 2x$
b) $x^5 + 4x^4 - 6x^3 - 6x^2 - 7x - 10$
c) $x^5 - 1$
d) $x^5 - x^4 - \frac{13}{4}x^3 + \frac{13}{4}x^2 - 3x + 3$

	$P(x)$	$P(-1)$	$P(0)$	$P(1)$	Raíces
a)	$x^5-x^4-3x^3+x^2+2x$	0	0	0	$x_1=-1$ $x_2=1$ $x_3=0$
b)	$x^5+4x^4-6x^3-6x^2-7x-10$	0	−10	−24	$x=-1$
c)	x^5-1	−2	−1	0	$x=1$
d)	$x^5-x^4-\frac{13}{4}x^3+\frac{13}{4}x^2-3x+3$	$\frac{21}{2}$	3	0	$x=1$

44. **Señala cuáles de los siguientes polinomios tienen entre sus raíces los valores $x=-2$ y $x=1$.**

a) $4x^3+3x^2-9x+2$

b) $x^5-3x^4-7x^3+27x^2-18x$

c) $x^5-2x^4-22x^3+8x^2+117x+90$

d) $x^5-6x^4-6x^3+64x^2-27x-90$

	$P(x)$	$P(-2)$	$P(1)$	Raíces
a)	$4x^3+3x^2-9x+2$	0	0	$x=-2$ $x=1$
b)	$x^5-3x^4-7x^3+27x^2-18x$	120	0	$x=1$
c)	$x^5-2x^4-22x^3+8x^2-117x+90$	468	−43	Ninguna es raíz
d)	$x^5-6x^4-6x^3+64x^2-27x-90$	140	−64	Ninguna es raíz

45. **Comprueba si $M(x)=2x^3-5x^2+4x-4$ es divisible entre $x-2$ y, en caso afirmativo, encuentra un polinomio $N(x)$ que permita escribir $M(x)$ de la forma $M(x)=(x-2)\cdot N(x)$.**

Dividimos el polinomio entre $x-2$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & 4 & -4 \\ 2 & & 4 & -2 & 4 \\ \hline & 2 & -1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

El polinomio $N(x)$ es el cociente:

$N(x)=2x^2-x+2$

46. **Determina las raíces de los siguientes polinomios.**

a) $(x-3)(x+5)(x-2)$

b) $x(x-2)^2(2x+1)$

c) $(2x-1)(3x+2)(x+3)^2$

d) x^3-3x^2-6x+8

e) $x^3+8x^2+17x+10$

f) $3x^3+7x^2-22x-8$

g) $2x^4-11x^3+21x^2-16x+4$

h) $x^4-4x^3-12x^2+32x+64$

a) $x_1=-5$ $x_2=2$ $x_3=3$

b) $x_1=-\frac{1}{2}$ $x_2=0$ $x_3=2$

c) $x_1=-3$ $x_2=-\frac{2}{3}$ $x_3=\frac{1}{2}$

d)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -6 & 8 \\ 1 & & 1 & -2 & -8 \\ \hline & 1 & -2 & -8 & \boxed{0} \\ -2 & & -2 & 8 & \\ \hline & 1 & -4 & \boxed{0} & \\ 4 & & 4 & & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

$x_1=-2$ $x_2=1$ $x_3=4$

e)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 8 & 17 & 10 \\ -1 & & -1 & -7 & -10 \\ \hline & 1 & 7 & 10 & \boxed{0} \\ -2 & & -2 & -10 & \\ \hline & 1 & 5 & \boxed{0} & \\ -5 & & -5 & & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

$x_1 = -5 \qquad x_2 = -2 \qquad x_3 = -1$

f)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 7 & -22 & -8 \\ 2 & & 6 & 26 & 8 \\ \hline & 3 & 13 & 4 & \boxed{0} \\ -4 & & -12 & -4 & \\ \hline & 3 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$3x + 1 = 0$

$x = -\dfrac{1}{3}$

$x_1 = -4 \qquad x_2 = -\dfrac{1}{3} \qquad x_3 = 2$

g)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & -11 & 21 & -16 & 4 \\ 1 & & 2 & -9 & 12 & -4 \\ \hline & 2 & -9 & 12 & -4 & \boxed{0} \\ 2 & & 4 & -10 & 4 & \\ \hline & 2 & -5 & 2 & \boxed{0} & \\ 2 & & 4 & -2 & & \\ \hline & 2 & -1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

$2x - 1 = 0$

$x = \dfrac{1}{2}$

$x_1 = \dfrac{1}{2} \qquad x_2 = 1 \qquad x_3 = 2$

h)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -4 & -12 & 32 & 64 \\ -2 & & -2 & 12 & 0 & -64 \\ \hline & 1 & -6 & 0 & 32 & \boxed{0} \\ -2 & & -2 & 16 & -32 & \\ \hline & 1 & -8 & 16 & \boxed{0} & \\ 4 & & 4 & -16 & & \\ \hline & 1 & -4 & \boxed{0} & & \\ 4 & & 4 & & & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & & & \end{array}$$

$x_1 = -2 \qquad x_2 = 4$

47. Halla las raíces de estos polinomios.

a) $(x + 2)(x - 5)(x - 1)$ c) $(x^2 - 4)(x^2 - 9)$

b) $x^2(x + 2)(3x - 1)$ d) $6x^4 + 13x^3 - 18x^2 - 7x + 6$

a) $x_1 = -2 \qquad x_2 = 1 \qquad x_3 = 5$ c) $x_1 = -3 \qquad x_2 = -2 \qquad x_3 = 2 \qquad x_4 = 3$

b) $x_1 = -2 \qquad x_2 = 0 \qquad x_3 = \dfrac{1}{3}$ d) $x_1 = -3 \qquad x_2 = -\dfrac{2}{3} \qquad x_3 = \dfrac{1}{2} \qquad x_4 = 1$

48. **Escribe un polinomio de segundo grado, $Q(x)$, que tenga las raíces 1 y 3, y tal que $Q(0) = 6$.**

$$Q(x) = c\cdot(x-1)(x-3) = cx^2 - 4cx + 3c$$

$$Q(0) = 3c = 6 \rightarrow c = 2 \rightarrow Q(x) = 2x^2 - 8x + 6$$

49. **Obtén el valor de m para que el polinomio $P(x) = mx^3 - 6x^2 - 4x + 8$ tenga 2 por raíz.**

$$P(2) = 8m - 24 - 8 + 8 = 0 \rightarrow 8m - 24 = 0 \rightarrow m = 3$$

50. **Halla q para que el polinomio $x^3 - 2x^2 + qx + 5$ sea divisible entre el polinomio $x + 1$.**

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & q & 5 \\ -1 & & -1 & 3 & -3-q \\ \hline & 1 & -3 & 3+q & \boxed{2-q} \end{array} \rightarrow 2 - q = 0 \rightarrow q = 2$$

51. **¿Qué valor debe tomar a para que el resto de dividir $x^3 + ax^2 - 3x - a$ entre $x - 4$ sea 67?**

Dividimos el polinomio entre $x - 4$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & a & -3 & -a \\ 4 & & 4 & 16+4a & 52+16a \\ \hline & 1 & 4+a & 13+4a & \boxed{52+15a} \end{array}$$

Igualamos el resto a 67:

$52 + 15a = 67 \rightarrow a = 1$

52. **Halla a y b para que el polinomio $x^3 + ax^2 + bx - 6$ sea divisible entre $x - 2$ y entre $x + 3$.**

Dividimos el polinomio entre $x - 2$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & a & b & -6 \\ 2 & & 2 & 4+2a & 8+4a+2b \\ \hline & 1 & 2+a & 4+2a+b & \boxed{2+4a+2b} \end{array}$$

Dividimos el polinomio entre $x + 3$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & a & b & -6 \\ -3 & & -3 & 9-3a & -27+9a-3b \\ \hline & 1 & -3+a & 9-3a+b & \boxed{-33+9a-3b} \end{array}$$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2+4a+2b=0 \\ -33+9a-3b=0 \end{array}\right\} \rightarrow a = 2 \qquad b = -5$$

53. **Escribe dos polinomios de segundo grado cuyas raíces sean 2 y -3.**

Respuesta abierta, por ejemplo:

$P(x) = x^2 + x - 6$ $\qquad$ $Q(x) = 2x^2 + 2x - 12$

54. **Escribe un polinomio de tercer grado cuya única raíz sea −1.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$P\ \ x\ = x^3 + x^2 + x + 1$

55. **Encuentra un polinomio $P(x)$ de segundo grado cuyas raíces sean 1 y −2, y tal que $P(3) = 30$.**

$P\ \ x\ = c \cdot\ \ x - 1\ \ \ x + 2\ = cx^2 + cx - 2c$

$P\ \ 3\ = 9c + 3c - 2c = 30 \rightarrow c = 3 \rightarrow P\ \ x\ = 3x^2 + 3x - 6$

56. **Escribe un polinomio $Q(x)$ de tercer grado cuyas raíces sean 1, −1 y −2, y tal que $Q(0) = -6$.**

$Q\ \ x\ = c \cdot\ \ x - 1\ \ \ x + 1\ \ \ x + 2\ = cx^3 + 2cx^2 - cx - 2c$

$Q\ \ 0\ = -2c = -6 \rightarrow c = 3 \rightarrow Q\ \ x\ = 3x^3 + 6x^2 - 3x - 6$

57. **Realiza las siguientes sumas y restas de fracciones algebraicas.**

a) $\dfrac{y^2}{x} + \dfrac{x^3}{y^2} - \dfrac{3}{x^2}$

b) $\dfrac{5}{x} + \dfrac{3x - 2}{x + 1}$

c) $\dfrac{3x^2}{x^2 - 4} + \dfrac{2}{x - 2} + \dfrac{5x}{x + 2}$

d) $\dfrac{1 - x}{x + 1} + \dfrac{x + 1}{x - 1} - \dfrac{2}{x^2 - 1}$

a) $\dfrac{y^2}{x} + \dfrac{x^3}{y^2} - \dfrac{3}{x^2} = \dfrac{xy^4}{x^2y^2} + \dfrac{x^5}{x^2y^2} - \dfrac{3y^2}{x^2y^2} = \dfrac{x^5 + xy^4 - 3y^2}{x^2y^2}$

b) $\dfrac{5}{x} + \dfrac{3x - 2}{x + 1} = \dfrac{5x + 5}{x\ \ x + 1} + \dfrac{3x^2 - 2x}{x\ \ x + 1} = \dfrac{3x^2 + 3x + 5}{x^2 + x}$

c) $\dfrac{3x^2}{x^2 - 4} + \dfrac{2}{x - 2} + \dfrac{5x}{x + 2} = \dfrac{3x^2}{x^2 - 4} + \dfrac{2x + 4}{x^2 - 4} + \dfrac{5x^2 - 10x}{x^2 - 4} = \dfrac{8x^2 - 8x + 4}{x^2 - 4}$

d) $\dfrac{1 - x}{x + 1} + \dfrac{x + 1}{x - 1} - \dfrac{2}{x^2 - 1} = \dfrac{-x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1} + \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} - \dfrac{2}{x^2 - 1} = \dfrac{4x - 2}{x^2 - 1}$

58. **Realiza las operaciones y simplifica el resultado.**

a) $\dfrac{3x - 1}{4x + 12} - \dfrac{x + 2}{4x - 12}$

b) $\dfrac{2 - x}{x^2 - 3x} - \dfrac{1}{4x - 12} + \dfrac{5}{6x - 18}$

c) $\dfrac{4}{a + b} - \dfrac{5}{a - b}$

d) $\dfrac{4 - x^2}{x + 2} + \dfrac{9 - x^2}{x + 3}$

a) $\dfrac{3x - 1}{4x + 12} - \dfrac{x + 2}{4x - 12} = \dfrac{2x^2 - 15x - 3}{4(x + 3)(x - 3)}$

b) $\dfrac{2 - x}{x^2 - 3x} - \dfrac{1}{4x - 12} + \dfrac{5}{6x - 18} = \dfrac{5x - 24}{12x(3 - x)}$

c) $\dfrac{4}{a + b} - \dfrac{5}{a - b} = \dfrac{a + 9b}{(a + b)(b - a)}$

d) $\dfrac{4 - x^2}{x + 2} + \dfrac{9 - x^2}{x + 3} = 5 - 2x$

59. **Indica si $x = 2$ está entre las soluciones de las siguientes ecuaciones.**

a) $3(x - 2) = 1 - 3(2x - 3)$
b) $5(4 - 3x) + 3 = 1 + 3x$
c) $2(x - 3) - 4(3 - 2x) = 0$

a) $3(2 - 2) = 3 \cdot 0 \neq 1 - 3(2 \cdot 2 - 3) = 1 - 3 \cdot 1 = -2 \rightarrow$ No es solución.

b) $5(4 - 3 \cdot 2) + 3 = 5 \cdot (-2) + 3 = -7 \neq 1 + 3 \cdot 2 = 7 \rightarrow$ No es solución.

c) $2(2 - 3) - 4(3 - 2 \cdot 2) = 2 \cdot (-1) - 4(-1) = 2 \neq 0 \rightarrow$ No es solución.

60. **Halla la solución de las ecuaciones siguientes.**

a) $2x - 30 = 5x + 3$
b) $2x - 6 = 5x + 18$
c) $11 - 3x = 23$
d) $3x + 2 = x + 10$
e) $6 - 5x = 2x + 3$
f) $-14x + 5 = x$

a) $2x - 5x = 3 + 30 \rightarrow x = -11$

b) $2x - 5x = 18 + 6 \rightarrow x = -8$

c) $x = -4$

d) $3x - x = 10 - 2 \rightarrow x = 4$

e) $6 - 3 = 2x + 5x \rightarrow x = \frac{3}{7}$

f) $x = \frac{1}{3}$

61. **Resuelve las ecuaciones que aparecen a continuación.**

a) $3(x - 5) + 4(x - 2) = 5$
b) $x - 2(x + 2) - 3(2 - 4x) = 9$
c) $4(10 - 2x) - 3(2x + 1) = -3(x + 1) - (2 - 3x)$

a) $3x - 15 + 4x - 8 = 5 \rightarrow 7x = 28 \rightarrow x = 4$

b) $x - 2x - 4 - 6 + 12x = 9 \rightarrow 11x = 19 \rightarrow x = \frac{19}{11}$

c) $40 - 8x - 6x + 3 = -3x - 3 - 2 + 3x \rightarrow -14x = -48 \rightarrow x = \frac{24}{7}$

62. **Encuentra la solución de las siguientes ecuaciones.**

a) $\frac{x}{3} + 1 = \frac{3x}{4} + 3$

b) $\frac{3(x - 1)}{2} + x = \frac{x}{3} + 8$

c) $\frac{x - 1}{10} = \frac{x + 2}{40} + \frac{x - 2}{30}$

a) $4x + 12 = 9x + 36 \rightarrow 5x = -24 \rightarrow x = -\frac{24}{5}$

b) $9(x - 1) + 6x = 2x + 48 \rightarrow 13x = 57 \rightarrow x = \frac{57}{13}$

c) $12(x - 1) = 3(x + 2) + 4(x - 2) \rightarrow 12x - 1 = 3x + 6 + 4x - 8 \rightarrow 5x = -1 \rightarrow x = -\frac{1}{5}$

63. **¿Cuál es la solución de estas ecuaciones?**

a) $x^2 - x - 6 = 0$

b) $-x^2 - 2x + 8 = 0$

c) $2x^2 + 5x + 6 = 0$

d) $-x^2 + 3x - 4 = 0$

e) $2x^2 + 5x - 3 = 0$

f) $6x^2 + 31x + 18 = 0$

a) $x_1 = -2$, $x_2 = 3$

b) $x_1 = 2$, $x_2 = -4$

c) No hay raíces.

d) No hay raíces.

e) $x_1 = -3$, $x_2 = \frac{1}{2}$

f) $x_1 = -\frac{9}{2}$, $x_2 = -\frac{2}{3}$

64. **Halla la solución de las ecuaciones que aparecen a continuación.**

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

b) $x^4 + 8x^2 - 20 = 0$

a) Sea $t = x^2$, tenemos entonces la ecuación $t^2 - 5t + 4 = 0$. Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$t_1 = 1$, $t_2 = 4$. De modo que son solución de la ecuación $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$ y $x_4 = -2$.

b) Sea $t = x^2$, tenemos entonces la ecuación $t^2 + 8t - 20 = 0$. Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$t_1 = -10$, $t_2 = 2$. Para t_1 no tenemos soluciones para x.Así, las soluciones de la ecuación son $x_1 = \sqrt{2}$ y $x_2 = -\sqrt{2}$.

65. **Resuelve las ecuaciones que aparecen a continuación.**

a) $x^2 + 6x - 1 = 3x^2 + 3x - 6$

b) $2x^2 + 25x = x(x - 10)$

c) $x^2 - (2x + 1)(x - 1) = 7$

d) $(x - 1)^2 = (2x + 1)^2 - 10$

a) $2x^2 - 3x - 5 = 0 \rightarrow x_1 = -1 \quad x_2 = 2{,}5$

b) $x^2 + 35x = 0 \rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = -35$

c) $-x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow$ No hay raíces.

d) $x^2 - 2x + 1 = 4x^2 + 4x + 1 - 10 \rightarrow 3x^2 + 6x - 10 = 0 \rightarrow x_1 = -3{,}08 \quad x_2 = 1{,}08$

66. **Determina las soluciones de estas ecuaciones.**

a) $\dfrac{x + 2}{3} + \dfrac{x(x - 1)}{5} = 0$

b) $\dfrac{3x - 1}{2} - \dfrac{x - x^2}{3} + 1 = 0$

c) $x - \dfrac{1 - 2x}{3} - \dfrac{2x^2 + 1}{4} = 5$

d) $3 - \dfrac{2x - 3}{2} + \dfrac{16x + x^2}{3} = 0$

e) $\dfrac{x - 1}{4} - \dfrac{12x - x^2}{3} = \dfrac{2x^2 + 1}{3} - x$

a) $5(x + 2) + 3x(x - 1) = 0 \rightarrow 3x^2 + 2x + 10 = 0 \rightarrow$ No hay raíces.

b) $3(3x - 1) - 2(x - x^2) + 6 = 0 \rightarrow 2x^2 + 7x + 3 = 0 \rightarrow x_1 = -3 \quad x_2 = -\frac{1}{2}$

c) $12x - 4(1 - 2x) - 3(2x^2 + 1) = 60 \rightarrow -6x^2 + 20x - 67 = 0 \rightarrow$ No hay raíces.

d) $18 - 3(2x - 3) - 2(16x + x^2) = 0 \rightarrow -2x^2 - 38x + 27 = 0 \rightarrow x_1 = 0{,}69 \quad x_2 = -19{,}69$

e) $3(x - 1) - 4(12x - x^2) = 4(2x^2 + 1) - 12x \rightarrow -4x^2 - 33x - 7 = 0 \rightarrow x_1 = -0{,}22 \quad x_2 = -8{,}03$

67. **Comprueba si el número indicado en cada apartado es solución de la ecuación.**

a) $2(x^2 - x - 2) + 6(3 - x) - 2(x - 3) - 8 = 0$
$x = -2$

b) $2(-x - 2)(1 - x) - 2(x + 1) = 0$
$x = \sqrt{3}$

c) $(2 + x)5x - (3x - 4) + 3(x - 1) - x^2 + 2(x + 4) = 0$
$x = -\dfrac{3}{2}$

d) $3x(x - 2) + 2(1 + 9x) + 11 = 0$
$x = \dfrac{1}{2}$

a) No, las soluciones son $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$.
b) Sí, las soluciones son $x_1 = -\sqrt{3}$ y $x_2 = \sqrt{3}$.
c) Sí, la solución es $x = -\dfrac{3}{2}$.
d) No, esta ecuación no tiene solución real.

68. **Resuelve estas ecuaciones de segundo grado.**

a) $3x^2 - 48 = 0$
b) $3x^2 - 48x = 0$
c) $3x^2 + 48 = 0$
d) $x^2 + 3x + 9 = 0$
e) $x^2 - 3x + 9 = 0$
f) $-3x^2 + 18x - 3 = 0$
g) $-3x^2 - 18x + 3 = 0$
h) $x^2 + x - 18 = 0$

a) $3x^2 - 48 = 0 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x_1 = -4 \quad x_2 = 4$

b) $3x^2 - 48x = 0 \rightarrow x\ 3x - 48\ = 0 \rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 16$

c) $3x^2 + 48 = 0 \rightarrow x^2 = -16 \rightarrow$ No tiene solución real.

d) $x^2 + 3x + 9 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} \rightarrow x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{-27}}{2} \rightarrow$ No tiene solución real.

e) $x^2 - 3x + 9 = 0 \rightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{\ -3\ ^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} \rightarrow x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{-27}}{2} \rightarrow$ No tiene solución real.

f) $-3x^2 + 18x - 3 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot\ -3\ \cdot\ -3}}{2 \cdot\ -3} \rightarrow x = \dfrac{-18 \pm \sqrt{288}}{-6} \rightarrow x_1 = 3 - 2\sqrt{2} \quad x_2 = 3 + 2\sqrt{2}$

g) $-3x^2 - 18x + 3 = 0 \rightarrow x = \dfrac{18 \pm \sqrt{\ -18\ ^2 - 4 \cdot\ -3\ \cdot 3}}{2 \cdot\ -3} \rightarrow x = \dfrac{18 \pm \sqrt{360}}{-6} \rightarrow x_1 = -3 - \sqrt{10} \quad x_2 = -3 + \sqrt{10}$

h) $x^2 + x - 18 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot\ -18}}{2 \cdot 1} \rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{73}}{2} \rightarrow x_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{73}}{2} \quad x_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{73}}{2}$

69. **Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado con denominadores.**

a) $\dfrac{3x^2-1}{2}+\dfrac{x^2-x}{3}-x^2=0$

b) $\dfrac{x-2}{2}+1=\dfrac{3x^2-2x+3}{3}+\dfrac{19x}{6}$

c) $\dfrac{x(x+1)-10}{5}=\dfrac{x^2+2x}{2}-2$

d) $x^2+\dfrac{11x-5}{6}=\dfrac{2x^2-1}{3}+x$

a) $\dfrac{3x^2-1}{2}+\dfrac{x^2-x}{3}-x^2=0\to 5x^2-2x-3=0\to x_1=-\dfrac{3}{5}\quad x_2=1$

b) $\dfrac{x-2}{2}+1=\dfrac{3x^2-2x+3}{3}+\dfrac{19x}{6}\to x^2+2x+1=0\to x=-1$

c) $\dfrac{x\ \ x+1\ -10}{5}=\dfrac{x^2+2x}{2}-2\to 3x^2+8x=0\to x_1=0\quad x_2=-\dfrac{8}{3}$

d) $x^2+\dfrac{11x-5}{6}=\dfrac{2x^2-1}{3}+x\to 2x^2+5x-3=0\to\begin{cases}x=-3\\ x=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

70. **La suma de las soluciones de una ecuación de segundo grado es 4 y su producto es -21.**

a) Escribe la ecuación correspondiente.

b) Determina dichas soluciones.

a) $x(4-x)=-21$

b) $-x^2+4x+21=0\to x=\dfrac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot(-1)\cdot 21}}{2\cdot(-1)}\to\begin{cases}x_1=-3\\ x_2=7\end{cases}$

Las soluciones son -3 y 7.

71. **Indica el número de soluciones de cada ecuación.**

a) $3x^2-4x+5=0$

b) $12-2x^2+3x=0$

c) $-x+x^2-3=0$

d) $6x-x^2+9=0$

a) $\Delta=b^2-4ac=\ -4\ ^2-4\cdot 3\cdot 5=-44<0\to$ No tiene soluciones reales.

b) $\Delta=b^2-4ac=3^2-4\cdot\ -2\ \cdot 12=105>0\to$ Tiene dos soluciones.

c) $\Delta=b^2-4ac=\ -1\ ^2-4\cdot 1\cdot\ -3\ =13>0\to$ Tiene dos soluciones.

d) $\Delta=b^2-4ac=6^2-4\cdot\ -1\ \cdot 9=72>0\to$ Tiene dos soluciones.

72. **Resuelve la ecuación general de segundo grado $ax^2+bx+c=0$ utilizando las igualdades notables. Relaciona el resultado obtenido con el número de soluciones que tiene la ecuación de segundo grado.**

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a} \rightarrow x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si $\sqrt{b^2 - 4ac} < 0 \rightarrow$ No tiene solución.

Si $\sqrt{b^2 - 4ac} = 0 \rightarrow$ Tiene una solución.

Si $\sqrt{b^2 - 4ac} > 0 \rightarrow$ Tiene dos soluciones.

73. Halla el valor de k para que esta ecuación tenga por solución $x = 7$.

$$x^2 - 13x + k = 0$$

Para este valor de k, ¿cuál es la otra solución?

$7^2 - 13 \cdot 7 + k = 0 \rightarrow k = 42$

$$x^2 - 13x + 42 = 0 \rightarrow x = \frac{13 \pm \sqrt{-13^{\,2} - 4 \cdot 1 \cdot 42}}{2 \cdot 1} = \frac{13 \pm 1}{2} \rightarrow x_1 = 6 \quad x_2 = 7$$

74. ¿Cuáles son los valores que deben tomar a y b para que la ecuación $ax^2 + bx - 30 = 0$ tenga las soluciones, $x_1 = 5$ y $x_2 = -3$?

Sustituimos las dos soluciones en la ecuación y formamos un sistema donde las incógnitas son a y b:

$$\left.\begin{array}{r} 25a + 5b - 30 = 0 \\ 9a - 3b - 30 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 3} \\ \xrightarrow{\cdot 5} \end{array} \left.\begin{array}{r} 75a + 15b = 90 \\ 45a - 15b = 150 \end{array}\right\}$$

$$120a \qquad = 240 \rightarrow a = 2$$

$$\rightarrow 9 \cdot 2 - 3b - 30 = 0 \rightarrow b = -4$$

75. Di, sin resolverlas, cuál es la suma y el producto de las raíces de las siguientes ecuaciones, y luego calcúlalas para comprobarlo.

a) $x^2 + 5x - 14 = 0$

b) $x^2 + x = 0$

c) $6x^2 + 13x - 5 = 0$

d) $9x^2 + 9x - 10 = 0$

e) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

f) $10x^2 + 3x - 1 = 0$

Partimos de una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son a y b:
$(x - a)(x - b) = 0$

Después, multiplicamos: $x^2 - ax - bx + ab = 0 \rightarrow x^2 - (a + b)x + ab = 0$

Por tanto, el producto de las raíces es el término independiente y la suma de las raíces es el opuesto al coeficiente del término de primer grado.

a) El producto de las raíces es -14 y la suma es -5.

Las raíces son $x_1 = -7$ y $x_2 = 2$.

b) El producto de las raíces es 0 y la suma es -1.

Las raíces son $x_1 = -1$ y $x_2 = 0$.

c) El producto de las raíces es $-\frac{5}{6}$ y la suma es $-\frac{13}{6}$.

Las raíces son $x_1 = -\frac{5}{2}$ y $x_2 = \frac{1}{3}$.

d) El producto de las raíces es $-\frac{10}{9}$ y la suma es -1.

Las raíces son $x_1 = -\frac{5}{3}$ y $x_2 = \frac{2}{3}$.

e) El producto de las raíces es $\frac{1}{4}$ y la suma es 1.

La raíz es $x = \frac{1}{2}$.

f) El producto de las raíces es $-\frac{1}{10}$ y la suma es $-\frac{3}{10}$.

Las raíces son $x_1 = -\frac{1}{2}$ y $x_2 = \frac{1}{5}$.

76. Escribe ecuaciones de segundo grado cuyas soluciones sean las siguientes.

a) $x_1 = 2, x_2 = -5$

b) $x_1 = -4, x_2 = 4$

c) $x_1 = 0, x_2 = -2$

d) $x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = -\frac{2}{3}$

a) $x-2 \quad x+5 = x^2+3x-10$

b) $x-4 \quad x+4 = x^2-16$

c) $x \quad x+2 = x^2+2x$

d) $9\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right) = 9x^2+9x+2$

77. Resuelve las ecuaciones bicuadradas que aparecen a continuación.

a) $25x^4 - 101x^2 + 4 = 0$

b) $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$

c) $3x^4 - 30x^2 + 27 = 0$

a) $25x^4-101x^2+4=0 \rightarrow 25z^2-101z+4=0 \rightarrow z=\frac{101\pm\sqrt{-101^{\,2}-4\cdot25\cdot4}}{2\cdot25} \rightarrow z=\frac{101\pm99}{50} \rightarrow \begin{cases} z_1=\frac{1}{25} \\ z_2=4 \end{cases}$

$z_1=\frac{1}{25} \rightarrow x_1=-\frac{1}{5} \quad x_2=\frac{1}{5}$ $\qquad z_2=4 \rightarrow x_3=-2 \quad x_4=2$

b) $x^4-25x^2+144=0 \rightarrow z^2-25z+144=0 \rightarrow z=\frac{25\pm\sqrt{-25^{\,2}-4\cdot1\cdot144}}{2\cdot1} \rightarrow z=\frac{25\pm7}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1=9 \\ z_2=16 \end{cases}$

$z_1=9 \rightarrow x_1=-3 \quad x_2=3$ $\qquad z_2=16 \rightarrow x_3=-4 \quad x_4=4$

c) $3x^4-30x^2+27=0 \rightarrow 3z^2-30z+27=0 \rightarrow z=\frac{30\pm\sqrt{-30^{\,2}-4\cdot3\cdot27}}{2\cdot3} \rightarrow z=\frac{30\pm24}{6} \rightarrow \begin{cases} z_1=1 \\ z_2=9 \end{cases}$

$z_1=1 \rightarrow x_1=-1 \quad x_2=1$ $\qquad z_2=9 \rightarrow x_3=-3 \quad x_4=3$

78. Encuentra las soluciones de las ecuaciones que aparecen a continuación.

a) $\frac{x^3-x}{x^2-1} - \frac{1}{4x} = 0$

b) $9(1-x^2)(1+x^2) + 80x^2 = 0$

c) $1 - \frac{18}{x^2} + \frac{81}{x^4} = 0$

a) $\dfrac{x^3-x}{x^2-1}-\dfrac{1}{4x}=0\to 4x(x^3-x)-(x^2-1)=0\to 4x^4-5x^2+1\to$ Es una ecuación bicuadrada:

$$z=x^2\to 4z^2-5z+1\to\begin{cases} z_1=1\\ z_2=\dfrac{1}{4}\end{cases}\qquad z_1=1\to\begin{cases} x_1=1\\ x_2=-1\end{cases}\qquad z_2=\dfrac{1}{4}\to\begin{cases} x_3=\dfrac{1}{2}\\ x_4=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

b) $9(1-x^2)(1+x^2)+80x^2=0\to -9x^4+80x^2+9=0\to$ Es una ecuación bicuadrada:

$$z=x^2\to -9z^2+80z+9\to\begin{cases} z_1=9\\ z_2=-\dfrac{1}{9}\end{cases}\qquad z_1=9\to\begin{cases} x_1=3\\ x_2=-3\end{cases}\qquad z_2=-\dfrac{1}{9}\to\begin{cases} x_3=\dfrac{1}{3}\\ x_4=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

c) $1-\dfrac{18}{x^2}+\dfrac{18}{x^4}=0\to x^4-18x^2+81=0\to$ Es una ecuación bicuadrada:

$$z=x^2\to z^2-18z+81\to z=9\to\begin{cases} x_1=3\\ x_2=-3\end{cases}$$

79. Resuelve las ecuaciones bicuadradas que aparecen a continuación.

a) $x^8+3x^4-4=0$

b) $x^6-19x^3-216=0$

c) $x^{12}+7x^6+12=0$

d) $36x^{10}+x^5-6=0$

a) $x^8+3x^4-4=0\to z^2+3z-4=0\to z=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 1\cdot\ -4}}{2\cdot 1}\to z=\dfrac{-3\pm 5}{2}\to\begin{cases} z_1=-4\\ z_2=1\end{cases}$

$z_1=-4\to x^4=-4\to$ No tiene solución real. $z_2=1\to x^4=1\to x_1=-1\quad x_2=1$

b) $x^6-19x^3-216=0\to z^2-19z-216=0$

$$z=\frac{19\pm\sqrt{19^2-4\cdot 1\cdot\ -216}}{2\cdot 1}\to z=\frac{19\pm\sqrt{1225}}{2}\to\begin{cases} z_1=\dfrac{19-35}{2}=-8\\ z_2=\dfrac{19+35}{2}=27\end{cases}$$

$z_1=-8\to x^3=-8\to x=-2$ $z_2=27\to x^3=27\to x=3$

c) $x^{12}+7x^6+12=0\to z^2+7z+12=0$

$$z=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\cdot 1\cdot 12}}{2\cdot 1}\to z=\frac{-7\pm 1}{2}\to\begin{cases} z_1=-4\\ z_2=-3\end{cases}$$

$z_1=-4\to x^6=-4\to$ No tiene solución real. $z_2=-3\to x^6=-3\to$ No tiene solución real.

d) $36x^{10}+x^5-6=0\to 36z^2+z-6=0$

$$z=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 36\cdot\ -6}}{2\cdot 36}\to z=\frac{-1\pm\sqrt{865}}{72}\to\begin{cases} z_1=\dfrac{-1-\sqrt{865}}{72}\approx -0{,}42\\ z_2=\dfrac{-1+\sqrt{865}}{72}\approx 0{,}39\end{cases}$$

$$z_1=\frac{-1-\sqrt{865}}{72}\to x^5=\frac{-1-\sqrt{865}}{72}\to x_1=\sqrt[5]{\frac{-1-\sqrt{865}}{72}}\approx -0{,}84$$

$$z_2=\frac{-1+\sqrt{865}}{72}\to x^5=\frac{-1+\sqrt{865}}{72}\to x_2=\sqrt[5]{\frac{-1+\sqrt{865}}{72}}\approx 0{,}83$$

80. Busca las soluciones de las siguientes ecuaciones con fracciones algebraicas y comprueba, al menos, una de las soluciones.

a) $\frac{1-x^2}{x}+\frac{3x+1}{4}+\frac{1}{6}=0$ b) $\frac{x^2+4}{x}+\frac{1-4x}{3}+\frac{8}{15}=0$ c) $\frac{2-x}{2x}=\frac{5}{6}-\frac{3x^2-2x}{3x}$

a) $\frac{1-x^2}{x}+\frac{3x+1}{4}+\frac{1}{6}=0 \to 12-12x^2+9x^2+3x+2x=0 \to -3x^2+5x+12=0$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot(-3)\cdot 12}}{2\cdot(-3)} \to x=\frac{-5\pm 13}{-6} \to \begin{cases} x_1=-\frac{4}{3} \\ x_2=3 \end{cases}$$

$$\frac{1-3^2}{3}+\frac{3\cdot 3+1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{-8}{3}+\frac{10}{4}+\frac{1}{6}=0$$

b) $\frac{x^2+4}{x}+\frac{1-4x}{3}+\frac{8}{15}=0 \to 15x^2+60+5x-20x^2+8x=0$

$\to -5x^2+13x+60=0$

$$x=\frac{-13\pm\sqrt{13^2-4\cdot(-5)\cdot 60}}{2\cdot(-5)} \to x=\frac{-13\pm 37}{-10} \to \begin{cases} x_1=-\frac{12}{5} \\ x_2=5 \end{cases}$$

$$\frac{5^2+4}{5}+\frac{1-4\cdot 5}{3}+\frac{8}{15}=\frac{29}{5}-\frac{19}{3}+\frac{8}{15}=0$$

c) $\frac{2-x}{2x}=\frac{5}{6}-\frac{3x^2-2x}{3x} \to 6-3x=5x-6x^2+4x \to x^2-2x+1=0$

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1} \to x=1$$

$$\frac{2-1}{2\cdot 1}-\frac{5}{6}+\frac{3\cdot 1^2-2\cdot 1}{3\cdot 1}=\frac{1}{2}-\frac{5}{6}+\frac{1}{3}=0$$

81. Resuelve las ecuaciones con fracciones algebraicas que aparecen a continuación.

a) $\frac{x^2+1}{x}-x=\frac{7x^2-7-6x}{6x^2-6}$

b) $\frac{x+4}{4x+7}=\frac{x-3}{x^2-x-6}$

c) $\frac{x+1}{2x-1}-\frac{7}{4x^2-1}=\frac{x}{2x+1}$

d) $\frac{4}{x^2-1}+1=\frac{x}{x+1}$

e) $\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x-3}=\frac{1}{x^2-9}$

a) $\frac{x^2+1}{x}-x=\frac{7x^2-7-6x}{6x^2-6} \to \frac{6x^4-6}{6x\ x^2-1}-\frac{6x^4-6x^2}{6x\ x^2-1}=\frac{7x^3-6x^2-7x}{6x\ x^2-1} \to 7x^3-12x^2-7x+6=0$

$x_1=2 \quad x_2=\frac{-1-\sqrt{22}}{7} \quad x_3=\frac{-1+\sqrt{22}}{7}$

b) $\frac{x+4}{4x+7}=\frac{x-3}{x^2-x-6} \to (x+4)(x^2-x-6)=(4x+7)(x-3) \to x^3-x^2-5x-3=0 \to \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=-1 \end{cases}$

La única solución válida es $x=-1$, pues $x=3$ se descarta por hacer 0 el segundo denominador.

c) $\dfrac{x+1}{2x-1}-\dfrac{7}{4x^2-1}=\dfrac{x}{2x+1}\rightarrow\dfrac{2x^2+3x+1}{4x^2-1}-\dfrac{7}{4x^2-1}=\dfrac{2x^2-x}{4x^2-1}\rightarrow$

$\rightarrow 4x-6=0\rightarrow x=\dfrac{3}{2}$

d) $\dfrac{4}{x^2-1}+1=\dfrac{x}{x+1}\rightarrow\dfrac{4}{x^2-1}+\dfrac{x^2-1}{x^2-1}=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\rightarrow 3+x=0\rightarrow x=-3$

e) $\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{1}{x^2-9}\rightarrow\dfrac{x-3}{x^2-9}-\dfrac{x+3}{x^2-9}=\dfrac{1}{x^2-9}\rightarrow -7=0\rightarrow$ No tiene solución real.

82. **Obtén las soluciones de las siguientes ecuaciones con fracciones algebraicas.**

a) $\dfrac{2x(x^3-7x)}{2x^2-12}=6$

b) $3x^2(x^2-2)=\dfrac{x^2-2}{3}$

c) $8x+\dfrac{12}{x}=\dfrac{20}{x^3}$

d) $\dfrac{9x}{2x^2}=1-3x^2$

a) $\dfrac{2x(x^3-7x)}{2x^2-12}=6\rightarrow x^4-13x^2+36=0\xrightarrow{z=x^2}z^2-13z+36=0$

$z=\dfrac{-(-13)\pm\sqrt{(-13)^2-4\cdot1\cdot36}}{2\cdot1}=\dfrac{13\pm5}{2}\rightarrow\begin{cases}z_1=9\\z_2=4\end{cases}$

$z_1=9\rightarrow x_1=-3\qquad x_2=3$

$z_2=4\rightarrow x_3=-2\qquad x_4=2$

b) $3x^2(x^2-2)=\dfrac{x^2-2}{3}\rightarrow 9x^4-19x^2+2=0\xrightarrow{z=x^2}9z^2-19z+2=0$

$z=\dfrac{-(-19)\pm\sqrt{(-19)^2-4\cdot9\cdot2}}{2\cdot9}=\dfrac{19\pm17}{18}\rightarrow\begin{cases}z_1=2\\z_2=\dfrac{1}{9}\end{cases}$

$z_1=2\rightarrow x_1=-\sqrt{2}\qquad x_2=\sqrt{2}$

$z_2=\dfrac{1}{9}\rightarrow x_3=-\dfrac{1}{3}\qquad x_4=\dfrac{1}{3}$

c) $8x+\dfrac{12}{x}=\dfrac{20}{x^3}\rightarrow 2x^4+3x^2-5=0\xrightarrow{z=x^2}2z^2+3z-5=0$

$z=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot2\cdot(-5)}}{2\cdot2}=\dfrac{-3\pm7}{4}\rightarrow\begin{cases}z_1=1\\z_2=-\dfrac{5}{2}\end{cases}$

$z_1=1\rightarrow x_1=-1\qquad x_2=1$

$z_2=-\dfrac{5}{2}\rightarrow$ No tiene solución real.

d) $\dfrac{9}{2x^2}=1-3x^2\rightarrow 6x^4-2x^2+9=0\xrightarrow{z=x^2}6z^2-2z+9=0$

$z=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot6\cdot9}}{2\cdot6}=\dfrac{2\pm\sqrt{-212}}{12}$

No tiene solución real.

83. **Resuelve las siguientes ecuaciones con fracciones algebraicas.**

a) $\dfrac{4}{x+3} = \dfrac{1}{2x+1}$

b) $\dfrac{x+2}{2-x} + \dfrac{3x}{2x-1} = 0$

c) $\dfrac{3}{x-3} - \dfrac{2}{3x+5} = 0$

d) $\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{x-3}{x-2}$

a) $\dfrac{4}{x+3} = \dfrac{1}{2x+1} \rightarrow 8x+4 = x+3 \rightarrow 7x = -1 \rightarrow x = -\dfrac{1}{7}$

b) $\dfrac{x+2}{2-x} + \dfrac{3x}{2x-1} = 0 \rightarrow \dfrac{x+2}{2-x} = \dfrac{3x}{1-2x} \rightarrow x^2 - 9x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{9+\sqrt{73}}{2} \\ x_2 = \dfrac{9-\sqrt{73}}{2} \end{cases}$

c) $\dfrac{3}{x-3} - \dfrac{2}{3x+5} = 0 \rightarrow \dfrac{3}{x-3} = \dfrac{2}{3x+5} \rightarrow 9x+15 = 2x-6 \rightarrow x = -3$

d) $\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{x-3}{x-2} \rightarrow x^2 - 2x = x^2 - 4x + 3 \rightarrow -2x = -4x + 3 \rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

84. **Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones con fracciones algebraicas.**

a) $\dfrac{x-1}{x} = \dfrac{2}{x+1} + \dfrac{1}{2x}$

b) $x^2 - 3x - 4 + \dfrac{12}{x} = 0$

c) $\dfrac{x^2+x-6}{x} + 3 = 0$

d) $\dfrac{2x}{3x-4} - \dfrac{x}{x-1} = 0$

a) $\dfrac{x-1}{x} = \dfrac{2}{x+1} + \dfrac{1}{2x} \rightarrow \dfrac{2(x+1)(x-1)}{2x^2(x+1)} = \dfrac{4x^2 + x(x+1)}{2x^2(x+1)} \rightarrow$

$\rightarrow 2x^2 - 2 = 4x^2 + x^2 + 1 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow$ No existe solución real.

b) $x^2 - 3x - 4 + \dfrac{12}{x} = 0 \rightarrow x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$

c) $\dfrac{x^2+x-6}{x} + 3 = 0 \rightarrow x^2 + x - 6 + 3x = 0 \rightarrow x^2 + 4x - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2+\sqrt{10} \\ x_2 = -2-\sqrt{10} \end{cases}$

d) $\dfrac{2x}{3x-4} - \dfrac{x}{x-1} = 0 \rightarrow 2x(x-1) = (3x-4)x \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

85. **Halla el valor de *x* en las siguientes ecuaciones.**

a) $1+\dfrac{5}{1+x}+\dfrac{x}{1-x}=0$

b) $\dfrac{10x+1}{2(x+1)}-\dfrac{4x^2+3x-4}{2(x+1)^2}=3$

c) $\dfrac{2x-1}{x-4}+\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{2x+3}{x}=1$

d) $\dfrac{1}{x-1}+1=\dfrac{x^2}{x^2+3x-4}$

e) $\dfrac{x^2-5x+2}{2x-5}+\dfrac{x-2}{x+1}+\dfrac{2x-5}{x-1}=-1+\dfrac{-3x}{4}$

f) $\dfrac{x^2-4}{x^2+x+1}-\dfrac{x+1}{x-2}+2x+\dfrac{1}{7}=0$

g) $\dfrac{x}{x^2-1}+\dfrac{x}{x^3-1}+\dfrac{2x}{x^2+x+1}=0$

a) $1+\dfrac{5}{1+x}+\dfrac{x}{1-x}=0\to 1-x^2+5(1-x)+x(1+x)=0\to 6=4x\to x=\dfrac{3}{2}$

b) $\dfrac{10x+1}{2(x+1)}-\dfrac{4x^2+3x-4}{2(x+1)^2}=3\to(10x+1)(x+1)-(4x^2+3x-4)=6(x+1)^2\to$

$\to 10x^2+x+10x+1-4x^2-3x+4=6x^2+12x+6\to -4x-1=0\to x=-\dfrac{1}{4}$

c) $\dfrac{2x-1}{x-4}+\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{2x+3}{x}=1\to(2x-1)(x-1)x+x^2(x-4)-(2x+3)(x-4)(x-1)=x(x-4)(x-1)\to$

$\to 5x^2+4x-12=0\to x_1=-2 \qquad x_2=\dfrac{6}{5}$

d) $\dfrac{1}{x-1}+1=\dfrac{x^2}{x^2+3x-4}\to\dfrac{1}{x-1}+1=\dfrac{x^2}{(x+4)(x-1)}\to(x+4)+(x^2+3x-4)=x^2\to 4x=0\to x=0$

e) $\dfrac{x^2-5x+2}{2x-5}+\dfrac{x-2}{x+1}+\dfrac{2x-5}{x-1}=-1+\dfrac{-3x}{4}\to$

$\to 4(x^2-5x+2)(x^2-1)+4(x-2)(2x-5)(x-1)+4(2x-5)^2(x+1)=-4(2x-5)(x^2-1)-3x(2x-5)(x^2-1)\to$

$\to 10x^4-3x^3-130x^2+123x+72=0\to\begin{cases}x_1=3\\x_2=-3{,}8186\\x_3=-0{,}41092\\x_4=1{,}5295\end{cases}$

La única solución que se puede obtener con los métodos vistos en el curso, es $x=3$.

f) $\dfrac{x^2-4}{x^2+x+1}-\dfrac{x+1}{x-2}+2x+\dfrac{1}{7}=0\to$

$\to 7(x^2-4)(x-2)-7(x+1)(x^2+x+1)+14x(x^2+x+1)(x-2)+(x^2+x+1)(x-2)=0\to$

$14x^4+43x^3+13x^2-15x+47=0\to$ No tiene solución real.

g) $\dfrac{x}{x^2-1}+\dfrac{x}{x^3-1}+\dfrac{2x}{x^2+x+1}=0\to\dfrac{x}{(x+1)(x-1)}+\dfrac{x}{(x-1)(x^2+x+1)}+\dfrac{2x}{x^2+x+1}=0\to$

$x(x^2+x+1)+x(x+1)+2x(x+1)(x-1)=0\to 3x^3+2x^2=0\to x^2(3x+2)=0\to x_1=0 \qquad x_2=-\dfrac{2}{3}$

86. **Completa las siguientes ecuaciones escribiendo un número en el segundo miembro, de manera que tengan la solución indicada.**

a) $\sqrt{x+7} - 2\sqrt{4x+1} = \blacksquare$
$x = 2$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x+5}} = \blacksquare - \dfrac{1}{\sqrt{4x}}$
$x = 4$

a) $\sqrt{x+7} - 2\sqrt{4x+1} = -3$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x+5}} = \dfrac{13}{12} - \dfrac{1}{\sqrt{4x}}$

87. **Halla la solución de las ecuaciones con radicales.**

a) $\sqrt{6x-2} = 4$

b) $\sqrt{6x-8} = x$

c) $\sqrt{x^2+9} - 1 = x$

d) $\sqrt{2x^2+7x-1} = x+1$

a) $\sqrt{6x-2} = 4 \rightarrow 6x-2 = 16 \rightarrow 6x-18 = 0 \rightarrow x = 3$

b) $\sqrt{6x-8} = x \rightarrow 6x-8 = x^2 \rightarrow x^2-6x+8 = 0 \rightarrow x_1 = 2 \quad x_2 = 4$

c) $\sqrt{x^2+9} - 1 = x \rightarrow x^2+9 = x^2+2x+1 \rightarrow 2x-8 = 0 \rightarrow x = 4$

d) $\sqrt{2x^2+7x-1} = x+1 \rightarrow 2x^2+7x-1 = x^2+2x+1 \rightarrow x^2+5x-2 = 0 \rightarrow x_1 = \dfrac{-5-\sqrt{33}}{2} \quad x_2 = \dfrac{-5+\sqrt{33}}{2}$

88. **Resuelve las siguientes ecuaciones con radicales.**

a) $\sqrt[3]{x+9} = 4$

b) $\sqrt[3]{x^2-7x} = 2$

a) $\sqrt[3]{x+9} = 4 \rightarrow x+9 = 64 \rightarrow x-55 = 0 \rightarrow x = 55$

b) $\sqrt[3]{x^2-7x} = 2 \rightarrow x^2-7x = 8 \rightarrow x^2-7x-8 = 0 \rightarrow x_1 = -1 \quad x_2 = 8$

89. **Resuelve estas ecuaciones con radicales.**

a) $\sqrt{2x-10} = 5\sqrt{x-10}$

b) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x+3} = 5$

c) $\sqrt{4x-11} = 7\sqrt{2x-29}$

d) $\sqrt{x+3} - \sqrt{x+1} = 3$

a) $\sqrt{2x-10} = 5\sqrt{x-10} \rightarrow 2x-10 = 25\ \ x-10\ \ \rightarrow 23x-240 = 0 \rightarrow x = \dfrac{240}{23}$

b) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x+3} = 5 \rightarrow x+2 = x+10\sqrt{x+3}+28 \rightarrow x - \dfrac{94}{25} = 0 \rightarrow x = \dfrac{94}{25}$

Al comprobar el resultado se observa que no es solución.

c) $\sqrt{4x-11} = 7\sqrt{2x-29} \rightarrow 4x-11 = 49\ \ 2x-29\ \ \rightarrow 94x-1410 = 0 \rightarrow x = 15$

d) $\sqrt{x+3} - \sqrt{x+1} = 3 \rightarrow x+3 = x+6\sqrt{x+1}+10 \rightarrow x - \dfrac{13}{36} = 0 \rightarrow x = \dfrac{13}{36}$

Al comprobar el resultado se observa que no es solución.

90. **Resuelve las siguientes ecuaciones con fracciones algebraicas.**

a) $\sqrt{3x^2-4x+5}+3x+5=\dfrac{x^2}{5}$

b) $\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x+3}=5$

c) $\sqrt{x^2+x+\dfrac{5}{9}}=4-\sqrt{3x+8}$

d) $\sqrt{5-8x}+\sqrt{x^2-6x+\dfrac{3}{4}}=-10x$

a) $\sqrt{3x^2-4x+5}+3x+5=\dfrac{x^2}{5}\rightarrow \sqrt{3x^2-4x+5}^{\,2}=\left(\dfrac{x^2}{5}-3x-5\right)^2\rightarrow$

$$\rightarrow 3x^2-4x+5=\frac{x^4}{25}-\frac{6x^3}{5}+7x^2+30x+25\rightarrow -\frac{x^4}{25}+\frac{6x^3}{5}-4x^2-34x-20=0\rightarrow\begin{cases}x_1=-3{,}3205\\ x_2=24{,}456\\ x_3=-0{,}64731\\ x_4=9{,}5122\end{cases}$$

Tras la comprobación, las únicas soluciones válidas son x_1 y x_2.

Ninguna de estas dos soluciones se puede obtener con los métodos vistos en el curso.

b) $\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x+3}=5\rightarrow \sqrt{x^2+4x+4}^{\,2}=5-\sqrt{x+3}^{\,2}\rightarrow$

$$\rightarrow x^2+4x+4=x+28-10\sqrt{x+3}\rightarrow x^2+3x-24^{\,2}=-10\sqrt{x+3}^{\,2}\rightarrow$$

$$\rightarrow x^4+6x^3-39x^2-244x+276=0\rightarrow\begin{cases}x_1=1\\ x_2=6\end{cases}$$

Tras la comprobación, se observa que la única solución válida es $x_1=1$.

c) $\sqrt{x^2+x+\dfrac{5}{9}}=4-\sqrt{3x+8}\rightarrow\left(\sqrt{x^2+x+\dfrac{5}{9}}\right)^2=4-\sqrt{3x+8}^{\,2}\rightarrow$

$$\rightarrow x^2+x+\frac{5}{9}=16+3x+8-8\sqrt{3x+8}\rightarrow\left(x^2-2x-\frac{211}{9}\right)^2=-8\sqrt{3x+8}^{\,2}\rightarrow$$

$$\rightarrow x^4-4x^3-\frac{386}{9}x^2-\frac{884}{9}x=+\frac{3049}{81}=0\rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{3}\\ x_2=9{,}535\end{cases}$$

Tras la comprobación, la única solución válida es $x_1=\dfrac{1}{3}$.

d) $\sqrt{5-8x}+\sqrt{x^2-6x+\dfrac{3}{4}}=-10x\rightarrow \sqrt{5-8x}^{\,2}=\left(-10x-\sqrt{x^2-6x+\dfrac{3}{4}}\right)^2\rightarrow$

$$5-8x=101x^2-6x+\frac{3}{4}+10x\sqrt{4x^2-24x+3}\rightarrow\left(101x^2-2x+\frac{17}{4}\right)^2=100x^2(4x^2-24x+3)\rightarrow$$

$$\rightarrow 9801x^4+2804x^3-\frac{2309x^2}{2}-17x+\frac{289}{16}=0\rightarrow\begin{cases}x_1=-\dfrac{1}{2}\\ x_2=-0{,}1221\end{cases}$$

La única solución que se puede obtener con los métodos vistos en el curso es $x=-\dfrac{1}{2}$.

91. Resuelve las siguientes ecuaciones con radicales.

a) $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x+2}=0$

b) $\sqrt{x-\sqrt{1-x}}+\sqrt{x}=1$

a) $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x+2}=0 \rightarrow 2x+2\sqrt{x+7}\sqrt{x-1}+6=4x+8 \rightarrow$

$\rightarrow \sqrt{x+7}\sqrt{x-1}=x+1 \rightarrow x^2+6x-7=x^2+2x+1 \rightarrow 4x-8=0 \rightarrow x=2$

b) $\sqrt{x-\sqrt{1-x}}+\sqrt{x}=1 \rightarrow x-\sqrt{1-x}=x-2\sqrt{x}+1 \rightarrow$

$\rightarrow 2\sqrt{x}=1+\sqrt{1-x} \rightarrow 4x=-x+2\sqrt{1-x}+2 \rightarrow 5x-2=2\sqrt{1-x} \rightarrow$

$$\rightarrow 25x^2-20x+4=4-4x \rightarrow 25x^2-16x=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=\dfrac{16}{25} \end{cases}$$

Al comprobar el resultado vemos que la única solución válida es $x_2=\dfrac{16}{25}$.

92. Calcula la solución de las siguientes ecuaciones.

a) $(x^2-4)(x^2-3x+2)=0$

b) $(x^2-x)(x^2+16)=0$

c) $(x-1)(x^2+4)(x^2-9)=0$

d) $(x^2-4x-5)(x^2-2x-8)=0$

a) $x^2-4\ \ x^2-3x+2\ =0 \rightarrow\ x-1\ \ x+2\ \ x-2^{\ 2}=0 \rightarrow x_1=-2\quad x_2=1\quad x_3=2$

b) $x^2-x\ \ x^2+16\ =0 \rightarrow x\ \ x-1\ \ x^2+16\ =0 \rightarrow x_1=0\quad x_2=1$

c) $x-1\ \ x^2+4\ \ x^2-9\ =0 \rightarrow\ x-1\ \ x-3\ \ x+3\ \ x^2+4\ =0 \rightarrow x_1=-3\quad x_2=1\quad x_3=3$

d) $x^2-4x-5\ \ x^2-2x-8\ =0 \rightarrow\ x+1\ \ x+2\ \ x-5\ \ x-4\ =0 \rightarrow x_1=-2\quad x_2=-1\quad x_3=4\quad x_4=5$

93. Halla la solución de las ecuaciones que aparecen a continuación.

a) $x^3+4x^2+x-6=0$

b) $x^2(x+6)=32$

c) $x^2(x^2+1)+2x^3+36=12x(x+1)$

d) $2x^3-5x^2-14x+8=0$

a)

	1	4	1	−6
1		1	5	6
	1	5	6	0
−2		−2	−6	
	1	3	0	
−3		−3		
	1	0		

$x_1=-3\qquad x_2=-2\qquad x_3=1$

b) $x^2(x+6)=32 \rightarrow x^3+6x^2-32=0$

	1	6	0	−32
2		2	16	32
	1	8	16	0
−4		−4	−16	
	1	4	0	
−4		−4		
	1	0		

$x_1=-4\qquad x_2=2$

c) $x^2(x^2+1)+2x^3+36=12x(x+1) \rightarrow x^4+2x^3-11x^2-12x+36=0$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 2 & -11 & -12 & 36 \\
2 & & 2 & 8 & -6 & -36 \\
\hline
 & 1 & 4 & -3 & -18 & \boxed{0} \\
2 & & 2 & 12 & 18 & \\
\hline
 & 1 & 6 & 9 & \boxed{0} & \\
-3 & & -3 & -9 & & \\
\hline
 & 1 & 3 & \boxed{0} & & \\
-3 & & -3 & & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & & &
\end{array}$$

$x_1=-3 \qquad x_2=2$

d)
$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -5 & -14 & 8 \\
-2 & & -4 & 18 & -8 \\
\hline
 & 2 & -9 & 4 & \boxed{0} \\
4 & & 8 & -4 & \\
\hline
 & 2 & -1 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$2x-1=0$

$x=\dfrac{1}{2}$

$x_1=\dfrac{1}{2} \qquad x_2=-2 \qquad x_3=4$

94. **Halla las soluciones de estas ecuaciones.**

a) $6x^3-7x^2-x+2=0$

b) $4x^3(x-3)+2x^2+30(x+1)=23x(x-1)$

c) $x^4+3x^3-11x^2+2x=0$

d) $x^2(x^2-x-6)=3(x^2-3x)$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 6 & -7 & -1 & 2 \\
1 & & 6 & -1 & -2 \\
\hline
 & 6 & -1 & -2 & \boxed{0}
\end{array}$$

Resolvemos la ecuación $6x^2-x-2=0$:

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 6\cdot(-2)}}{2\cdot 6}=\frac{1\pm 7}{12}\rightarrow\begin{cases} x_1=-\dfrac{1}{2} \\ x_2=\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

$x_1=-\dfrac{1}{2} \qquad x_2=\dfrac{2}{3} \qquad x_3=1$

b) $4x^3(x-3)+2x^2+30(x+1)=23x(x-1) \rightarrow 4x^4-12x^3-21x^2+53x+30=0$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 4 & -12 & -21 & 53 & 30 \\
-2 & & -8 & 40 & -38 & -30 \\
\hline
 & 4 & -20 & 19 & 15 & \boxed{0} \\
3 & & 12 & -24 & -15 & \\
\hline
 & 4 & -8 & -5 & \boxed{0} &
\end{array}$$

Resolvemos la ecuación $4x^2-8x-5=0$:

$$x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot 4\cdot(-5)}}{2\cdot 4}=\frac{8\pm 12}{8}\rightarrow\begin{cases} x_1=-\dfrac{1}{2} \\ x_2=\dfrac{5}{2}\end{cases}$$

$x_1=-\dfrac{1}{2} \qquad x_2=-2 \qquad x_3=\dfrac{5}{2} \qquad x_4=3$

c) $x^4+3x^3-11x^2+2x=0 \rightarrow x(x^3+3x^2-11x+2)=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -11 & 2 \\ 2 & & 2 & 10 & -2 \\ \hline & 1 & 5 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

Resolvemos la ecuación $x^2+5x-1=0$:

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}=\frac{-5\pm\sqrt{29}}{2}$$

$$x_1=\frac{-5-\sqrt{29}}{2} \qquad x_2=\frac{-5+\sqrt{29}}{2} \qquad x_3=0 \qquad x_4=2$$

d) $x^2(x^2-x-6)=3(x^2-3x)\rightarrow x^2(x-3)(x+2)-3x(x-3)=0\rightarrow x(x-3)\ x(x+2)-3\rightarrow$
$\rightarrow x(x-3)(x^2+2x-3)=0\rightarrow x(x-3)(x+3)(x-1)=0\rightarrow x_1=0 \qquad x_2=3 \qquad x_3=-3 \qquad x_4=1$

95. Halla la solución de las ecuaciones que aparecen a continuación.

a) $x^3-6x^2+11x-6=0$

b) $x^3-3x^2-13x+15=0$

c) $x^5+x^4-5x^3-5x^2+4x+4=0$

d) $x^3-7x^2+4x-28=0$

a) $x^3-6x^2+11x-6=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 11 & -6 \\ 1 & & 1 & -5 & 6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \\ 2 & & 2 & -6 & \\ \hline & 1 & -3 & \boxed{0} & \\ 3 & & 3 & & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

Las raíces enteras son {1, 2, 3}.

b) $x^3-3x^2-13x+15=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -13 & 15 \\ 1 & & 1 & -2 & -15 \\ \hline & 1 & -2 & -15 & \boxed{0} \\ 5 & & 5 & 15 & \\ \hline & 1 & 3 & \boxed{0} & \\ -3 & & -3 & & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

Las raíces enteras son {3, 1, 5}.

c) $x^5+x^4-5x^3-5x^2+4x+4=0$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 1 & -5 & -5 & 4 & 4 \\ 1 & & 1 & 2 & -3 & -8 & -4 \\ \hline & 1 & 2 & -3 & -8 & -4 & \boxed{0} \\ -1 & & -1 & -1 & 4 & 4 & \\ \hline & 1 & 1 & -4 & -4 & \boxed{0} & \\ 2 & & 2 & 6 & 4 & & \\ \hline & 1 & 3 & 2 & \boxed{0} & & \\ -2 & & -2 & -2 & & & \\ \hline & 1 & 1 & \boxed{0} & & & \\ -1 & & -1 & & & & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & & & & \end{array}$$

Las raíces enteras son {−2, −1, 1, 2}.

d) $x^3-7x^2+4x-28=0$

	1	−7	4	−28
7		7	0	28
	1	0	4	0

$x^2+4=0$ no tiene soluciones reales, por tanto, la única raíz entera es $x=7$.

96. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\dfrac{x^3+x^2}{3}+x\cdot\dfrac{x+1}{6}=x+1$

b) $3x^2\left(4+\dfrac{7}{x}\right)=\dfrac{6(17x-4)}{x}$

c) $\dfrac{x^2}{16}(x+7)+x+1=0$

d) $\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}$

e) $\dfrac{2x^2(x-2)+4x}{x^2+1}=3$

a) $\dfrac{x^3+x^2}{3}+x\dfrac{x+1}{6}=x+1\rightarrow 2x^3+3x^2-5x-6=0$

	2	3	−5	−6
−1		−2	−1	6
	2	1	−6	0
−2		−4	6	
	2	−3	0	

$2x-3=0$

$x=\dfrac{3}{2}$

$x_1=-2\qquad x_2=-1\qquad x_3=\dfrac{3}{2}$

b) $3x^2\left(4+\dfrac{7}{x}\right)=\dfrac{6(17x-4)}{x}\rightarrow 4x^3+7x^2-34x+8=0$

	4	7	−34	8
2		8	30	−8
	4	15	−4	0
−4		−16	4	
	4	−1	0	

$4x-1=0$

$x=\dfrac{1}{4}$

$x_1=-4\qquad x_2=\dfrac{1}{4}\qquad x_3=2$

c) $\frac{x^2}{16}(x+7)+x+1=0 \rightarrow x^3+7x^2+16x+16=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 7 & 16 & 16 \\ -4 & & -4 & -12 & -16 \\ \hline & 1 & 3 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

Resolvemos la ecuación $x^2+3x+4=0$:

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1}=\frac{-3\pm\sqrt{-7}}{2} \rightarrow \text{No tiene solución real.}$$

$x=-4$

d) $\frac{3}{x+1}+\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x}=\frac{5}{2} \rightarrow -5x^3+8x^2+3x+2=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -5 & 8 & 3 & 2 \\ 2 & & -10 & -4 & -2 \\ \hline & -5 & -2 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

Resolvemos la ecuación $-5x^2-2x-1=0$:

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot(-5)\cdot(-1)}}{2\cdot(-5)}=\frac{2\pm\sqrt{-16}}{-10} \rightarrow \text{No tiene solución real.}$$

$x=2$

e) $\frac{2x^2(x-2)+4x}{x^2+1}=3 \rightarrow 2x^3-7x^2+4x-3=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -7 & 4 & -3 \\ 3 & & 6 & -3 & 3 \\ \hline & 2 & -1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

Resolvemos la ecuación $2x^2-x+1=0$:

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 2\cdot 1}}{2\cdot 2}=\frac{1\pm\sqrt{-7}}{4} \rightarrow \text{No tiene solución real.}$$

$x=3$

97. Escribe alguna ecuación que tenga las siguientes características.

a) Los valores $x=1$, $x=2$ y $x=3$ son soluciones de la ecuación.

b) Es una ecuación de grado 3 con una sola solución real que es $x=\frac{1}{2}$.

c) Una ecuación de grado 3 con dos soluciones reales que sean una opuesta de la otra.

d) Una ecuación de grado 2 con coeficientes enteros y cuyas soluciones sean $x=-\frac{1}{3}$ y $x=\frac{2}{5}$.

e) Una ecuación de grado 3 con coeficientes enteros y los valores $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $x=-3$ son dos de sus soluciones.

Respuesta abierta, por ejemplo:

a) $7(x-1)(x-2)(x-3)=0 \rightarrow 7x^3-42x^2+77x-42=0$

b) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^3=0 \rightarrow x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{8}=0 \rightarrow 8x^3-12x^2+6x-1=0$

c) Si dos de las soluciones son reales, entonces la tercera solución también será real.

$(x-1)(x+1)x=0 \rightarrow x^3-x=0$

d) $\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{2}{5}\right)=0 \rightarrow x^2-\frac{x}{15}-\frac{2}{15}=0 \rightarrow 15x^2-x-2=0$

e) Tomando como tercera solución $x_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ x+3\ =0 \rightarrow 2x^3+6x^2-x-3=0$

98. Halla cuánto vale *x* en las siguientes expresiones.

a) $\log_x 3=-1$

b) $\log_x 5=2$

c) $\log_x 3=-2$

d) $\log_x 2=5$

a) $\log_x 3=-1 \rightarrow x^{-1}=3 \rightarrow x=\frac{1}{3}$

b) $\log_x 5=2 \rightarrow x^2=5 \rightarrow \begin{cases} x_1=\sqrt{5} \\ x_2=-\sqrt{5} \end{cases} \rightarrow$ La única solución válida es $x_1=\sqrt{5}$.

c) $\log_x 3=-2 \rightarrow x^{-2}=3 \rightarrow x^2=\frac{1}{3} \rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{\sqrt{3}}{3} \\ x_2=-\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \rightarrow$ La única solución válida es $x_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

d) $\log_x 2=5 \rightarrow x^5=2 \rightarrow x=\sqrt[5]{2}$

99. Calcula el valor de *x* en las siguientes expresiones.

a) $\log_x 8=4$

b) $\log_x \frac{1}{4}=-4$

c) $\log_x 3=5$

d) $\log_x \frac{4}{9}=-2$

e) $\log_x 343=3$

f) $\log_x 2=4$

g) $\log_x\left(-\frac{125}{8}\right)=-3$

h) $\log_x 49=6$

a) $\log_x 8=4 \rightarrow x^4=8 \rightarrow x=\sqrt[4]{8}$

b) $\log_x \frac{1}{4}=-4 \rightarrow x^{-4}=\frac{1}{4} \rightarrow x=\sqrt[4]{4}=\sqrt{2}$

c) $\log_x 3=5 \rightarrow x^5=3 \rightarrow x=\sqrt[5]{3}$

d) $\log_x \frac{4}{9}=-2 \rightarrow x^{-2}=\frac{4}{9} \rightarrow x^2=\frac{9}{4} \rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{3}{2} \\ x_2=-\frac{3}{2} \end{cases}$

La única solución válida es $x_1=\frac{3}{2}$.

e) $\log_x 343=3 \rightarrow x^3=343 \rightarrow x=7$

f) $\log_x 2=4 \rightarrow x^4=2 \rightarrow x=\sqrt[4]{2}$

g) $\log_x\left(-\frac{125}{8}\right) = -3 \rightarrow x^{-3} = -\frac{125}{8} \rightarrow x = -\frac{2}{5}$

h) $\log_x 49 = 6 \rightarrow x^6 = 49 \rightarrow x = \sqrt[6]{49} = \sqrt[3]{7}$

100. Calcula el valor de *x* en las expresiones que aparecen a continuación.

a) $\log_3 9^x = 2$
b) $\log 2^x = \frac{3}{2}$
c) $\ln 3^x = -1$
d) $\log_2 4^{x+4} = -2$
e) $\log_3 9^{x+3} = 3$
f) $\log 2^{\frac{x}{2}} = \frac{3}{2}$
g) $\ln 3^{x+6} = 3$
h) $\log_3 27^{3x+4} = -2$

a) $\log_3 9^x = 2 \rightarrow 3^2 = 9^x \rightarrow x = 1$

b) $\log 2^x = \frac{3}{2} \rightarrow x\log 2 = \frac{3}{2} \rightarrow x = \frac{3}{2\log 2} \approx 4{,}983$

c) $\ln 3^x = -1 \rightarrow x\ln 3 = -1 \rightarrow x = -\frac{1}{\ln 3} \approx -0{,}91$

d) $\log_2 4^{x+4} = -2 \rightarrow 2^{-2} = 4^{x+4} \rightarrow 4^{-1} = 4^{x+4} \rightarrow -1 = x+4 \rightarrow x = -5$

e) $\log_3 9^{x+3} = 3 \rightarrow 3^3 = 9^{x+3} \rightarrow 3^3 = 3^{2x+6} \rightarrow 3 = 2x+6 \rightarrow x = -\frac{3}{2}$

f) $\log 2^{\frac{x}{2}} = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{x}{2}\log 2 = \frac{3}{2} \rightarrow x = \frac{3}{\log 2} \approx 9{,}966$

g) $\ln 3^{x+6} = 3 \rightarrow (x+6)\ln 3 = 3 \rightarrow x = \frac{3}{\ln 3} - 6 \approx -3{,}269$

h) $\log_3 27^{3x+4} = -2 \rightarrow (3x+4)\log_3 27 = -2 \rightarrow 3\cdot(3x+4) = -2 \rightarrow x = -\frac{14}{9}$

101. Resuelve estas ecuaciones logarítmicas.

a) $\log x = -1 + \log 5$
b) $\log_5 x = 2 + \log_5 7$
c) $\log_2 x = 3 + \log_2 9$

a) $\log x = -1 + \log 5 \rightarrow \log\frac{x}{5} = -1 \rightarrow \frac{x}{5} = \frac{1}{10} \rightarrow x = \frac{1}{2}$

b) $\log_5 x = 2 + \log_5 7 \rightarrow \log_5\frac{x}{7} = 2 \rightarrow \frac{x}{7} = 25 \rightarrow x = 175$

c) $\log_2 x = 3 + \log_2 9 \rightarrow \log_2\frac{x}{9} = 3 \rightarrow \frac{x}{9} = 8 \rightarrow x = 72$

102. Resuelve las ecuaciones logarítmicas que aparecen a continuación.

a) $\log_4 x = 2 + \log_4 \frac{1}{2}$

b) $\log(3x - 1) = -2 + \log 50$

c) $\log_2 \frac{3x-1}{4} = 2 + \log_2 \frac{1}{16}$

a) $\log_4 x = 2 + \log_4 \frac{1}{2} \rightarrow \log_4 2x = 2 \rightarrow 2x = 16 \rightarrow x = 8$

b) $\log\ (3x-1) = -2 + \log 50 \rightarrow \log \frac{3x-1}{50} = -2 \rightarrow \frac{3x-1}{50} = \frac{1}{100} \rightarrow x = \frac{1}{2}$

c) $\log_2 \frac{3x-1}{4} = 2 + \log_2 \frac{1}{16} \rightarrow \log_2 \frac{16(3x-1)}{4} = 2 \rightarrow 12x - 4 = 4 \rightarrow x = \frac{2}{3}$

103. Calcula el valor de *x* en las siguientes ecuaciones.

a) $\log_x 9 + \frac{1}{2}\log_x 16 = 2$

b) $\log_{x+1} (6x + 1) = 2$

c) $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 3x + 3) = 0$

d) $\log_2 x^3 - \log_2 x^2 = 4$

e) $\log_2 (x^2 + 4x - 1) = 2$

a) $\log_x 9 + \frac{1}{2}\log_x 16 = 2 \rightarrow \log_x\ 9 \cdot \sqrt{16}\ = 2 \rightarrow x^2 = 36 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -6 \end{cases}$

La única solución válida es $x_1 = 6$.

b) $\log_{x+1}(6x+1) = 2 \rightarrow (x+1)^2 = 6x + 1 \rightarrow x^2 - 4x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases}$ $\rightarrow$ La única solución válida es $x_2 = 4$.

c) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 3x + 3) = 0 \rightarrow 1 = x^2 - 3x + 3 \rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

d) $\log_2 x^3 - \log_2 x^2 = 4 \rightarrow \log_2 x = 4 \rightarrow x = 16$

e) $\log_2(x^2 + 4x - 1) = 2 \rightarrow 4 = x^2 + 4x - 1 \rightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -5 \end{cases}$

104. Resuelve estas ecuaciones.

a) $\log (x - 3) + \log (x + 1) = 1 - \log (x - 5)$

b) $\log_3 (x^2 + x + 1) = 27$

c) $\log_5 \left(x + \frac{1}{2}\right) + \log_5 \left(x + \frac{3}{4}\right) = 1 - \log_5 \left(x + \frac{1}{3}\right)$

d) $\log \left(\frac{x-2}{2}\right) + \log \left(\frac{x-3}{2}\right) + \log \left(\frac{2x-1}{3}\right) = 1$

a) $\log(x-3) + \log(x+1) = 1 - \log(x-5) \rightarrow \log\ (x-3)(x+1)(x-5)\ = 1 \rightarrow$

$\rightarrow (x-3)(x+1)(x-5) = 10 \rightarrow x^3 - 7x^2 + 7x + 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -0{,}47419 \\ x_2 = 1{,}8873 \\ x_3 = 5{,}5869 \end{cases}$

La única solución válida es $x_3 = 5{,}5869$.

b) $\log_3(x^2 + x + 1) = 27 \rightarrow x^2 + x + 1 = 3^{27} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2{,}7614 \cdot 10^6 \\ x_2 = 2{,}7614 \cdot 10^6 \end{cases}$

c) $\log_5\left(x + \frac{1}{2}\right) + \log_5\left(x + \frac{3}{4}\right) = 1 - \log_5\left(x + \frac{1}{3}\right) \rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{4}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) = 5 \rightarrow x^3 + \frac{19}{12}x^2 + \frac{19}{24}x - \frac{39}{8} = 0 \rightarrow x = 1{,}1906$

d) $\log\left(\frac{x-2}{2}\right) + \log\left(\frac{x-3}{2}\right) + \log\left(\frac{2x-1}{3}\right) = 1 \rightarrow \left(\frac{x-2}{2}\right)\left(\frac{x-3}{2}\right)\left(\frac{2x-1}{3}\right) = 10 \rightarrow \frac{1}{6}x^3 - \frac{11}{12}x^2 + \frac{17}{12}x - \frac{21}{2} = 0 \rightarrow x = 5{,}8775$

105. **Halla el valor de x en las siguientes ecuaciones.**

a) $\log_3 \sqrt{x-5} + \log_3 \sqrt{2x-3} = 1$

b) $\log_2 \sqrt{x} - \log_2 \sqrt[3]{x} = \dfrac{2}{3}$

a) $\log_3 \sqrt{x-5} + \log_3 \sqrt{2x-3} = 1 \rightarrow \dfrac{1}{2}\log_3\left[(x-5)(2x-3)\right] = 1 \rightarrow (x-5)(2x-3) = 9 \rightarrow 2x^2 - 13x + 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

La única solución válida es $x_1 = 6$.

b) $\log_2 \sqrt{x} - \log_2 \sqrt[3]{x} = \dfrac{2}{3} \rightarrow \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} = 2^{\frac{2}{3}} \rightarrow x^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{2}{3}} \rightarrow x = \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^6 = 16$

106. **Resuelve las ecuaciones logarítmicas que aparecen a continuación.**

a) $\log_5 (x-1) + \log_5 (x+1) = \log_5 3x$

b) $\log_2 (x-3) - \log_2 (2x+21) = 1 - \log_2 (x-2)$

a) $\log_5 (x-1) + \log_5 (x+1) = \log_5 3x \rightarrow x^2 - 1 = 3x \rightarrow x^2 - 3x - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2} \approx 3{,}303 \\ x_2 = \dfrac{3-\sqrt{13}}{2} \approx -0{,}303 \end{cases}$

La única solución válida es $x_1 = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2} \approx 3{,}303$.

b) $\log_2 (x-3) - \log_2 (2x+21) = 1 - \log_2 (x-2) \rightarrow \dfrac{(x-3)(x-2)}{2x+21} = 2 \rightarrow x^2 - 9x - 36 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 12 \end{cases}$

La única solución válida es $x_2 = 12$.

107. **Calcula el valor de x en las siguientes ecuaciones exponenciales.**

a) $4^x = \dfrac{1}{64}$

b) $2^{x-5} = 32$

c) $3^{6-x} = 27^{x-2}$

d) $32^{x-2} = 2$

e) $16^{2x-4} = 1$

f) $2^{x+1} = 8$

g) $2^{x+1} = 16$

h) $2^{x+1} = 128$

a) $4^x = \dfrac{1}{64} \rightarrow 4^x = 4^{-3} \rightarrow x = -3$

b) $2^{x-5} = 32 \rightarrow x - 5 = 5 \rightarrow x = 10$

c) $3^{6-x} = 27^{x-2} \rightarrow 6 - x = 3x - 6 \rightarrow x = 3$

d) $32^{x-2} = 2 \rightarrow 5x - 10 = 1 \rightarrow x = \dfrac{11}{5}$

e) $16^{2x-4} = 1 \rightarrow 2^{4(2x-4)} = 2^0 \rightarrow 8x = 16 \rightarrow x = 2$

f) $2^{x+1} = 8 \rightarrow x + 1 = 3 \rightarrow x = 2$

g) $2^{x+1} = 16 \rightarrow x + 1 = 4 \rightarrow x = 3$

h) $2^{x+1} = 128 \rightarrow x + 1 = 7 \rightarrow x = 6$

108. **Resuelve las ecuaciones exponenciales que aparecen a continuación.**

a) $64^{2x-5} = 16^{x-2}$

b) $125^{x-3} = 25^{x-3}$

c) $5^{x-3} = 1$

d) $2^{x+1} = \frac{1}{8}$

e) $2^{x+1} = \frac{1}{16}$

f) $2^{x+1} = \frac{1}{128}$

a) $64^{2x-5} = 16^{x-2} \rightarrow 3(2x-5) = 2(x-2) \rightarrow 6x - 15 = 2x - 4 \rightarrow x = \frac{11}{4}$

b) $125^{x-3} = 25^{x-3} \rightarrow$ No existe solución real.

c) $5^{x-3} = 1 \rightarrow x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$

d) $2^{x+1} = \frac{1}{8} \rightarrow x + 1 = -3 \rightarrow x = -4$

e) $2^{x+1} = \frac{1}{16} \rightarrow x + 1 = -4 \rightarrow x = -5$

f) $2^{x+1} = \frac{1}{128} \rightarrow x + 1 = -7 \rightarrow x = -8$

109. **Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales.**

a) $3 \cdot 27^{x-2} = 9^x$

b) $5^{x+4} = 125^{x-4}$

c) $\frac{1}{81^{6-x}} = 3^{4-x}$

d) $32^{2x-3} = 2^{x+3}$

e) $125^{x+2} = 5^{2x}$

f) $256^x = 4 \cdot 4^{2x-3}$

a) $3 \cdot 27^{x-2} = 9^x \rightarrow 3^{3x-6+1} = 3^{2x} \rightarrow 3x - 5 = 2x \rightarrow x = 5$

b) $5^{x+4} = 125^{x-4} \rightarrow x + 4 = 3x - 12 \rightarrow x = 8$

c) $\frac{1}{81^{6-x}} = 3^{4-x} \rightarrow 3^{4(x-6)} = 3^{4-x} \rightarrow 4x - 24 = 4 - x \rightarrow x = \frac{28}{5}$

d) $32^{2x-3} = 2^{x+3} \rightarrow 10x - 15 = x + 3 \rightarrow x = 2$

e) $125^{x+2} = 5^{2x} \rightarrow 3x + 6 = 2x \rightarrow x = -6$

f) $256^x = 4 \cdot 4^{2x-3} \rightarrow 4^4 = 4^{2x-2} \rightarrow 6 = 2x \rightarrow x = 3$

110. **Opera con las potencias y calcula el valor de *x* en las siguientes ecuaciones exponenciales.**

a) $3^{x^3 - \frac{x^2}{10} - \frac{4x}{5} + \frac{3}{10}} = 1$

b) $\frac{2^{x^3 - x^2 - 5x}}{8} = 1$

a) $3^{x^3 - \frac{x^2}{10} - \frac{4x}{5} + \frac{3}{10}} = 1 \rightarrow 10x^3 - x^2 - 8x + 3 = 0 \rightarrow x_1 = -1 \quad x_2 = \frac{1}{2} \quad x_3 = \frac{3}{5}$

b) $\frac{2^{x^3 - x^2 - 5x}}{8} = 1 \rightarrow 2^{x^3 - x^2 - 5x - 3} = 2^0 \rightarrow x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

111. **Resuelve las ecuaciones exponenciales que aparecen a continuación.**

a) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x^3-\frac{34x^2}{5}-\frac{48x}{5}} = 1$ b) $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{x^3} = \left(\dfrac{7}{3}\right)^{-\frac{1}{3}(2x^2+16x)}$ c) $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{5-x^3} \cdot \sqrt{7^{13x^2+13x}} = 1$

a) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x^3-\frac{34x^2}{5}-\frac{48x}{5}} = 1 \rightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{5x^3-34x^2-48x}{5}} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^0 \rightarrow 5x^3-34x^2-48x=0 \rightarrow x_1=0 \quad x_2=-\dfrac{6}{5} \quad x_3=8$

b) $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{x^3} = \left(\dfrac{7}{3}\right)^{-\frac{1}{3}(2x^2+16x)} \rightarrow x^3=\dfrac{1}{3}(2x^2+16x) \rightarrow x^3-\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{16}{3}x=0 \rightarrow x_1=0 \quad x_2=\dfrac{8}{3} \quad x_3=-2$

c) $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{5-x^3} \cdot \sqrt{7^{13x^2+13x}} = 1 \rightarrow 7^{x^3-5} \cdot 7^{\frac{13x^2+13x}{2}} = 7^0 \rightarrow 2x^3+13x^2+13x-10=0 \rightarrow x_1=-5 \quad x_2=\dfrac{1}{2} \quad x_3=-2$

112. **Halla el valor de la incógnita *x*, suponiendo que el resto de letras que aparecen son constantes.**

a) $a^{2x-1} = a^2$
b) $m^{x-3} = (m^2)^{2x}$
c) $(3a)^{2x-5} = 9a^2$
d) $(p-3)^{5x} = p^2-6p+9$
e) $(a^2+2ab+b^2)^2 = (a+b)^{2x}$
f) $(9-2x-x^2)^{x-3} = 1$
g) $(x+1)^{x-1} = 1$

a) $a^{2x-1}=a^2 \rightarrow 2x-1=2 \rightarrow x=\dfrac{3}{2}$

b) $m^{x-3}=(m^2)^{2x} \rightarrow x-3=4x \rightarrow x=-1$

c) $(3a)^{2x-5}=9a^2 \rightarrow (3a)^{2x-5}=(3a)^2 \rightarrow 2x-5=2 \rightarrow x=\dfrac{7}{2}$

d) $(p-3)^{5x}=p^2-6p+9 \rightarrow (p-3)^{5x}=(p-3)^2 \rightarrow 5x=2 \rightarrow x=\dfrac{2}{5}$

e) $(a^2+2ab+b^2)^2=(a+b)^{2x} \rightarrow (a+b)^4=(a+b)^{2x} \rightarrow 4=2x \rightarrow x=2$

f) $(9-2x-x^2)^{x-3}=1 \rightarrow \begin{cases} x-3=0 \rightarrow x_1=3 \\ 9-2x-x^2=1 \rightarrow \begin{cases} x_2=-4 \\ x_3=2 \end{cases} \end{cases}$

g) $(x+1)^{x-1}=1 \rightarrow \begin{cases} x-1=0 \rightarrow x_1=1 \\ x+1=1 \rightarrow x_2=0 \end{cases}$

113. **Resuelve estas ecuaciones exponenciales ayudándote de un cambio de variable.**

a) $9^{2x} - 3\cdot 9^x + 2 = 0$
b) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x} - 2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = 35$
c) $7^{4x} - 3\cdot 7^{3x} - 5\cdot 7^{2x} + 13\cdot 7^x + 6 = 0$
d) $\left(\dfrac{5}{6}\right)^{4x} - 2\cdot\left(\dfrac{5}{6}\right)^x + 1 = 0$

a) $9^{2x}-3\cdot 9^x+2=0\xrightarrow{9^x=t}t^2-3t+2=0\rightarrow\begin{cases}t_1=1\rightarrow 9^x=1\rightarrow x=0\\ t_2=2\rightarrow 9^x=2\rightarrow x=\dfrac{\log 2}{\log 9}\approx 0{,}3155\end{cases}$

b) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x}-2\left(\dfrac{2}{3}\right)^x=35\xrightarrow{\left(\frac{2}{3}\right)^x=t}t^2-2t-35=0\rightarrow\begin{cases}t_1=-5\rightarrow\left(\dfrac{2}{3}\right)^x=-5\rightarrow\text{Imposible}\\ t_2=7\rightarrow\left(\dfrac{2}{3}\right)^x=7\rightarrow x=\dfrac{\log 7}{\log\frac{2}{3}}\approx -4{,}8\end{cases}$

La solución obtenida se descarta, pues no es válida al sustituirla en la ecuación. Por lo tanto, esta ecuación no tiene solución.

c) $7^{4x}-3\cdot 7^{3x}-5\cdot 7^{2x}+13\cdot 7^x+6=0\xrightarrow{7^x=t}t^4-3t^3-5t^2+13t+6=0\rightarrow\begin{cases}t_1=-2\rightarrow 7^x=-2\rightarrow\text{Imposible}\\ t_2=3\rightarrow 7^x=3\rightarrow x=\dfrac{\log 3}{\log 7}\approx 0{,}5646\\ t_3=1-\sqrt{2}\rightarrow 7^x=1-\sqrt{2}\rightarrow\text{Imposible}\\ t_4=1+\sqrt{2}\rightarrow 7^x=1+\sqrt{2}\rightarrow\text{Imposible}\end{cases}$

d) $\left(\dfrac{5}{6}\right)^{4x}-2\left(\dfrac{5}{6}\right)^x+1=0\xrightarrow{\left(\frac{5}{6}\right)^x=t}t^4-2t+1=0\rightarrow\begin{cases}t_1=1\rightarrow\left(\dfrac{5}{6}\right)^x=1\rightarrow x=0\\ t_2=0{,}54369\rightarrow\left(\dfrac{5}{6}\right)^x=0{,}54369\rightarrow x=\dfrac{\log 0{,}54369}{\log\left(\frac{5}{6}\right)}\approx 3{,}3423\end{cases}$

114. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales con la ayuda de un cambio de variable.

a) $3^{3x}+5\cdot 3^{2x-1}-11\cdot 3^{x-1}+1=0$

b) $4\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3x}=9\cdot 2^{-2x}-2^{-x+1}$

c) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{3x+1}+1=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x}+\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x+1}$

a) $3^{3x}+5\cdot 3^{2x-1}-11\cdot 3^{x-1}+1=0\xrightarrow{3^x=t}t^3+\dfrac{5}{3}t^2-\dfrac{11}{3}t+1=0\rightarrow\begin{cases}t_1=1\rightarrow 3^x=1\rightarrow x_1=0\\ t_2=-3\rightarrow 3^x=-3\rightarrow\text{Imposible}\\ t_3=\dfrac{1}{3}\rightarrow 3^x=\dfrac{1}{3}\rightarrow x_2=-1\end{cases}$

b) $4\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3x}=9\cdot 2^{-2x}-2^{-x+1}\rightarrow 4\cdot(2^x)^{-3}-9\cdot(2^x)^{-2}+2\cdot(2^x)^{-1}=0\xrightarrow{2^x=t}\dfrac{4}{t^3}-\dfrac{9}{t^2}+\dfrac{2}{t}=0$

$2t^2-9t+4=0\rightarrow 2^x=\begin{cases}t_1=4\rightarrow 2^x=4\rightarrow x_1=2\\ t_2=\dfrac{1}{2}\rightarrow 2^x=\dfrac{1}{2}\rightarrow x_2=-1\end{cases}$

c) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{3x+1}+1=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x}+\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x+1}\xrightarrow{\left(\frac{3}{2}\right)^x=t}\dfrac{3}{2}t^3-t^2-\dfrac{3}{2}t+1=0\rightarrow\begin{cases}t_1=1\rightarrow\left(\dfrac{3}{2}\right)^x=1\rightarrow x_1=0\\ t_2=-1\rightarrow\left(\dfrac{3}{2}\right)^x=-1\rightarrow\text{Imposible}\\ t_3=\dfrac{2}{3}\rightarrow\left(\dfrac{3}{2}\right)^x=\dfrac{2}{3}\rightarrow x_2=-1\end{cases}$

115. Resuelve estas ecuaciones que contienen fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{x+3}{x-5}=0$

b) $\dfrac{2x-3}{x+3}=0$

c) $\dfrac{-x+1}{2-3x}=0$

d) $\dfrac{2-x}{2x+5}-1=0$

a) $x=-3$ b) $x=\dfrac{3}{2}$ c) $x=1$ d) $x=-1$

116. Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones.

a) $\dfrac{x^2-1}{x+1}=0$

b) $\dfrac{-x^2+3}{2x-3}=0$

c) $\dfrac{x^2-3x}{x^2-4}=0$

d) $\dfrac{-x+3}{2x^2-18}=0$

a) $x_1=1$ (no es solución $x=-1$ porque anula el denominador)

b) $x_1=\sqrt{3}$, $x_2=-\sqrt{3}$

c) $x_1=0$, $x_2=3$

d) No tiene solución, ya que $x=3$ anula el denominador.

117. Determina la solución de las siguientes ecuaciones.

a) $\sqrt{5-3x}=x$

b) $\sqrt{x-3}=x$

c) $\sqrt{4-3x-x^2}=x$

d) $\log(2-5x)=1$

e) $\log(6-x-x^2)=2$

f) $\log(x^2+1)=2$

a) $\sqrt{5-3x}=x \rightarrow 5-3x=x^2 \rightarrow x^2+3x-5=0$

$$\rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{9+20}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{29}}{2}\rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{-3+\sqrt{29}}{2}\\[2mm] x_2=\dfrac{-3-\sqrt{29}}{2}\end{cases}$$

La única solución válida es $x_1=\dfrac{-3+\sqrt{29}}{2}$, porque aunque sí existe $\sqrt{5-3x}$ en ambos casos, en el caso de $x_2=\dfrac{-3-\sqrt{29}}{2}$ que es un número negativo se iguala a una raíz y solo se considera su valor numérico positivo.

b) $\sqrt{x-3}=x \rightarrow x-3=x^2 \rightarrow x^2-x+3=0$

$$\rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1-12}}{2}\rightarrow \text{No tiene solución.}$$

c) $\sqrt{4-3x-x^2}=x \rightarrow 4-3x-x^2=x^2 \rightarrow 2x^2+3x-4=0$

$$\rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{9+32}}{4}=\frac{-3\pm\sqrt{41}}{4}\rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{-3+\sqrt{41}}{4}\\[2mm] x_2=\dfrac{-3-\sqrt{41}}{4}\end{cases}$$

La única solución válida es $x_1 = \frac{-3+\sqrt{41}}{4}$, porque aunque sí existe $\sqrt{4-3x-x^2}$ en ambos casos, en el caso de $x_2 = \frac{-3-\sqrt{41}}{4}$ que es un número negativo se iguala a una raíz y solo se considera su valor numérico positivo.

d) $\log(2-5x) = 1 \rightarrow 2-5x = 10$

$\rightarrow x = -\frac{8}{5}$

e) $\log(6-x-x^2) = 2 \rightarrow 6-x-x^2 = 100 \rightarrow x^2+x+94 = 0$

$\rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{-375}}{2} \rightarrow$ No tiene solución.

f) $\log(x^2+1) = 2 \rightarrow x^2+1 = 100$

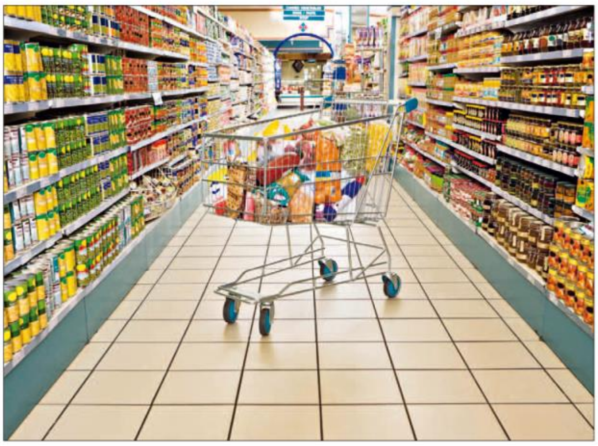
$\rightarrow x^2 = 99 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3\sqrt{11} \\ x_2 = -3\sqrt{11} \end{cases}$

Ambas soluciones son válidas.

118. El director de un supermercado ha observado que el número de clientes atendidos cada hora por un dependiente está relacionado con su experiencia. Ha estimado que ese número puede calcularse de forma aproximada con la función:

$$C(d) = \frac{40d}{d+3}$$

donde *d* es el número de días que el dependiente lleva trabajando y *C* es el número de clientes atendidos en una hora.



a) ¿Cuántos clientes por hora atendería un dependiente que lleve trabajando dos días?

b) El director sabe que un dependiente empieza a ser rentable a la empresa cuando atiende a 32 clientes por hora. ¿Cuándo sucede eso?

c) Investiga lo que sucede con el número de clientes atendidos por dependientes que tienen mucha experiencia. ¿Puedes constatar alguna característica especial?

a) $C(2)=\frac{40\cdot 2}{2+3}=16\rightarrow$ Un dependiente que lleve trabajando 2 días atenderá en una hora a 16 clientes.

b) $32=\frac{40d}{d+3}\rightarrow 32d+96=40d\rightarrow 8d=96\rightarrow d=12\rightarrow$ Un dependiente empieza a ser rentable a partir de 12 días trabajados.

c) Calculando el número de clientes atendidos por dependientes con mucha experiencia, se observa que, como máximo, cada uno podrá atender a 40 clientes por hora:

$$C(100)=\frac{40\cdot 100}{100+3}=38{,}835\,,\ C(500)=\frac{40\cdot 500}{500+3}=39{,}761\,,\ C(10\,000)=\frac{40\cdot 10\,000}{10\,000+3}=39{,}988$$

119. Determina la suma y el producto de las soluciones de esta ecuación.

$$x^2-9x+14=0$$

Encuentra las soluciones de la ecuación. ¿Puedes explicar lo que sucede?

El producto de las raíces es 14 y la suma es 9.

Las raíces son $x_1=2$ y $x_2=7$.

Si el coeficiente del término de segundo grado es 1, el producto de las raíces es el término independiente y la suma de las raíces es el opuesto al coeficiente del término de primer grado.

120. Estudia el valor de los coeficientes de la ecuación bicuadrada $ax^4+bx^2+c=0$ para que tenga cuatro, tres, dos, una o ninguna solución.

Analizamos el número de raíces de la ecuación bicuadrada $ax^4+bx^2+c=0$ a partir de las raíces obtenidas en la ecuación de segundo grado asociada, $az^2+bz+c=0$.

Si $\Delta=\sqrt{b^2-4ac}<0\rightarrow$ No tiene solución.

Si $\Delta=\sqrt{b^2-4ac}=0\rightarrow z=\frac{-b}{2a}\rightarrow$ Si $\frac{-b}{2a}<0\rightarrow$ No tiene solución.

$\rightarrow$ Si $\frac{-b}{2a}=0$ $(b=0,\ c=0)\rightarrow$ Tiene una solución: $x=0$.

$\rightarrow$ Si $\frac{-b}{2a}>0\rightarrow$ Tiene dos soluciones opuestas.

Si $\Delta=\sqrt{b^2-4ac}>0\rightarrow$ La ecuación de segundo grado tiene dos soluciones.

Si las dos soluciones son negativas, la ecuación bicuadrada no tiene solución.

$$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}<0 \text{ y } \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}<0\rightarrow \text{No tiene solución.}$$

Si una solución es negativa y la otra es cero:

$c=0$ y $\frac{-b}{a}<0\rightarrow$ Tiene una solución: $x=0$.

Si una solución es negativa y la otra es cero:

$c=0$ y $\frac{-b}{a}<0\rightarrow$ Tiene una solución: $x=0$.

Si una solución es positiva y la otra es cero:

$c=0$ y $\frac{-b}{a}>0\rightarrow$ Tiene tres soluciones: $x=0,\ x=\pm\sqrt{\frac{-b}{a}}$.

Si las dos soluciones son positivas, la ecuación bicuadrada tiene cuatro soluciones.

$$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}>0 \text{ y } \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}>0 \rightarrow \text{Tiene cuatro soluciones.}$$

$$x=\begin{cases}\pm\sqrt{\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}\\ \pm\sqrt{\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}\end{cases}$$

121. Hace cuatro años un individuo tenía la mitad más la tercera parte de la edad que tiene ahora. ¿Cuál es su edad?

Llamamos x a la edad actual del individuo y planteamos la ecuación:

$$x-4=\frac{x}{2}+\frac{x}{3}\rightarrow 6x-24=3x+2x\rightarrow x=24$$

Actualmente tiene 24 años.

122. Una lancha recorre 50 metros por minuto al bajar un río y 20 metros por minuto al subirlo. ¿A qué distancia se puede bajar por el río si solo se dispone de 3 horas para la excursión teniendo que volver al punto de partida?

Llamamos x a la distancia que podemos recorrer en 3 horas, es decir, en 180 minutos. Para recorrer 50 metros hacia arriba y hacia abajo se necesitan 3 minutos y medio (uno para bajar y dos y medio para subir), por lo que:

$$\left.\begin{array}{l}50\text{ m}\longrightarrow 3{,}5\text{ min}\\ x\text{ m}\longrightarrow 180\text{ min}\end{array}\right\}\rightarrow 9000=\frac{7}{2}x\rightarrow x=\frac{18000}{7}=2571{,}43\text{ m}$$

Se pueden bajar hasta 2 571,43 metros del río.

123. Descompón el número 60 en dos partes de manera que dividiendo una entre la otra el cociente dé 3 y el resto 8.

Si x es uno de los sumandos, el otro será $60-x$. Entonces, utilizando el algoritmo de la prueba de la división, se tiene la siguiente ecuación:

$x=3(60-x)+8\rightarrow x=180-3x+8\rightarrow 4x=188\rightarrow x=47$, y por lo tanto el segundo sumando será 13.

124. Halla dos números consecutivos, sabiendo que la suma de la cuarta parte y la quinta parte del menor y la suma de la tercera parte y la séptima parte del mayor son también números consecutivos.

Llamando x al número menor, $x+1$ es el número mayor consecutivo. Entonces:

$$\frac{x}{4}+\frac{x}{5}+1=\frac{x+1}{3}+\frac{x+1}{7}\rightarrow 105x+84x+420=140x+140+60x+60\rightarrow 220=11x\rightarrow x=20$$

Los números buscados son $x=20$, $x+1=21$.

125. Un comerciante compra melones a 40 céntimos/kg y los vende a 60 céntimos/kg. Halla cuántos kilogramos de melones compró si se le estropearon 10 kg y obtuvo 42 €.

Llamamos x al número de kilogramos de melones que compró:

$0{,}20(x - 10) = 42$

$x = 220$

El comerciante compró 220 kg de melones.

126. Entre dos cubos A y B de igual capacidad se distribuyen en partes desiguales 10 litros de agua. El cubo A se llenaría si se vertiesen los dos tercios del agua contenida en B. Este se llenaría si se le añadiese la mitad del agua de A. Se desea saber cuánta es el agua contenida en cada cubo y su capacidad lleno.

Si en el cubo A hay x litros de agua, entonces el cubo B contendrá $10 - x$ litros.

La capacidad total del cubo A viene dada por $x+\frac{2}{3}(10-x)$ y la capacidad del cubo B por $(10-x)+\frac{x}{2}$.

Como el volumen de ambos cubos es igual:

$$x+\frac{2}{3}(10-x)=(10-x)+\frac{x}{2}\rightarrow 6x+40-4x=60-6x+3x\rightarrow 5x=20\rightarrow x=4$$

El cubo A contiene 4 litros de agua; y el cubo B, 6 litros.

La capacidad total de ambos cubos es de $10-4+\frac{4}{2}=8$ litros.

127. Una madre, para estimular a su hijo, le da un euro por cada ejercicio que haga bien. Si le sale mal, este debe darle 50 céntimos a su madre. Después de 20 ejercicios, el hijo lleva ganados 15,50 €. ¿Cuántos ejercicios hizo bien?

Sean x el número de ejercicios que ha realizado mal. Entonces, $20 - x$ será el número de ejercicios bien resueltos. Como lleva ganados 15,50 €, se plantea y se resuelve la siguiente ecuación:

$$(20-x)-0{,}5x=15{,}50\rightarrow 20-1{,}5x=15{,}5\rightarrow x=1{,}5x=4{,}5\rightarrow x=3$$

Es decir, ha realizado 3 ejercicios mal, y 17 bien.

128. Si aumentáramos en 4 cm la arista de un cubo, su volumen se multiplicaría por 8. Halla la medida de la arista.

Sea x la longitud en cm de la arista del cubo pequeño. Entonces la arista del cubo grande medirá

$x+4$ cm. Como el volumen del cubo grande es 8 veces el del cubo pequeño, se tiene la siguiente ecuación:

$$8x^3=(x+4)^3\rightarrow 8x^3=x^3+12x^2+48+64\rightarrow 7x^3-12x^2-48-64=0\rightarrow x=4$$

Luego las aristas miden 4 cm y 8 cm, respectivamente.

129. Si r y s son las soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$, ¿cuáles son las soluciones de $cx^2 - bx + a = 0$?

Por ser r y s las raíces de $ax^2+bx+c=0$, se tiene que $ax^2+bx+c=k\ \ x-r\ \ \ x-s\ =kx^2+\ -kr-ks\ \ x+\ \ krs$, de donde se obtienen los valores de a, b, y c en función de k, r y s:

$a=k \qquad b=-k\ \ r+s \qquad c=krs$

Ahora se sustituyen los valores en la nueva ecuación y se resuelve:

$$cx^2 - bx + a = 0 \rightarrow krsx^2 + k\ \ r+s\ \ x + k = 0$$

$$x = \frac{-k\ \ r+s\ \ \pm\sqrt{k\ \ r+s\ \ ^2 - 4\cdot krs\cdot k}}{2\cdot krs} \rightarrow x = \frac{-k\ \ r+s\ \ \pm\sqrt{k^2s^2 + 2k^2rs + k^2r^2 - 4rsk^2}}{2krs} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{-k\ \ r+s\ \ \pm\sqrt{k^2r^2 - 2rsk^2 + k^2s^2}}{2krs} \rightarrow x = \frac{-k\ \ r+s\ \ \pm\sqrt{k^2\ \ r-s\ \ ^2}}{2krs} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{-k\ \ r+s\ \ \pm k\ \ r-s}{2krs} \rightarrow x = \frac{-\ \ r+s\ \ \pm\ \ r-s}{2rs} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-\ \ r+s\ \ -\ \ r-s}{2rs} = -\dfrac{1}{s} \\ x_2 = \dfrac{-\ \ r+s\ \ +\ \ r-s}{2rs} = -\dfrac{1}{r} \end{cases}$$

Hay que contemplar el caso en el que *r* y *s* son cero. Para ello, se estudian varios casos y se despeja *x* de la ecuación $krsx^2 + k\ \ r+s\ \ x + k = k\ \ rsx^2 +\ \ r+s\ \ x + 1\ \ = 0.$

Se supone que $k \neq 0$, pues así se evita llegar a 0 = 0.

Caso 1: $r \neq 0$ y $s \neq 0 \rightarrow$ Las raíces son $x_1 = -\frac{1}{r}$ y $x_2 = -\frac{1}{s}$

Caso 2: $r = 0$ y $s \neq 0 \rightarrow sx + 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{s}$

Caso3: $r \neq 0$ y $s = 0 \rightarrow rx + 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{r}$

Caso4: $r = 0$ y $s = 0 \rightarrow k = 0 \rightarrow 1 = 0 \rightarrow$ No existe solución.

130. En una empresa que se dedica a la fabricación de recipientes de cristal se ha calculado que para fabricar un tipo de vaso de vidrio hay unos gastos fijos de 3 000 € y un gasto en materia prima de 1,50 € por vaso. ¿Cuántos vasos se podrán fabricar en dicha fábrica con un gasto exacto de 7 000 €?

Sea *x* el número máximo de vasos que se podrá fabricar. Entonces, como el gasto máximo permitido es de 7 000 €:

$$3000 + 1{,}5x \leq 7000 \rightarrow 1{,}5x \leq 4000 \rightarrow x \leq 2666{,}667$$

Por lo tanto, como máximo se podrán fabricar 2666 vasos.

131. Doblando 14 cm de alambre se quiere formar un rectángulo. ¿Cuáles son sus dimensiones si su diagonal mide 5 cm?

Como el alambre tiene una longitud de 14 cm, el semiperímetro del rectángulo será de 7 m.

Si *x* es la base del rectángulo, entonces 7 – *x* será su altura.

Se cumple el teorema de Pitágoras, de modo que $x^2 + (7 - x)^2 = 5^2 \rightarrow -14x + 49 = 25 \rightarrow x = \frac{24}{14} = \frac{12}{7}$

La base del rectángulo mide $\frac{12}{7}$ y la altura $\frac{37}{7}$.

132. **Una madre de 24 años acaba de tener a su hijo. ¿Cuándo será su edad $\frac{2}{5}$ de la de su madre?**

	Actualidad	Dentro de *x* años
Madre	24	$24+x$
Hijo	0	x

$\frac{2}{5}(24+x)=x \rightarrow x=16 \rightarrow$ Cuando el hijo tenga 16 años su edad será $\frac{2}{5}$ de la de su madre.

133. **El triple de un número menos su mitad es igual a 3. ¿Qué número es?**

$$3x-\frac{x}{2}=3\rightarrow 6x-x=6\rightarrow x=\frac{6}{5}$$

El número que cumple esta propiedad es $\frac{6}{5}$.

134. **De un número se sabe que si a su cuadrado le restamos su mitad, se obtiene el mismo número. ¿Qué número puede ser?**

$$x^2-\frac{x}{2}=x\rightarrow 2x^2-x-2x=0\rightarrow\begin{cases}x_1=0\\ x_2=\frac{3}{2}\end{cases}$$

135. **Una compañía eléctrica ofrece tres tarifas que tienen una parte fija y una parte proporcional al consumo.**

- Tarifa *A*: 6,70 € cantidad fija más 0,18 € por kilovatio hora de consumo.
- Tarifa *B*: 9,60 € cantidad fija más 0,13 € por kilovatio hora de consumo.
- Tarifa *C*: 14 € cantidad fija más 0,09 € por kilovatio hora de consumo.

a) ¿A partir de qué cantidad de consumo la tarifa *B* es mejor que la *A*?
b) ¿A partir de qué cantidad de consumo es la *C* mejor tarifa que la *A*?
c) ¿A partir de qué cantidad de consumo la tarifa *C* es la mejor de todas?

Que una tarifa sea mejor que otra quiere decir que un cliente gaste menos con la primera tarifa que con la segunda.

Llamando *x* a los kilovatios hora consumidos, se tiene:

a) $6{,}70+0{,}18x=9{,}60+0{,}13x\rightarrow 5x=290\rightarrow x=58$

Son iguales las tarifas cuando se consumen 58 kilovatios.

Cuando se consuman más de 58 kilovatios hora la tarifa *B* será más rentable que la tarifa *A*.

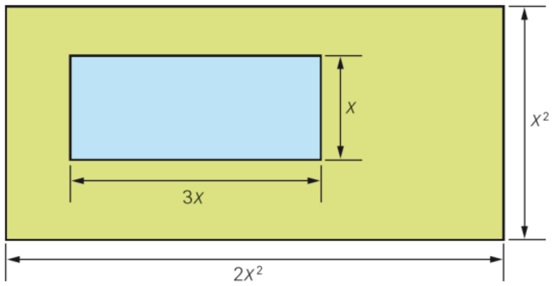
b) $6{,}70+0{,}18x=14+0{,}09x\rightarrow 9x=730\rightarrow x=\frac{730}{9}\rightarrow x=81{,}11$

Cuando se consuman más de 81,11 kilovatios hora la tarifa *C* será más rentable que la tarifa *A*.

c) $\left.\begin{array}{l}6{,}70+0{,}18x>14+0{,}09x\\ 9{,}60+0{,}13x>14+0{,}09x\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}9x>730\\ 4x>440\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x>81{,}11\\ x>110\end{array}\right\}\rightarrow x>110$

Cuando se consuman más de 110 kilovatios hora la tarifa *C* será la más rentable de todas.

136. **Se quiere construir una piscina rectangular en un jardín y para ello se dibuja un esquema con las dimensiones del jardín y de la piscina. ¿Cuáles son las dimensiones de la piscina, si la diferencia de áreas entre el jardín y la piscina es de 135 m²?**



Llamando x al lado menor de la piscina, se tiene:

$$2x^4-3x^2=135\to 2x^4-3x^2-135=0\to 2z^2-3z-135=0$$

$$z=\frac{3\pm\sqrt{-3^{\;2}-4\cdot 2\cdot\ -135}}{2\cdot 2}\to z=\frac{3\pm 33}{4}\to\begin{cases}z_1=-\dfrac{15}{2}\\ z_2=9\end{cases}$$

$z_1=-\dfrac{15}{2}\to x^2=-\dfrac{15}{2}\to$ No tiene solución real. $\quad z_2=9\to\begin{cases}x_1=-3\\ x_2=3\end{cases}$

Se descarta $x_1=-3$ como solución, pues la longitud tiene que ser positiva.

Por lo tanto, la piscina mide 9 metros de largo y 3 metros de ancho.

PARA PROFUNDIZAR

137. **Elige la respuesta adecuada.** (Concurso de Primavera)

Un granjero tiene ovejas y gallinas. Si la media del número de patas por animal es l, el cociente entre el número de ovejas y gallinas es:	$\frac{1}{3(4-l)}$	$\frac{l-2}{4-l}$	$\frac{3(l-2)}{l}$	$\frac{(l-2)^2}{16-l^2}$	$\frac{7(l^2-4)}{5(16-l^2)}$
Si $b>1$, $x>0$ y $(2x)^{\log_b 2}-(3x)^{\log_b 3}=0$, x es igual a:	$\frac{1}{216}$	$\frac{1}{6}$	1	6	No se puede determinar
¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación $\lvert x-\lvert 2x+1\rvert\rvert=3$?	0	1	2	3	4
¿Cuál es el producto de las soluciones de la ecuación $\sqrt{5\lvert x\rvert+8}=\sqrt{x^2-16}$?	-64	-24	-9	24	576
La edad de Juan, t años, es la suma de las edades de sus tres hijos. Si hace n años su edad era el doble de la suma de las edades de sus hijos, ¿cuánto vale el cociente $\frac{t}{n}$?	2	$\frac{11}{3}$	4	$\frac{25}{6}$	5

- Sea x el número de ovejas e y el número de gallinas. Como cada oveja tiene 4 patas y cada gallina 2, hay en total $x+y$ animales y $4x+2y$ patas.

  $$\frac{4x+2y}{x+y}=l\to 4x+2y=lx+ly\to\ 4-l\ x=\ l-2\ y\to\frac{x}{y}=\frac{l-2}{4-l}$$

- $b>1,\ x>0\to\ 2x^{\ \log_b 2}-\ 3x^{\ \log_b 3}=0$

  Se toman logaritmos en la igualdad $2x^{\ \log_b 2}=\ 3x^{\ \log_b 3}$, se aplican propiedades de los logaritmos, se simplifica y se despeja:

$$\log_b 2\cdot\log_b 2x=\log_b 3\cdot\log_b 3x\rightarrow\log_b 2\cdot\ \log_b 2+\log_b x\ =\log_b 3\cdot\ \log_b 3+\log_b x\ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ \log_b 2^{\ 2}+\log_b 2\cdot\log_b x=\ \log_b 3^{\ 2}+\log_b 3\cdot\log_b x\rightarrow\ \log_b 2^{\ 2}-\ \log_b 3^{\ 2}=\log_b 3\cdot\log_b x-\log_b 2\cdot\log_b x\rightarrow$$

$$\rightarrow\ \log_b 2^{\ 2}-\ \log_b 3^{\ 2}=\ \log_b 3-\log_b 2\ \cdot\log_b x\rightarrow\ \log_b 2+\log_b 3\ \cdot\ \log_b 2-\log_b 3\ =\ -1\ \ \log_b 2-\log_b 3\ \cdot\log_b x\rightarrow$$

$$\rightarrow\ -1\ \cdot\ \log_b 2+\log_b 3\ =\log_b x\rightarrow-\log_b 2-\log_b 3=\log_b x\rightarrow\log_b\frac{1}{6}=\log_b x\rightarrow x=\frac{1}{6}$$

□ $$\left|x-|2x+1|\right|=3\rightarrow\begin{cases}|x-2x-1|=3, & x\geq-\frac{1}{2}\\ |x+2x+1|=3, & x\leq-\frac{1}{2}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x+1=3, & x\geq-\frac{1}{2},\quad x\geq-1\\ -x-1=3, & x\geq-\frac{1}{2},\quad x\leq-1\\ 3x+1=3, & x\leq-\frac{1}{2},\quad x\geq-\frac{1}{3}\\ -3x-1=3, & x\leq-\frac{1}{2},\quad x\leq-\frac{1}{3}\end{cases}\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{cases}x=2, & x\geq-\frac{1}{2},\quad x\geq-1\ \rightarrow\ x=2\\ x=-4, & x\geq-\frac{1}{2},\quad x\leq-1\ \rightarrow\ \text{No tiene solución.}\\ x=\frac{2}{3}, & x\leq-\frac{1}{2},\quad x\geq-\frac{1}{3}\ \rightarrow\ \text{No tiene solución.}\\ x=-\frac{4}{3}, & x\leq-\frac{1}{2},\quad x\leq-\frac{1}{3}\ \rightarrow\ x=-\frac{4}{3}\end{cases}$$

Por tanto, hay dos soluciones reales.

□ $$\sqrt{5|x|+8}=\sqrt{x^2-16}\ \rightarrow\ 5|x|+8=x^2-16\ \rightarrow\begin{cases}x^2-5x-24=0, & x\geq 0\\ x^2+5x-24=0, & x\leq 0\end{cases}$$

$$x^2-5x-24=0\ \rightarrow\ x=\frac{5\pm\sqrt{-5^{\ 2}-4\cdot 1\cdot\ -24}}{2\cdot 1}\ \rightarrow\ x=\frac{5\pm\sqrt{121}}{2}\ \rightarrow\begin{cases}x_1=-3\\ x_2=8\end{cases}$$

$$x^2+5x-24=0\ \rightarrow\ x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 1\cdot\ -24}}{2\cdot 1}\ \rightarrow\ x=\frac{-5\pm\sqrt{121}}{2}\ \rightarrow\begin{cases}x_1=-8\\ x_2=3\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2-5x-24=0, & x\geq 0\ \rightarrow\ x=8\\ x^2+5x-24=0, & x\leq 0\ \rightarrow\ x=-8\end{cases}\rightarrow\ \text{El producto de las soluciones es } 8\cdot\ -8\ =-64\ .$$

□ Llamando ***x***, ***y***, ***z*** a las edades de sus hijos:

$$\left.\begin{array}{l}t=x+y+z\\ t-n=2\ x-n+y-n+z-n\end{array}\right\}\rightarrow t-n=2\ t-3n\ \rightarrow t-n=2t-6n\rightarrow 5n=t\rightarrow\frac{t}{n}=5$$

138. **Halla la relación entre los coeficientes de la siguiente ecuación y la suma, el producto y la suma de los dobles productos de sus tres raíces.**

$$\boldsymbol{ax^3+bx^2+cx+d=0}$$

Sean x_1, x_2 y x_3 las raíces de la ecuación dada. Entonces:

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=ax^3+bx^2+cx+d\rightarrow$$

$$\rightarrow x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3=ax^3+bx^2+cx+d$$

Comparando los términos se obtienen las relaciones pedidas:

$$x_1+x_2+x_3=-b\qquad x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=c\qquad x_1x_2x_3=-d$$

139. **Discute las soluciones de la siguiente ecuación según los valores de m.**

$$x^2 - 2x + \log m = 0$$

Por la definición de logaritmo, $m > 0$: $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \log m$

Para que la ecuación no tenga solución: $4 - 4\log m < 0 \rightarrow (10, +\infty)$

Para que la ecuación tenga una solución: $4 - 4\log m = 0 \rightarrow m = 10$

Para que la ecuación tenga dos soluciones: $4 - 4\log m > 0 \rightarrow (-\infty, 10)$

140. **Si las soluciones de la ecuación**

$$ax^2 + bx + c = 0$$

son x_1 y x_2, escribe ecuaciones de segundo grado cuyas soluciones sean:

a) Los cuadrados de x_1 y x_2.

b) Los inversos de x_1 y x_2.

c) Los opuestos de x_1 y x_2.

a) $(x - x_1^2)(x - x_2^2) = 0 \rightarrow x^2 - (x_1^2 + x_2^2)x + x_1^2 \cdot x_2^2$

b) $\left(x - \frac{1}{x_1}\right)\left(x - \frac{1}{x_2}\right) = 0 \rightarrow x^2 - \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)x + \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = 0$

c) $(x + x_1)(x + x_2) = 0 \rightarrow x^2 + (x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2 = 0$

141. **Juan y Luis suben en una escalera mecánica. Juan sube tres veces más rápido que su amigo, haciéndolo ambos de peldaño en peldaño.**

Al terminar de subir, Juan contó 75 escalones y Luis contó 50 escalones. Con estos datos calcula los peldaños «visibles» de la escalera.

Mientras Juan sube un escalón, la escalera mecánica ha subido x escalones, y el número de escalones visibles es $75 + 75x$.

Luis sube 50 escalones. Como lo hace tres veces más despacio que Juan, mientras que Luis sube un escalón, la escalera sube $3x$. El número de escalones visibles es $50 + 150x$.

Por tanto, resulta que: $75 + 75x = 50 + 150x \rightarrow x = \frac{1}{3}$

El número de peldaños «visibles» es 100.

142. **Calcula las soluciones reales de la ecuación**

$$\sqrt[3]{1729 - x} + \sqrt[3]{x} = 19$$

(Olimpiadas matemáticas. Fase de Distrito)

$\sqrt[3]{1729-x} + \sqrt[3]{x} = 19 \rightarrow 1729 - x = \left(19 - \sqrt[3]{x}\right)^3 \rightarrow 1729 - x = 57\sqrt[3]{x^2} - x - 1083\sqrt[3]{x} + 6859 \rightarrow \sqrt[3]{x^2} - 19\sqrt[3]{x} + 90 = 0$

Hacemos $z = \sqrt[3]{x}$ y resolvemos la ecuación de segundo grado resultante:

$$z^2 - 19z + 90 = 0 \rightarrow z = \frac{19 \pm \sqrt{(-19)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 90}}{2 \cdot 1} \rightarrow z = \frac{19 \pm \sqrt{1}}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 9 \rightarrow \sqrt[3]{x} = 9 \rightarrow x_1 = 729 \\ z_2 = 10 \rightarrow \sqrt[3]{x} = 10 \rightarrow x_2 = 1000 \end{cases}$$

143. **Descompón el polinomio**

$$P(x) = x^5 - 209x + 56$$

en producto de dos factores, sabiendo que se anula para dos valores, x_1 y x_2, inversos entre sí.

(Olimpiadas matemáticas. Fase de Distrito)

Sean r y $\frac{1}{r}$ las dos raíces inversas del polinomio $P(x)$.

El polinomio que tiene esas raíces es:

$$(x-r)\left(x-\frac{1}{r}\right) = x^2 - \frac{1+r^2}{r}x + 1 = x^2 + mx + 1$$

Así, resulta que $P(x) = x^5 - 209x + 56 = (x^2 + mx + 1)(x^3 + bx^2 + cx + d)$.

144. **Prueba que las sumas de las primeras, segundas y terceras potencias de las raíces del polinomio**

$$P(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$$

valen lo mismo.

(Olimpiadas matemáticas. Fase de Distrito)

Sea $ax^3 + bx^2 + cx + d$ la ecuación general de tercer grado. Entonces, en este caso se tiene que $a = 1 \quad b = 2 \quad c = 3 \quad d = 4$.

Por otro lado, sean x_1, x_2 y x_3 las raíces de la ecuación dada. Usando las fórmulas obtenidas en la actividad 142:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -b = -2 \qquad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = c = 3 \qquad x_1x_2x_3 = -d = -4$$

- Suma de las primeras potencias de las raíces:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -2$$

- Suma de las segundas potencias de las raíces:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -2 \to (x_1 + x_2 + x_3)^2 = (-2)^2 \to x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 4 \to$$

$$\to x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\cdot 3 = 4 \to x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -2$$

- Suma de las terceras potencias de las raíces:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -2 \to (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(x_1 + x_2 + x_3) = -2\cdot(-2) \to$$

$$\to x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1^2(x_2 + x_3) + x_2^2(x_1 + x_3) + x_3^2(x_1 + x_2) = 4 \to$$

$$\to x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1(x_1x_2 + x_1x_3) + x_2(x_1x_2 + x_2x_3) + x_3(x_1x_3 + x_2x_3) = 4 \xrightarrow{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 3}$$

$$\to x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1(3 - x_2x_3) + x_2(3 - x_1x_3) + x_3(3 - x_1x_2) = 4 \to$$

$$\to x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3x_1 + 4 + 3x_2 + 4 + 3x_3 + 4 = 4 \to$$

$$\to x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3(x_1 + x_2 + x_3) + 12 = 4 \xrightarrow{x_1 + x_2 + x_3 = -2}$$

$$\to x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3(-2) + 12 = 4 \to x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 4 - 12 + 6 \to x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -2$$

145. **Determina justificadamente todos los pares de números enteros (x, y) que verifican la ecuación $x^2 - y^4 = 2009$.**

(Olimpiadas matemáticas. Fase Nacional)

$x^2 - y^4 = 2009 \rightarrow (x - y^2)(x + y^2) = 2009$.

Sea $a = x - y^2$ y $b = x + y^2$. Entonces se tiene que $ab = 2009$.

Por un lado, se busca una expresión para x y para y^2 en función de a y b $\rightarrow \begin{cases} a + b = 2x \rightarrow x = \dfrac{a+b}{2} \\ b - a = 2y^2 \rightarrow y^2 = \dfrac{b-a}{2} \end{cases}$

Por otro lado, se descompone 2009 en factores primos y se estudian todos los productos posibles, teniendo en cuenta que x e y son números enteros, y por tanto, los dos factores polinómicos, $a = (x - y^2)$ y $b = (x + y^2)$ también lo son:

$2009 = 7 \cdot 7 \cdot 41 = 49 \cdot 41 = 7 \cdot 287 = 1 \cdot 2009$

Ahora se estudian los casos posibles, teniendo en cuenta que $a < b$ y que para que y sea entero es necesario que $\dfrac{b-a}{2}$ sea un cuadrado perfecto:

- $2009 = 1 \cdot 2009 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2009 \end{cases} \xrightarrow{x = \frac{a+b}{2},\ y^2 = \frac{b-a}{2}} \begin{cases} x = \dfrac{1 + 2009}{2} = 1500 \\ y^2 = \dfrac{2009 - 1}{2} = 1004 \rightarrow \text{No es cuadrado perfecto.} \end{cases}$

- $2009 = 7 \cdot 287 \rightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = 287 \end{cases} \xrightarrow{x = \frac{a+b}{2},\ y^2 = \frac{b-a}{2}} \begin{cases} x = \dfrac{7 + 287}{2} = 147 \\ y^2 = \dfrac{287 - 7}{2} = 140 \rightarrow \text{No es cuadrado perfecto.} \end{cases}$

- $2009 = 49 \cdot 41 \rightarrow \begin{cases} a = 41 \\ b = 49 \end{cases} \xrightarrow{x = \frac{a+b}{2},\ y^2 = \frac{b-a}{2}} \begin{cases} x = \dfrac{41 + 49}{2} = 45 \\ y^2 = \dfrac{49 - 41}{2} = 4 \rightarrow y = \pm 2 \end{cases}$

El tercer caso es el único que cumple todas las características, y como existe simetría par, los únicos pares enteros que resuelven la ecuación dada son $45, 2$, $45, -2$, $-45, 2$ y $-45, -2$.

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. ¿Qué factores afectan a la salud nutricional de un ser humano?

La alimentación que se consume, pues de ella depende la aportación de los nutrientes necesarios.

2. ¿Cómo obtenemos las personas la energía necesaria para vivir?

Obtenemos la energía de los alimentos que comemos. Su oxidación produce los nutrientes calóricos.

3. ¿Qué son las unidades nutricionales y en qué unidades se miden?

La cantidad de nutrientes que resultan del consumo de un alimento. Normalmente se miden en kilocalorías.

4. ¿Qué variables intervienen en cada expresión algebraica?

En ambas expresiones intervienen *P*, los kilos, *h*, la estatura y *t* la edad.

5. ¿Cuáles son los coeficientes de los términos que forman cada polinomio?

Coeficientes del peso:

Harris Benedict - mujeres: 9,247 Harris Benedict - hombres: 13,397

Mifflin St. Jeor - mujeres: 10 Mifflin St. Jeor - hombres: 10

Coeficientes de la estatura:

Harris Benedict - mujeres: 3,098 Harris Benedict - hombres: 4,799

Mifflin St. Jeor - mujeres: 6,25 Mifflin St. Jeor - hombres: 6,25

Coeficientes de la edad:

Harris Benedict - mujeres: –4,330 Harris Benedict - hombres: –5,677

Mifflin St. Jeor - mujeres: –5 Mifflin St. Jeor - hombres: –5

6. Averigua qué alimentos tienes que consumir y en qué proporción diaria para tener una buena salud nutricional.

Respuesta abierta.

7. Calcula las necesidades nutricionales de una mujer de 35 años, que pesa 59 kg y mide 1,61 m, según las dos expresiones del texto.

Según Harris Benedict: $447{,}953 + 9{,}247 \cdot 59 + 3{,}098 \cdot 161 - 4{,}330 \cdot 35 = 1\,340{,}754$

Según Mifflin St. Jeor: $-161 + 10 \cdot 59 + 6{,}25 \cdot 161 - 5 \cdot 35 = 1\,260{,}25$

8. Calcula las necesidades nutricionales de un hombre de 28 años, que tiene un peso de 67 kg y que mide 1,75 m, según las dos expresiones del texto.

Según Harris Benedict: $88{,}362 + 13{,}397 \cdot 67 + 4{,}799 \cdot 175 - 5{,}677 \cdot 28 = 1\,667{,}1$

Según Mifflin St. Jeor: $5 + 10 \cdot 67 + 6{,}25 \cdot 175 - 5 \cdot 28 = 1\,628{,}75$