Distribuciones binomial y normal 12

ACTIVIDADES

1. Lanzamos dos dados de 6 caras.

a) ¿La función que asigna a cada suceso elemental la suma de las puntuaciones es una variable aleatoria?

b) Elabora su tabla de valores y represéntala gráficamente.

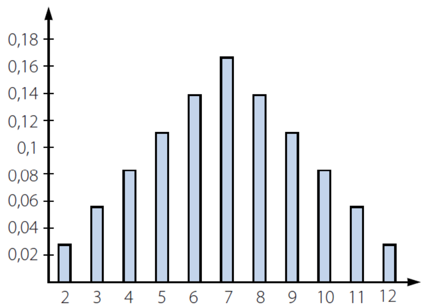
a) El espacio muestral es: $E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

La función X que asigna a cada suceso la suma de las puntuaciones es una variable aleatoria.

$X(1, 1) = 2$ $X(1, 2) = 3$ $X(1, 3) = 4$ $X(1, 4) = 5$ $X(1, 5) = 6$ $X(1, 6) = 7$
$X(2, 1) = 3$ $X(2, 2) = 4$ $X(2, 3) = 5$ $X(2, 4) = 6$ $X(2, 5) = 7$ $X(2, 6) = 8$
$X(3, 1) = 4$ $X(3, 2) = 5$ $X(3, 3) = 6$ $X(3, 4) = 7$ $X(3, 5) = 8$ $X(3, 6) = 9$
$X(4, 1) = 5$ $X(4, 2) = 6$ $X(4, 3) = 7$ $X(4, 4) = 8$ $X(4, 5) = 9$ $X(4, 6) = 10$
$X(5, 1) = 6$ $X(5, 2) = 7$ $X(5, 3) = 8$ $X(5, 4) = 9$ $X(5, 5) = 10$ $X(5, 6) = 11$
$X(6, 1) = 7$ $X(6, 2) = 8$ $X(6, 3) = 9$ $X(6, 4) = 10$ $X(6, 5) = 11$ $X(6, 6) = 12$

b)

X	$P(X = x_i)$	$P(X \leq x_i)$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
3	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$
4	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{18}$
6	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{12}$
7	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$
8	$\frac{5}{36}$	$\frac{13}{18}$
9	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{6}$
10	$\frac{1}{12}$	$\frac{11}{12}$
11	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$
12	$\frac{1}{36}$	1



2. Consideramos el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado y una moneda.

a) Calcula el espacio muestral y la probabilidad de cada suceso elemental.

b) Define dos variables aleatorias y represéntalas.

a) El espacio muestral es:

$E = \{(1, C), (2, C), (3, C), (4, C), (5, C), (6, C), (1, X), (2, X), (3, X), (4, X), (5, X), (6, X)\}$

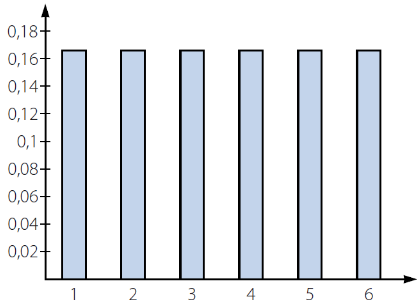
La probabilidad de cada suceso elemental es $\frac{1}{12}$.

b) Respuesta abierta.

La función X asigna a cada suceso el número obtenido en el dado.

$X(1, C) = 1$ $X(2, C) = 2$ $X(3, C) = 3$ $X(4, C) = 4$ $X(5, C) = 5$ $X(6, C) = 6$
$X(1, X) = 1$ $X(2, X) = 2$ $X(3, X) = 3$ $X(4, X) = 4$ $X(5, X) = 5$ $X(6, X) = 6$

X	$P(X=x_i)$	$P(X\leq x_i)$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
4	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$
5	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$
6	$\frac{1}{6}$	1

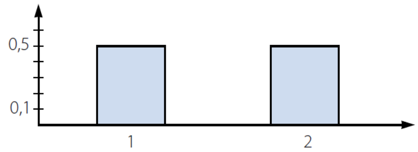


La función Y asigna a cada suceso el número elemental 1 si sale cara en la moneda y 2 si sale cruz.

$Y(1, C) = 1 \quad Y(2, C) = 1 \quad Y(3, C) = 1 \quad Y(4, C) = 1 \quad Y(5, C) = 1 \quad Y(6, C) = 1$

$Y(1, X) = 2 \quad Y(2, X) = 2 \quad Y(3, X) = 2 \quad Y(4, X) = 2 \quad Y(5, X) = 2 \quad Y(6, X) = 2$

Y	$P(Y=y_i)$	$P(Y\leq y_i)$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{2}$	1



3. **En una urna hay 5 bolas rojas y 3 bolas azules. Se realiza un experimento que consiste en extraer tres bolas y anotar el número de bolas azules que se han conseguido.**

Realiza una tabla con la distribución de probabilidad de este experimento, y halla la media y la desviación típica.

X	$P(X=x_i)$	$P(X\leq x_i)$
0	$\frac{5}{28}$	$\frac{5}{28}$
1	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{7}$
2	$\frac{15}{56}$	$\frac{55}{56}$
3	$\frac{1}{56}$	1

Media: $\mu = \frac{9}{8} = 1{,}125$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{0{,}502} = 0{,}709$

4. **Un dado trucado tiene la distribución de probabilidad de la tabla. Halla el valor que falta y la media y desviación típica.**

X = «Puntuación»	1	2	4	5	6
$P(X = x_i)$	0,1	0,12	0,2	0,3	0,15

La probabilidad, p, que falta es $X = 3$. Como la suma de todas las probabilidades tiene que ser 1, tenemos que:

$0{,}1 + 0{,}12 + 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}15 + p = 1 \rightarrow p = 0{,}13$

$\mu = 1\cdot 0{,}1 + 2\cdot 0{,}12 + 3\cdot 0{,}13 + 4\cdot 0{,}2 + 5\cdot 0{,}3 + 6\cdot 0{,}15 = 3{,}93$

$\sigma = \sqrt{1\cdot 0{,}1^2 + 2\cdot 0{,}12^2 + 3\cdot 0{,}13^2 + 4\cdot 0{,}2^2 + 5\cdot 0{,}3^2 + 6\cdot 0{,}15^2 - 3{,}93^2} = 1{,}55$

5. En el experimento aleatorio que consiste en lanzar 3 monedas al aire, consideramos la variable aleatoria *X*, que asocia a cada suceso elemental el número de caras obtenidas. Halla y representa las funciones de probabilidad y de distribución.

Determinamos el espacio muestral, siendo C = «Cara» y + = «Cruz»:

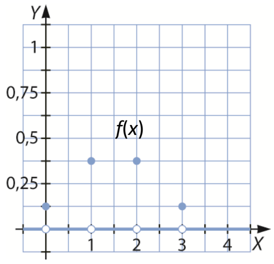
E = {CCC, CC+, C+C, C++, +CC, +C+, ++C, +++}

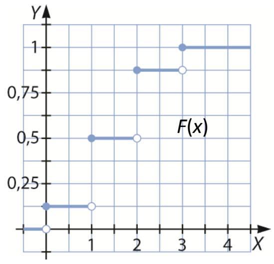
Son un total de 8 sucesos probables. Calculamos las probabilidades de los sucesos elementales:

$P(X=3)=\frac{1}{8}$ $\quad P(X=2)=\frac{3}{8}$ $\quad P(X=1)=\frac{3}{8}$ $\quad P(X=0)=\frac{1}{8}$

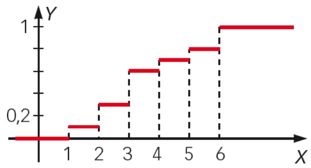
Las funciones de probabilidad y de distribución serían, respectivamente:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{8} & \text{si } x=0 \text{ o } x=3 \\ \frac{3}{8} & \text{si } x=1 \text{ o } x=2 \\ 0 & \text{en el resto de los valores} \end{cases} \qquad F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \frac{1}{8} & \text{si } 0\le x<1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 1\le x<2 \\ \frac{7}{8} & \text{si } 2\le x<3 \\ 1 & \text{si } x\ge 3 \end{cases}$$

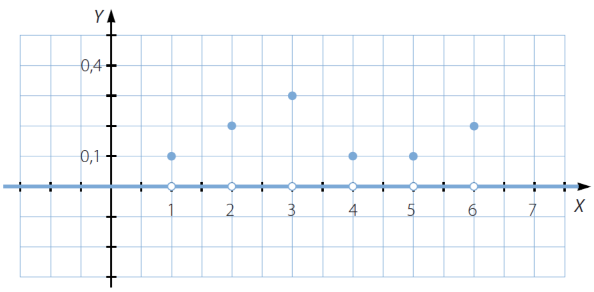




6. Esta es la gráfica de una función de distribución. Halla y representa la función de probabilidad.



$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } -\infty<x<1 \\ 0{,}1 & \text{si } 1\le x<2 \\ 0{,}3 & \text{si } 2\le x<3 \\ 0{,}6 & \text{si } 3\le x<4 \\ 0{,}7 & \text{si } 4\le x<5 \\ 0{,}8 & \text{si } 5\le x<6 \\ 1 & \text{si } 6\le x<+\infty \end{cases} \rightarrow f(x)=\begin{cases} 0{,}1 & \text{si } x=1,4,5 \\ 0{,}2 & \text{si } x=2,6 \\ 0{,}3 & \text{si } x=3 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$



7. **Comprueba si la variable aleatoria que cuenta el número de veces que sale un 5, al lanzar cuatro veces un dado de seis caras, sigue una distribución binomial.**

La variable es discreta, porque solo puede tomar los valores 0, 1, 2, 3 y 4.

$n = 4$ es el número de veces que se realiza el experimento.

Sea A = «Salir un 5», entonces $P(A) = \frac{1}{6}$.

Los experimentos son independientes, porque lo que sucede en un lanzamiento no influye en el siguiente.

Por tanto, la variable sigue una distribución binomial: $B\left(4, \frac{1}{6}\right)$

8. **Se lanza tres veces un dado de cuatro caras y se considera la variable aleatoria que cuenta las veces que sale 3. Identifica qué distribución *B*(*n*, *p*) sigue esta variable y calcula su media y su varianza a partir de la distribución de probabilidad. Comprueba que se cumple que $\mu = np$ y $\sigma^2 = npq$.**

La variable es discreta y mide la cantidad de veces que se repite un suceso («Salir 3»), que no depende de los sucesos anteriores. La probabilidad de que ocurra ese suceso es $\frac{1}{4}$, por tanto, la variable aleatoria sigue una distribución $B\left(3, \frac{1}{4}\right)$.

$$P(X=0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(1-\frac{1}{4}\right)^{3-0} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64} \qquad P(X=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(1-\frac{1}{4}\right)^{3-2} = 3\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{3}{4} = \frac{9}{64}$$

$$P(X=1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(1-\frac{1}{4}\right)^{3-1} = 3\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16} = \frac{27}{64} \qquad P(X=3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(1-\frac{1}{4}\right)^{3-3} = \frac{1}{64}$$

Calculamos la media y la varianza:

$$\mu = 0\cdot\frac{27}{64} + 1\cdot\frac{27}{64} + 2\cdot\frac{9}{64} + 3\cdot\frac{1}{64} = \frac{48}{64} = \frac{3}{4} \qquad \sigma^2 = 0^2\cdot\frac{27}{64} + 1^2\cdot\frac{27}{64} + 2^2\cdot\frac{9}{64} + 3^2\cdot\frac{1}{64} - \frac{3^2}{4^2} = \frac{18}{16} - \frac{9}{16} = \frac{9}{16}$$

$$np = 3\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \mu \qquad npq = 3\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{9}{16} = \sigma^2$$

9. **Consideramos una variable aleatoria cualquiera, *X*, que sigue una distribución binomial *B*(8; 0,6).**

Calcula las distintas probabilidades que aparecen a continuación.

a) $P(X = 4)$

b) $P(X < 2)$

c) $P(X \geq 6)$

d) $P(3 \leq X \leq 5)$

e) $P(X \leq 7)$

f) $P(0 < X < 8)$

a) $P(X=4) = \binom{8}{4}\cdot 0{,}6^4\cdot 0{,}4^4 = 0{,}23$

b) $P(X<2) = P(X=0) + P(X=1) = 0{,}0085$

c) $P(X \geq 6) = P(X=6) + P(X=7) + P(X=8) = 0{,}315$

d) $P(3 \leq X \leq 5) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) = 0{,}635$

e) $P(X \leq 7) = 1 - P(X=8) = 0{,}983$

f) $P(0 < X < 8) = 1 - (P(X=0) + P(X=8)) = 0{,}9825$

10. **En un laboratorio de análisis clínicos saben que el 98 % de las pruebas de diabetes que realizan resultan negativas. Si han recibido 10 muestras para analizar:**

a) Determina la probabilidad de que haya dos personas a las que la prueba les dé positivo.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la prueba resulte positiva a más de una persona?

$X \equiv B(10;\ 0{,}02)$

a) $P(X=2)=\binom{10}{2}\cdot 0{,}02^2\cdot 0{,}98^8=0{,}01531$

b) $P(X>1)=1-P(X\le 1)=1-(P(X=0)+P(X=1))=$

$$=1-\binom{10}{0}\cdot 0{,}02^0\cdot 0{,}98^{10}-\binom{10}{1}\cdot 0{,}02^1\cdot 0{,}98^9=1-0{,}8171-0{,}1667=0{,}0162$$

11. Consideramos la variable aleatoria que cuenta el número de bolas blancas que se obtienen al sacar tres veces una bola de un recipiente que contiene 2 bolas blancas y 3 rojas, y después de anotar el color, devolver la bola al recipiente. Calcula, utilizando la tabla de la distribución binomial, la probabilidad de que haya anotado 2 bolas blancas.

$X\equiv B(3;\ 0{,}4)$

$P(X=2)=0{,}288$

12. Si consideramos el mismo experimento de la actividad anterior, calcula:

a) La probabilidad de que todas las bolas extraídas sean del mismo color.

b) La probabilidad de obtener alguna bola que sea de color rojo.

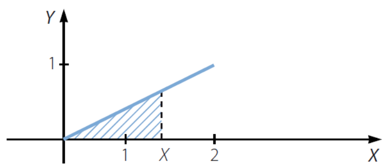
a) $P(X=3)+P(X=0)=0{,}064+0{,}216=0{,}28$

b) $1-P(X=3)=1-0{,}064=0{,}936$

13. Calcula el valor de *k* para que la siguiente función sea de densidad, y halla su función de distribución asociada.

$$f(x)=\begin{cases} kx & \text{si } 0\le x\le 2\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$

La gráfica de $f(x)$ es:



$$1=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{2\cdot 2k}{2}=2k\rightarrow k=\frac{1}{2}$$

Para $0\le x\le 2$, la función de distribución es el área del triángulo de base *x* y de altura $\frac{x}{2}$. Por tanto:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } -\infty<x<0\\ \dfrac{x^2}{4} & \text{si } 0\le x\le 2\\ 1 & \text{si } 2<x<+\infty\end{cases}$$

14. Halla la función de distribución de esta función de densidad.

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } -\infty<x<0\\ 1 & \text{si } 0\le x\le 1\\ 0 & \text{si } 1<x<+\infty\end{cases}$$

Para $0\le x\le 1$, la función de distribución es el área del rectángulo de base *x* y de altura 1. Por tanto:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } -\infty<x<0\\ x & \text{si } 0\le x\le 1\\ 1 & \text{si } 1<x<+\infty\end{cases}$$

15. **Los ebanistas tienen un salario medio de 1 280 €, con una desviación típica de 200 €; y los fontaneros 1 060 €, con una desviación típica de 180 €. Si a un ebanista le ofrecen un sueldo de 1 320 € y a un fontanero otro de 1 100 €, ¿cuál de los dos recibe la mejor oferta?**

Tipificamos las distribuciones para compararlas:

$$\text{Ebanista: } 1320 \xrightarrow{\text{Tipificar}} \frac{1320-1280}{200} = 0{,}2$$

$$\text{Fontanero: } 1100 \xrightarrow{\text{Tipificar}} \frac{1100-1060}{180} = 0{,}222$$

$0{,}2 < 0{,}222 \rightarrow$ Es mejor oferta la del fontanero.

16. **Compara los datos de estas distribuciones.**

$x_1 = 2$ (con $\mu = 1$, $\sigma = 2$)

$x_2 = 1$ (con $\mu = 2$, $\sigma = 1$)

$x_3 = 1{,}5$ (con $\mu = 1{,}5$, $\sigma = 1{,}5$)

$$z_1 = \frac{2-1}{2} = 0{,}5 \qquad z_2 = \frac{1-2}{1} = -1 \qquad z_3 = \frac{1{,}5-1{,}5}{1{,}5} = 0$$

$z_2 < z_3 < z_1$

17. **Si la variable aleatoria X sigue una distribución normal $X \equiv N(5, 2)$, calcula las siguientes probabilidades.**

a) $P(X < 2)$

b) $P(X > 3)$

c) $P(X \le 4)$

d) $P(X \ge 6)$

e) $P(X < 7)$

f) $P(X \le 8)$

a) $P(X < 2) = P\left(\frac{X-5}{2} < \frac{2-5}{2}\right) = P(Z < -1{,}5) = 1 - P(Z \le 1{,}5) = 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668$

b) $P(X > 3) = P\left(\frac{X-5}{2} > \frac{3-5}{2}\right) = P(Z > -1) = P(Z < 1) = 0{,}8413$

c) $P(X \le 4) = P\left(\frac{X-5}{2} \le \frac{4-5}{2}\right) = P(Z \le -0{,}5) = 1 - P(Z \le 0{,}5) = 0{,}3085$

d) $P(X \ge 6) = 1 - P\left(\frac{X-5}{2} \le \frac{6-5}{2}\right) = 1 - P(Z \le 0{,}5) = 0{,}3085$

e) $P(X < 7) = P\left(\frac{X-5}{2} \le \frac{7-5}{2}\right) = P(Z < 1) = 0{,}8413$

f) $P(X \le 8) = P\left(\frac{X-5}{2} \le \frac{8-5}{2}\right) = P(Z \le 1{,}5) = 0{,}9332$

18. **El nivel de colesterol en una persona adulta sana sigue una distribución normal $N(192,12)$. Calcula la probabilidad de que una persona adulta sana tenga un nivel de colesterol:**

a) Superior a 200 unidades.

b) Entre 180 y 220 unidades.

a) $P(X > 200) = P\left(\frac{X-192}{12} > \frac{200-192}{12}\right) = P(Z > 0{,}67) = 1 - P(Z \le 0{,}67) =$
$= 1 - 0{,}7486 = 0{,}2514$

b) $P(180 < X < 220) = P\left(\frac{180-192}{12} < \frac{X-192}{12} < \frac{220-192}{12}\right) = P(-1 < Z < 2{,}33) =$
$= P(Z < 2{,}33) - (1 - P(Z < 1)) = 0{,}9901 - (1 - 0{,}8413) = 0{,}8314$

19. **Una fábrica elabora 2 000 circuitos electrónicos al día y la probabilidad de que uno sea defectuoso es de 1 %. ¿Cuál es la probabilidad de que se fabriquen más de 50 circuitos defectuosos en un día? ¿Y menos de 25?**

$X \equiv B(2\,000;\ 0{,}01) \approx N(20;\ 4{,}45)$

$$P(X > 50) = P\left(\frac{X-20}{4{,}45} > \frac{50-20}{4{,}45}\right) = P(Z > 6{,}74) = 1 - P(Z \leq 6{,}74) = 1 - 1 = 0$$

$$P(X < 25) = P\left(\frac{X-20}{4{,}45} < \frac{25-20}{4{,}45}\right) = P(Z < 1{,}12) = 0{,}8686$$

20. **El 10 % de las personas de una ciudad afirma que no ve nunca televisión. Escogidas 100 personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 14 no vean la televisión? ¿Y de que sean exactamente 14?**

$X \equiv B(100;\ 0{,}1) \approx N(10, 3)$

$$P(X \geq 14) = P\left(\frac{X-10}{3} \geq \frac{14-10}{3}\right) = P(Z \geq 1{,}33) = 1 - P(Z < 1{,}33) =$$
$$= 1 - 0{,}9082 = 0{,}0918$$

$$P(X = 14) = P(13{,}5 < X < 14{,}5) = P\left(\frac{13{,}5-10}{3} < \frac{X-10}{3} < \frac{14{,}5-10}{3}\right) =$$
$$= P(Z < 1{,}5) - P(Z < 1{,}17) = 0{,}9332 - 0{,}879 = 0{,}0542$$

SABER HACER

21. **Un estudio médico asegura que 1 de cada 8 niños tiene gingivitis. Escogidos 7 niños al azar, determina:**

a) Qué tipo de distribución sigue la variable que cuenta el número de niños con la enfermedad.

b) La probabilidad de que haya exactamente 2 niños con la enfermedad.

c) La probabilidad de que ninguno de los niños tenga la enfermedad.

d) La media y la varianza de la variable.

a) Es una variable discreta que cuenta el número de veces que ocurre un suceso determinado («Tener gigivitis»), y que ocurra ese suceso es independiente de si ha ocurrido o no antes. Por tanto, la variable estadística *X* sigue una binomial:

- El número de experimientos es 7.
- La probabilidad de que ocurra el suceso es $\frac{1}{8} = 0{,}125$

Por tanto, $X \equiv B(7; 0{,}125)$.

b) $P(X = 2) = 0{,}168$

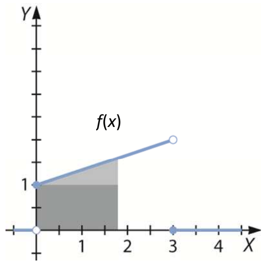
c) $P(X = 0) = 0{,}393$

d) $\mu = 7 \cdot 0{,}125 = 0{,}875$ $\qquad \sigma^2 = 7 \cdot 0{,}125 \cdot 0{,}875 = 0{,}766$

22. **Calcula la función de distribución de una variable aleatoria continua con esta función de densidad.**

$$f(x) = \begin{cases} kx + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Dibujamos la función de densidad:



Como se ve en la figura, entre 0 y 3 la función de distribución $F(x)$ representa el área de un trapecio formado por un rectángulo que tiene por lados 1 y x, y un triángulo de base x y altura $\frac{x}{k}$. Por tanto, entre 0 y 3:

$F(x) = x + \dfrac{x \cdot \frac{x}{k}}{2} = x + \dfrac{x^2}{2k}$. Para que sea función de distribución se tiene que cumplir:

$$F(3) = 3 + \frac{3^2}{2k} = 1 \rightarrow -4k = 9 \rightarrow k = -\frac{9}{4}$$

Así, tenemos que la función de distribución es $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x - \dfrac{2x^2}{9} & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ 1 & \text{si } 3 < x \end{cases}$

23. Calcula la función de distribución de una variable aleatoria continua con esta función de densidad.

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Entre 1 y 3 la función de distribución $F(x)$ sería el área del rectángulo que tiene como uno de los lados k y su otro lado mide la distancia de 1 a x, es decir, $1 - x$. Por tanto, entre 1 y 3 $F(x) = k(1 - x)$. Para que sea función de distribución se tiene que cumplir:

$$F(3) = k(1 - 3) = 1 \rightarrow k = -\frac{1}{2}$$

Así, tenemos que la función de distribución sería:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \dfrac{1 - x}{2} & 1 \leq x \leq 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$

24. Calcula estas probabilidades.

a) $P(Z \geq 0,7)$ b) $P(Z \geq 1,73)$ c) $P(Z \geq 2,03)$

a) $P(Z \geq 0,7) = 1 - P(X \leq 0,7) = 0,242$

b) $P(Z \geq 1,73) = 1 - P(X \leq 1,73) = 0,042$

c) $P(Z \geq 2,03) = 1 - P(X \leq 2,03) = 0,021$

25. Calcula estas probabilidades.

a) $P(0,2 \leq Z \leq 0,9)$ b) $P(-1,9 \leq Z \leq -1,2)$

a) $P(0,2 \leq Z \leq 0,9) = P(Z \leq 0,2) - P(Z \leq 0,9) = 0,237$

b) Por simetría de la normal, tenemos: $P(-1,9 \leq Z \leq -1,2) = P(1,2 \leq Z \leq 1,9) = P(Z \leq 1,2) - P(Z \leq 1,9) = 0,086$

26. Calcula estas probabilidades.

a) $P(Z \le -1{,}3)$ b) $P(Z \ge -1{,}3)$ c) $P(Z \ge -1{,}82)$ d) $P(Z \le -1{,}82)$

a) $P(Z \le -1{,}3) = 1 - P(X \le 1{,}3) = 0{,}0968$

b) $P(Z \ge -1{,}3) = P(X \le 1{,}3) = 0{,}9032$

c) $P(Z \ge -1{,}82) = P(X \le 1{,}82) = 0{,}9656$

d) $P(Z \le -1{,}82) = 1 - P(X \le 1{,}82) = 0{,}0344$

27. Halla *a* en cada una de las siguientes expresiones.

a) $P(Z < a) = 0{,}8907$

b) $P(Z < b) = 0{,}3446$

c) $P(Z < a) = 0{,}49$

d) $P(Z > a) = 0{,}1$

a) $P(Z < a) = 0{,}8907 \rightarrow a = 1{,}23$

b) $P(Z < b) = 0{,}3446 \rightarrow P(Z < -b) = 1 - 0{,}3446 = 0{,}6554 \rightarrow -b = 0{,}4 \rightarrow b = -0{,}4$

c) $P(Z < a) = 0{,}49 \rightarrow P(Z < -a) = 1 - 0{,}49 = 0{,}51 \rightarrow -a = 0{,}025 \rightarrow a = -0{,}025$

d) $P(Z < a) = 0{,}1 \rightarrow P(Z < -a) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9 \rightarrow -a = 1{,}28 \rightarrow a = -1{,}28$

28. Considera la variable aleatoria que sigue una distribución *N*(12; 0,6). Calcula $P(11{,}2 \le X \le 12{,}5)$.

$$P(11{,}2 \le X \le 12{,}5) = P(X \le 12{,}5) - P(X \le 11{,}2) = P\left(\frac{X-12}{0{,}6} \le \frac{12{,}5-12}{0{,}6}\right) - P\left(\frac{X-12}{0{,}6} \le \frac{11{,}2-12}{0{,}6}\right) =$$

$$= P(Z \le 0{,}83) - P(Z \le -1{,}33) = P(Z \le 0{,}83) - (1 - P(Z \le 1{,}33)) = 0{,}705$$

29. El diámetro medio de las piezas producidas en una fábrica es de 45 mm. Calcula la desviación típica, sabiendo que la probabilidad de que una pieza tenga su diámetro mayor de 50 mm es igual a 0,006.

X = «Diámetro de las piezas producidas» $X \equiv N(45; \sigma)$

$$P(X > 50) = 0{,}006 \rightarrow P\left(\frac{X-45}{\sigma} > \frac{50-45}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{5}{\sigma}\right) = 1 - P\left(Z \le \frac{5}{\sigma}\right) = 0{,}006 \rightarrow P\left(Z \le \frac{5}{\sigma}\right) = 0{,}994 \rightarrow \frac{5}{\sigma} = 2{,}51 \rightarrow \sigma = 1{,}992$$

30. En un examen se ha evaluado de 0 a 20 puntos, obteniendo el 67 % de los presentados puntuaciones iguales o inferiores a 12,2 mientras que el 9 % ha obtenido puntuaciones superiores a 16,7. Sabiendo que la distribución de las puntuaciones es normal, calcula la media y la desviación típica.

$$P(X \le 12{,}2) = 0{,}67 \rightarrow P\left(Z \le \frac{12{,}2-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}67 \rightarrow \frac{12{,}2-\mu}{\sigma} = 0{,}44$$

$$P(X > 16{,}7) = 0{,}09 \rightarrow P\left(Z > \frac{16{,}7-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \le \frac{16{,}7-\mu}{\sigma}\right) = 1 - 0{,}09 = 0{,}91 \rightarrow \frac{16{,}7-\mu}{\sigma} = 1{,}34$$

Resolvemos el sistema planteado por las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{12{,}2-\mu}{\sigma} = 0{,}44 \\ \dfrac{16{,}7-\mu}{\sigma} = 1{,}34 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \mu = 10 \\ \sigma = 5 \end{array}\right\}$$

31. **La probabilidad de que un ciclista sufra un reventón en una carrera es 0,15. Si en la carrera participan 70 ciclistas, ¿cuál es la probabilidad de que se registren entre 15 y 18 reventones?**

La distribución que rige esta variable es $B(70; 0,15)$. Como $n \cdot p = 10,5 > 5$ y $n \cdot (1 - p) = 59,5 > 5$ podemos aproximarla por una normal:

$X \equiv B(70; 0,15) \approx N(10,5; 2,987)$

La probabilidad pedida será:

$$P(15 \leq X \leq 18) = P(X \leq 18) - P(X \leq 15) \approx P\left(Z \leq \frac{18 - 10,5}{2,987}\right) - P\left(Z \leq \frac{15 - 10,5}{2,987}\right) = 0,994 - 0,9345 = 0,06$$

ACTIVIDADES FINALES

32. **Para cada uno de los experimentos aleatorios que se describen, halla y representa las funciones de probabilidad y de distribución.**

a) Experimento aleatorio:
Extraer, sin reemplazamiento, tres bolas de una bolsa que contiene 4 bolas blancas y 3 azules.
Variable aleatoria:
$X =$ «Número de bolas blancas obtenidas»

b) Experimento aleatorio:
Comer, uno tras otro, dos caramelos escogidos al azar entre 2 de fresa, 4 de naranja y 1 de menta.
Variable aleatoria:
$X =$ «Número de caramelos de naranja comidos»

c) Experimento aleatorio:
Escoger al azar una familia con 4 hijos.
Variable aleatoria:
$X =$ «Número de hijos varones en esa familia» (se supone que la probabilidad de nacer varón es la misma que la de nacer mujer)

a) Determinamos el espacio muestral, siendo B = «Blanca» y A = «Azul»:

$E = \{$BBB, BBA, BAB, BAA, ABB, ABA, AAB, AAA$\}$

Los sucesos no tienen la misma probabilidad, ya que cada extracción no es independiente. El total de bolas es 7. Calculamos las probabilidades de los sucesos elementales:

$$P(X = 0) = \underbrace{\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5}}_{\text{AAA}} = \frac{6}{210} = \frac{1}{35}$$

$$P(X = 2) = \underbrace{\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5}}_{\text{BBA}} + \underbrace{\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5}}_{\text{BAB}} + \underbrace{\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5}}_{\text{ABB}} = \frac{108}{210} = \frac{18}{35}$$

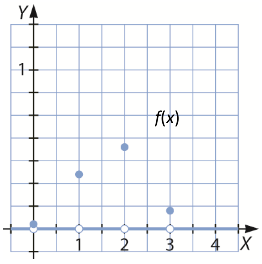
$$P(X = 1) = \underbrace{\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5}}_{\text{BAA}} + \underbrace{\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5}}_{\text{ABA}} + \underbrace{\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5}}_{\text{AAB}} = \frac{72}{210} = \frac{12}{35}$$

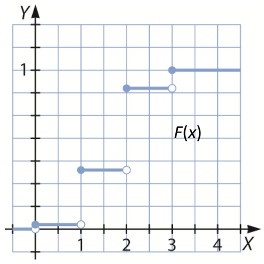
$$P(X = 3) = \underbrace{\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5}}_{\text{BBB}} = \frac{24}{210} = \frac{4}{35}$$

Las funciones de probabilidad y de distribución son, respectivamente:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{35} & \text{si } x = 0 \\ \frac{12}{35} & \text{si } x = 1 \\ \frac{18}{35} & \text{si } x = 2 \\ \frac{4}{35} & \text{si } x = 3 \\ 0 & \text{en el resto de los valores} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{35} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{13}{35} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{31}{35} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$$





b) Determinamos el espacio muestral, siendo F = «Fresa», N = «Naranja» y M = «Menta»:

E = {FF, FN, FM, NN, NF, NM, MF, MN}

Los sucesos no tienen la misma probabilidad, ya que cada extracción no es independiente. El total de caramelos es 7. Calculamos las probabilidades de los sucesos elementales:

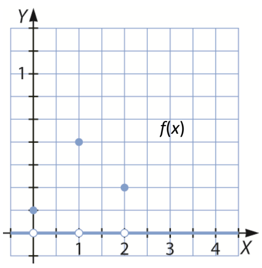
$$P(X=0)=\underbrace{\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}}_{\text{FF}}+\underbrace{\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}}_{\text{FM}}+\underbrace{\frac{1}{7}\cdot\frac{2}{6}}_{\text{MF}}=\frac{6}{42}=\frac{1}{7}$$

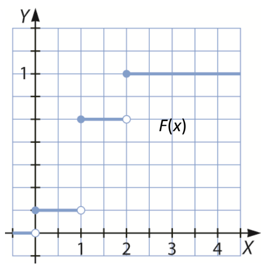
$$P(X=1)=\underbrace{\frac{2}{7}\cdot\frac{4}{6}}_{\text{FN}}+\underbrace{\frac{1}{7}\cdot\frac{4}{6}}_{\text{MN}}+\underbrace{\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{6}}_{\text{NF}}+\underbrace{\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{6}}_{\text{NM}}=\frac{24}{42}=\frac{4}{7}$$

$$P(X=2)=\underbrace{\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}}_{\text{NN}}=\frac{12}{42}=\frac{2}{7}$$

Las funciones de probabilidad y de distribución son, respectivamente:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{7} & \text{si } x=0\\ \frac{4}{7} & \text{si } x=1\\ \frac{2}{7} & \text{si } x=2\\ 0 & \text{en el resto de los valores}\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ \frac{1}{7} & \text{si } 0\le x<1\\ \frac{5}{7} & \text{si } 1\le x<2\\ 1 & \text{si } 2\le x\end{cases}$$





c) Determinamos el espacio muestral, siendo V = «Varón» y A = «Mujer»:

E = {VVVV, VVVM, VVMV, VMVV, MVVV, VVMM, VMMV,VMVM,MVMV, MVVM, MMVV, MMMV, MMVM, MVMM, VMMM, MMMM}

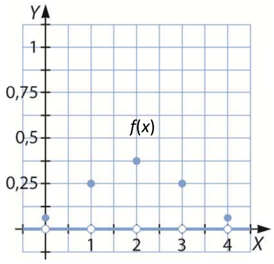
Los sucesos tienen la misma probabilidad, y el número total es 16. Calculamos las probabilidades de los sucesos elementales:

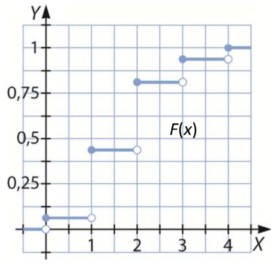
$P(X=0)=\frac{1}{16}$ $\quad P(X=1)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$ $\quad P(X=2)=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$ $\quad P(X=3)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$ $\quad P(X=4)=\frac{1}{16}$

Las funciones de probabilidad y de distribución son, respectivamente:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{16} & \text{si } x = 0 \text{ o } x = 4 \\ \frac{1}{4} & \text{si } x = 1 \text{ o } x = 3 \\ \frac{3}{8} & \text{si } x = 2 \\ 0 & \text{en el resto de los valores} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{16} & \text{si } 0 \le x < 1 \\ \frac{5}{16} & \text{si } 1 \le x < 2 \\ \frac{11}{16} & \text{si } 2 \le x < 3 \\ \frac{15}{16} & \text{si } 3 \le x < 4 \\ 1 & \text{si } 4 \le x \end{cases}$$





33. **¿Cuáles de las tablas de probabilidades que aparecen a continuación se ajustan a funciones de probabilidad? Halla la función de distribución de la que sea función de probabilidad.**

a)

X	x_1	x_2	x_3
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$

b)

X	x_1	x_2	x_3	x_4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{25}$

c)

X	x_1	x_2	x_3	x_4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$

d)

X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$P(X = x_i)$	0,2	0,1	0,1	0,2	0,4

a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} = \frac{31}{30} \neq 1 \rightarrow$ No es una función de probabilidad.

b) $\frac{1}{2} + \frac{3}{25} + \frac{2}{7} + \frac{2}{25} = \frac{69}{70} \neq 1 \rightarrow$ No es una función de probabilidad.

c) $\frac{1}{4} + \frac{2}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{7}{6} \neq 1 \rightarrow$ No es una función de probabilidad.

d) $0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}4 = 1 \rightarrow$ Es una función de probabilidad.

Su función de distribución es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_1 \\ 0{,}2 & \text{si } x_1 \le x < x_2 \\ 0{,}3 & \text{si } x_2 \le x < x_3 \\ 0{,}4 & \text{si } x_3 \le x < x_4 \\ 0{,}6 & \text{si } x_4 \le x < x_5 \\ 1 & \text{si } x_5 \le x \end{cases}$$

34. **En la urna U_1 hay cuatro bolas numeradas del 1 al 4, y en la urna U_2 hay ocho bolas numeradas del 5 al 12. Se lanza un dado: si sale 1 o 2, se saca una bola de la urna U_1; si sale 3, 4, 5 o 6, se saca una bola de la urna U_2.**

a) Describe la distribución de probabilidad de la variable aleatoria que asigna a cada suceso el número de la bola extraída.

b) Halla la función de probabilidad, la función de distribución y los parámetros media, varianza y desviación típica de esta variable.

a) $P(\text{Sacar bola de } U_1) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ $\qquad$ $P(\text{Sacar bola de } U_2) = \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{12}$

Todos los sucesos tienen la misma probabilidad: $P(X = x_i) = \frac{1}{12}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{12} & \text{si } x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \text{ o } 12 \\ 0 & \text{en el resto de los valores} \end{cases}$ $\qquad$ $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{[x]}{12} & \text{si } 1 \leq x < 12 \\ 1 & \text{si } 12 \leq x \end{cases}$

$\mu = 6{,}5$ $\qquad$ $\sigma^2 = 11{,}9167$ $\qquad$ $\sigma = 3{,}452$

35. **En la tabla se muestran las probabilidades correspondientes a los valores que toma una variable aleatoria *X*.**

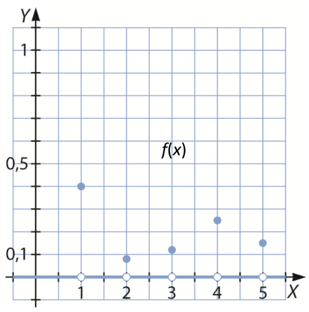
X	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,4	0,08	0,12	0,25	0,15

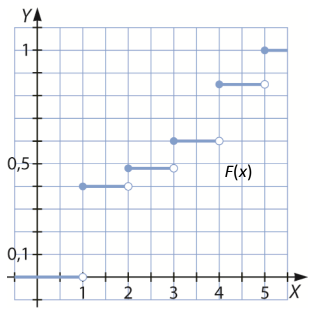
Comprueba que se trata de su función de probabilidad, calcula su función de distribución y realiza las representaciones gráficas.

Comprobamos que es una función de probabilidad:

$0{,}4 + 0{,}08 + 0{,}12 + 0{,}25 + 0{,}15 = 1 \rightarrow$ Es función de probabilidad.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 0{,}4 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0{,}48 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 0{,}6 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 0{,}85 & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 1 & \text{si } 5 \leq x \end{cases}$$





36. **Con los datos de la actividad anterior, calcula las siguientes probabilidades.**

a) $P(X > 3)$

b) $P(X \leq 2)$

c) $P(2 < X \leq 4)$

d) $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$

a) $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) = 0,4$

b) $P(X \leq 2) = F(2) = 0,48$

c) $P(2 < X \leq 4) = P(X \leq 4) - P(X \leq 2) = F(4) - F(2) = 0,37$

d) $\mu = 2,67$; $\sigma = 1,556$

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = P(1,114 < X < 4,226) = P(X < 4,226) - P(X \leq 1,114) = F(4,226) - F(1,114) = 0,45$

37. Se considera la siguiente tabla, que hace corresponder los valores que toma una variable aleatoria *X* a sus probabilidades.

X	4	5	6	7
$P(X = x_i)$	0,6	0,2	0,15	0,05

a) Comprueba que corresponde a una distribución de probabilidad.
b) Calcula la función de distribución.
c) Halla su media y su desviación típica.

a) $0,6 + 0,2 + 0,15 + 0,05 = 1$

b) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\infty < x < 4 \\ 0,6 & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 0,8 & \text{si } 5 \leq x < 6 \\ 0,95 & \text{si } 6 \leq x < 7 \\ 1 & \text{si } 7 \leq x < +\infty \end{cases}$

c) Media: $\mu = 4,65$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{0,8275} = 0,909$

38. Con la distribución de la actividad anterior, determina las siguientes probabilidades.

a) $P(X > 4)$
b) $P(X < 6)$
c) $P(4 \leq X < 7)$
d) $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$

a) $P(X > 4) = 0,4$

b) $P(X < 6) = 0,8$

c) $P(4 \leq X < 7) = 0,95$

d) $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = P(3,741 < X < 5,559) = 0,8$

39. En una urna hay 7 fichas blancas, 5 fichas rojas y 2 fichas amarillas. Se extraen al azar tres fichas, reemplazando cada una de ellas una vez que se ha anotado el número de fichas rojas extraídas.

a) Halla la función de probabilidad y la de distribución de la variable aleatoria que cuenta el número de fichas rojas.
b) Calcula la probabilidad de obtener, al menos, una ficha roja.
c) Calcula la media y la desviación típica de la variable aleatoria.

a) Como la ficha sacada se vuelve a meter en la urna, la probabilidad de sacar una ficha roja es siempre la misma:

$$P(\text{Sacar ficha roja}) = \frac{5}{14} \rightarrow P(\text{No sacar ficha roja}) = \frac{9}{14}$$

Determinamos el espacio muestral, siendo R = «Sacar rojo» y N = «No sacar rojo»:

E = {NNN, NNR, NRN, RNN, NRR, RNR, RRN, RRR}

Los sucesos no tienen la misma probabilidad. Calculamos las probabilidades de los sucesos elementales:

$$P(X = 0) = \left(\frac{9}{14}\right)^3 = \frac{729}{2744} \qquad P(X = 2) = 3 \cdot \left(\frac{9}{14}\right)\left(\frac{5}{14}\right)^2 = \frac{675}{2744}$$

$$P(X = 1) = 3 \cdot \left(\frac{9}{14}\right)^2 \left(\frac{5}{14}\right) = \frac{1215}{2744} \qquad P(X = 3) = \left(\frac{5}{14}\right)^3 = \frac{125}{2744}$$

Así, las probabilidades serán:

$P(X=0)=\left(\frac{9}{14}\right)^3=\frac{729}{2744}$ $\qquad$ $P(X=2)=\left(\frac{9}{14}\right)\left(\frac{5}{14}\right)^2=\frac{225}{2744}$

$P(X=1)=\left(\frac{9}{14}\right)^2\left(\frac{5}{14}\right)=\frac{405}{2744}$ $\qquad$ $P(X=3)=\left(\frac{5}{14}\right)^3=\frac{125}{2744}$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{729}{2\,744} & \text{si } x=0\\ \frac{1215}{2\,744} & \text{si } x=1\\ \frac{225}{2\,744} & \text{si } x=2\\ \frac{125}{2\,744} & \text{si } x=3\\ 0 & \text{en el resto de los valores}\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ \frac{729}{2\,744} & \text{si } 0\le x<1\\ \frac{1944}{2\,744} & \text{si } 1\le x<2\\ \frac{729}{2\,744} & \text{si } 2\le x<3\\ \frac{729}{2\,744} & \text{si } 3\le x<4\\ 1 & \text{si } 4\le x\end{cases}$$

40. En el experimento aleatorio que consiste en elegir al azar una ficha de dominó, considera las variables que aparecen a continuación.

X = «Mayor puntuación de las dos que tiene la ficha»
Y = «Diferencia en valor absoluto de las dos puntuaciones que tiene la ficha»

a) Halla la función de probabilidad.
b) Calcula la media y la desviación típica para cada una de las variables.
c) Calcula $P(X < 4)$.
d) Calcula $P(Y \geq 5)$.

a)

X	0	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{4}$

Y	0	1	2	3	4	5	6
$P(Y=y_i)$	$\frac{7}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{28}$

b) $\mu_X=4$ $\qquad$ $\sigma_X=1{,}732$

$\mu_Y=2$ $\qquad$ $\sigma_Y=1{,}732$

c) $P(X<4)=\frac{5}{14}$

d) $P(X\geq 5)=\frac{3}{28}$

41. En el experimento aleatorio que consiste en lanzar dos dados, considera la variable aleatoria que a cada suceso elemental le hace corresponder la suma de las puntuaciones que han aparecido en cada uno de los dados.

a) Halla la función de probabilidad, la media y la desviación típica.
b) Calcula $P(X > 9)$.
c) Calcula $P(X \leq 5)$.

a)

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

b) $P(X > 9) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

c) $P(X \leq 5) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

42. En la bolsa B_1 hay cuatro bolas numeradas del 1 al 4 y en la bolsa B_2 hay cinco bolas numeradas del 1 al 5. Se extrae al azar una bola de cada bolsa. Se considera la siguiente variable.

X = «Resultado de multiplicar los números de las bolas extraídas»

Halla su función de probabilidad y calcula la probabilidad de obtener un resultado mayor que 12.

$P(\text{Sacar bola de } B_1) = \frac{1}{4}$ $\quad$ $P(\text{Sacar bola de } B_2) = \frac{1}{5}$ $\quad$ $P(\text{Sacar un par } (b_1, b_2)) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$

Algunos resultados no son posibles porque no se pueden obtener multiplicando los números de las bolsas.

X	Posibilidades	$P(X = x_i)$
1	(1, 1)	$\frac{1}{20}$
2	(1, 2) (2, 1)	$\frac{1}{10}$
3	(1, 3) (3, 1)	$\frac{1}{10}$
4	(1, 4) (4, 1) (2, 2)	$\frac{3}{20}$
5	(1, 5)	$\frac{1}{20}$
6	(2, 3) (3, 2)	$\frac{1}{10}$
8	(2, 4) (4, 2)	$\frac{1}{10}$
9	(3, 3)	$\frac{1}{20}$
10	(2, 5)	$\frac{1}{20}$
12	(3, 4) (4, 3)	$\frac{1}{10}$
15	(3, 5)	$\frac{1}{20}$
16	(4, 4)	$\frac{1}{20}$
20	(4, 5)	$\frac{1}{20}$

$P(X > 12) = \frac{3}{20}$

43. Indica las variables aleatorias que siguen una distribución binomial.

a) Tenemos 3 fichas blancas y 5 fichas azules en una bolsa. Sacamos 4 fichas y contamos el número de fichas que son blancas.

b) En la situación anterior sacamos una ficha, anotamos su color y la devolvemos a la bolsa. Repetimos el experimento tres veces y anotamos el número de fichas de color blanco.

c) Lanzamos un dado diez veces y anotamos las veces que sale el número 1.

d) Se lanza un dado y, si sale un número par, se vuelve a lanzar el mismo dado, pero si sale impar se tira un dado con forma de tetraedro y caras numeradas del 1 al 4. Se cuentan las veces que sale el número 3.

e) En una ciudad, el 10% de la población tiene los ojos de color azul. Se eligen, al azar, 20 personas de dicha ciudad y se anota el número de ellas que tiene los ojos azules.

a) La variable aleatoria no sigue una distribución binomial.

b) La variable es discreta porque solo puede tomar los valores 0, 1, 2 y 3.

$n = 3$ es el número de veces que se realiza el experimento.

Sea A = «Salir una ficha blanca», entonces $P(A) = \frac{3}{8}$.

Los experimentos son independientes, porque lo que sucede en una extracción no influye en la siguiente.

Por tanto, la variable sigue una distribución binomial: $B\left(3, \frac{3}{8}\right)$

c) La variable es discreta porque solo puede tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.

$n = 10$ es el número de veces que se realiza el experimento.

Sea A = «Salir un 1», entonces $P(A) = \frac{1}{6}$.

Los experimentos son independientes, porque lo que sucede en un lanzamiento no influye en el siguiente.

Por tanto, la variable sigue una distribución binomial: $B\left(10, \frac{1}{6}\right)$

d) La variable aleatoria no sigue una distribución binomial.

e) La variable es discreta, porque solo puede tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 y 20.

$n = 20$ es el número de veces que se realiza el experimento.

Sea A = «Tener los ojos azules», entonces $P(A) = 0{,}1$.

Los experimentos son independientes, porque el color de los ojos de una persona no influye en el color de los ojos de la otra persona.

Por tanto, la variable sigue una distribución binomial: $B(20; 0{,}1)$

44. Realiza una tabla con las probabilidades correspondientes a una variable aleatoria *X* que cuenta el número de veces que ocurre un suceso *A*, cuya probabilidad es de 0,25; al realizar el experimento 4 veces.

$X \equiv B(4; 0{,}25)$	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,3164	0,4219	0,2109	0,0469	0,0039

45. Completa las tablas y calcula la media y la desviación típica en cada caso.

a)

$X \equiv B(3; 0{,}9)$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$				

b)

$X \equiv B(5; 0{,}15)$	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$						

a)

$X \equiv B(3; 0{,}9)$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,001	0,027	0,243	0,729

$\mu = 2{,}7$

$\sigma = 0{,}5196$

b)

$X \equiv B(5; 0{,}15)$	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,4437	0,3915	0,1382	0,02438	0,0022	0,00008

$\mu = 0{,}75$

$\sigma = 0{,}7984$

46. En las siguientes situaciones descubre las variables aleatorias que siguen una distribución binomial. Indica los parámetros y el suceso destacado del experimento.

a) Un arquero profesional consigue anotar 10 puntos en un 97 % de los casos. Realiza entrenamientos de 50 tiradas y anota aquellas en las que la puntuación es 10.

b) El 12 % de los tornillos fabricados por una máquina son defectuosos. Se eligen 5 tornillos para las sesiones de control.

c) Se lanza un dado 10 veces y se anota el número de puntuaciones igual a 6.

d) Se elige una familia de 7 hijos y se cuenta el número de varones.

e) El 70 % de los vecinos de una localidad tiene nietos; el resto, no. Se eligen al azar 20 vecinos del lugar y se anota si son abuelos o no.

f) La probabilidad de que un estudiante que ingresa en la universidad se titule en el mínimo período de tiempo es de 0,3. Se eligen al azar 30 estudiantes y se les pregunta por el tiempo empleado hasta su titulación.

a) Es una $B(50; 0{,}97) \rightarrow \mu = 48{,}5 \rightarrow$ El caso con mayor probabilidad es 49.

b) Es una $B(5; 0{,}12) \rightarrow \mu = 0{,}6 \rightarrow$ El caso con mayor probabilidad es 0.

c) Es una $B\left(10; \frac{1}{6}\right) \rightarrow \mu = 1{,}67 \rightarrow$ El caso con mayor probabilidad es 1.

d) Es una $B\left(7; \frac{1}{2}\right) \rightarrow \mu = 3{,}5 \rightarrow$ Los casos con mayor probabilidad son 3 y 4.

e) Es una $B(20; 0{,}7) \rightarrow \mu = 14 \rightarrow$ El caso con mayor probabilidad es 14.

f) Si la variable aleatoria fuese saber si se han titulado en el tiempo mínimo sí sería una binomial, pero esta variable no sigue una binomial.

47. Calcula las probabilidades que se indican para las siguientes distribuciones binomiales.

a) Siendo X una variable $B(4; 0{,}3)$:
$P(X = 0)$ $\quad P(X < 2)$ $\quad P(X \geq 3)$

b) Siendo X una variable $B(8; 0{,}75)$:
$P(X = 7)$ $\quad P(X \leq 4)$ $\quad P(X > 6)$

c) Siendo X una variable $B(10; 0{,}42)$:
$P(X = 8)$ $\quad P(X \leq 1)$ $\quad P(X < 10)$

a) $P(X = 0) = 0{,}2401$ $\quad P(X < 2) = 0{,}6517$ $\quad P(X \geq 3) = 0{,}0837$

b) $P(X = 7) = 0{,}267$ $\quad P(X \leq 4) = 0{,}1138$ $\quad P(X > 6) = 0{,}3671$

c) $P(X = 8) = 0{,}0147$ $\quad P(X \leq 1) = 0{,}0355$ $\quad P(X < 10) = 0{,}9998$

48. **Haz la tabla de la distribución de una variable aleatoria *X* que sigue una distribución binominal *B*(5; 0,8).**

X	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$						

Comprueba que se verifica que $\mu = np$ y $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

X	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,00032	0,0064	0,0512	0,2048	0,4096	0,32768

$\mu = 5 \cdot 0{,}8 = 4$ $\sigma = \sqrt{0{,}8} = 0{,}89 = \sqrt{5 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}$

49. **El 2‰ de las pilas fabricadas llegan descargadas al proceso de envasado. Si escogemos 12 pilas al azar, calcula la probabilidad de que haya más de 2 pilas descargadas.**

$X \equiv B(12; 0{,}002)$

$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)) =$

$= 1 - \binom{12}{0} \cdot 0{,}002^0 \cdot 0{,}998^{12} - \binom{12}{1} \cdot 0{,}002^1 \cdot 0{,}998^{11} - \binom{12}{2} \cdot 0{,}002^2 \cdot 0{,}998^{10} =$

$= 1 - 0{,}97626 - 0{,}023477 - 0{,}00025877 = 0{,}000004$

50. **Se lanza al aire una moneda 8 veces. Calcula la probabilidad de que salgan como máximo 5 caras.**

Sea X = «Tirar una moneda al aire 8 veces y apuntar el número de caras» $\rightarrow X \equiv B\left(8; \frac{1}{2}\right)$

$P(X \leq 5) = 0{,}8555$

51. **En una fábrica de grifos, los controles de calidad detectan la aparición de un defecto con una probabilidad de 0,06. Que un grifo tenga un defecto es independiente de que los otros lo tengan o no. Si se escogen, al azar, 9 grifos en un control, calcula la probabilidad de que:**

a) Al menos uno de los grifos tenga un defecto.

b) Ningún grifo tenga defecto.

Sea X = «Cuántos grifos son defectuosos de una muestra de 9 grifos» $\rightarrow X \equiv B(9; 0{,}06)$

a) $P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 0{,}0978$ b) $P(X = 0) = 0{,}573$

52. **En una clase de 1.º de Bachillerato hay igual número de chicos que de chicas. Si se eligen 6 personas al azar de este grupo, calcula la probabilidad de que:**

a) Haya, al menos, tres chicos.
b) No haya ninguna chica.
c) Haya exactamente tres chicas.

Sea $X =$ «Cuántas chicas hay en el grupo de 6 estudiantes» $\longrightarrow X \equiv B\left(6; \frac{1}{2}\right)$

a) $P(X \le 3) = 0,6563$ b) $P(X = 0) = 0,0156$ c) $P(X = 3) = 0,3125$

53. **Realiza la actividad anterior suponiendo que en el grupo hay triple número de chicos que de chicas.**

Por cada chica hay tres chicos, es decir, $P(\text{Chica}) = \frac{1}{4} \longrightarrow X \equiv B\left(6; \frac{1}{4}\right)$

a) $P(X \le 3) = 0,9624$ b) $P(X = 0) = 0,178$ c) $P(X = 3) = 0,1318$

54. **El 80 % de los enfermos tratados con cierto medicamento mejora hasta sanar completamente. Elegidos 20 enfermos que tienen este medicamento en su tratamiento, calcula la probabilidad de que más de la mitad, pero menos de tres cuartas partes, sane completamente.**

Sea $X =$ «Cuántos enfermos sanarán del grupo de 20» $\longrightarrow X \equiv B(20; 0,8)$

$P(10 < X < 15) = P(X < 15) - P(X \le 10) = 0,1932$

55. **Se lanzan al aire cuatro dados. Ordena de menor a mayor las siguientes probabilidades.**

a) Que salga dos veces la cara 5.
b) Que salga más de dos veces la cara 5.
c) Que salga, al menos, una vez la cara 5.

Sea $X =$ «Cuántos 5 salen en los 4 dados» $\longrightarrow X \equiv B\left(4; \frac{1}{6}\right)$

a) $P(X = 2) = 0,1157$ b) $P(X > 2) = 0,0162$ c) $P(X \ge 1) = 1 - P(X = 0) = 0,5177$

El orden sería: b) < a) < c).

56. **La probabilidad de que cierto jugador de baloncesto enceste una canasta de tres puntos es 0,4. Calcula la probabilidad de que efectuando cinco lanzamientos:**

a) Enceste, exactamente, cuatro canastas.
b) Enceste más de tres canastas.
c) Enceste, como mucho, dos canastas.
d) No enceste ninguna canasta.

Sea $X =$ «Cuántas canastas encesta de 5 lanzamientos» $\longrightarrow X \equiv B(5; 0,4)$

a) $P(X = 4) = 0,0768$ c) $P(X \le 2) = 0,6826$

b) $P(X > 3) = 0,087$ d) $P(X = 0) = 0,0778$

57. De cada 100 encuestados, 13 eligen «NS/NC» como respuesta.

Si se escogen 15 encuestados al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Como mínimo 10 respondan «NS/NC».

b) Exactamente 3 no respondan «NS/NC».

Sea X = «Cuántos encuestados responden 'NS/NC' de los 15» $\rightarrow$ $X \equiv B(15; 0,13)$

a) $P(X \geq 10) = 0{,}000002$ b) $P(X = 3) = 0{,}188$

58. Una de cada doce revisiones técnicas de vehículos es evaluada como «no apta».

Si a lo largo de un día se revisan 35 vehículos, calcula la probabilidad de que:

a) Exactamente 3 hayan sido evaluadas como «no apta».

b) Ninguna haya sido evaluada como «no apta».

c) Al menos 5 hayan sido evaluadas como «apta».

Sea X = «Cuántas revisiones son no aptas de los 35 vehículos» $\rightarrow$ $X \equiv B\left(35; \frac{1}{12}\right)$

a) $P(X = 3) = 0{,}234$ b) $P(X = 0) = 0{,}0476$ c) $P(X < 30) \approx 1$

59. Comprueba si las siguientes funciones son funciones de densidad.

a) $f(x) = \begin{cases} 0{,}5 & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 5 & si\ x \in \left[3, \frac{16}{5}\right] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$

a) $f(x)$ forma un rectángulo con el eje X con lados de longitud 0,5 y 2 $\rightarrow$ El área bajo $f(x)$ es $0{,}5 \cdot 2 = 1$, por tanto, es función de densidad.

b) $f(x)$ forma un rectángulo con el eje X con lados de longitud 5 y $3 - \frac{16}{5} = \frac{1}{5}$ $\rightarrow$ El área bajo $f(x)$ es $5 \cdot \frac{1}{5} = 1$, por tanto, es función de densidad.

60. Averigua, para cada función $f(x)$, el valor de k para que sea una función de densidad, y halla la función de distribución correspondiente.

a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ k & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 4k & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x+1}{4} & \text{si } 0 \leq x \leq k \\ 0 & \text{si } x > k \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} -0{,}5x + k & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{si } x \notin [-1, 1] \end{cases}$

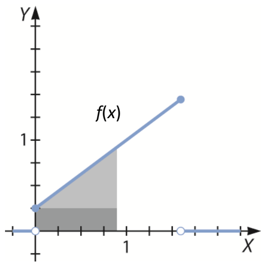
a) $f(x)$ forma dos rectángulos con el eje X con los lados de las siguientes longitudes:

- k y 1 $\rightarrow$ Área $= k$
- $4k$ y 1 $\rightarrow$ Área $= 4k$

Para ser función de densidad, el área bajo $f(x)$ debe ser 1 $\rightarrow$ $k + 4k = 1 \rightarrow k = \frac{1}{5}$.

La función de distribución es: $F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ \dfrac{x}{5} & \text{si } 0\le x<1\\ \dfrac{4x}{5} & \text{si } 1\le x<2\\ 1 & \text{si } 2\le x\end{cases}$

b) Dibujamos $f(x)$:



Como se ve en la figura, entre 0 y k la función de distribución $F(x)$ representa el área de un trapecio formado por un rectángulo cuyos lados miden $\frac{1}{4}$ y x, y un triángulo de base x y altura $\frac{x}{4}$. Por tanto, el valor de la función de distribución entre 0 y k sería:

$$F(x)=\frac{x}{4}+\frac{x\cdot\frac{x}{4}}{2}=\frac{x^2+2x}{8}$$

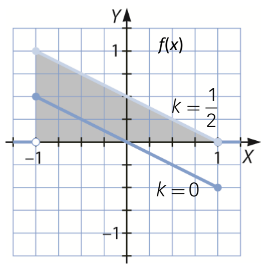
Para ser función de densidad, la función de distribución en $x=k$ debe valer 1, por tanto:

$$F(k)=\frac{k^2+2k}{8}=1\rightarrow k^2+2k-8=0\rightarrow\begin{cases}k_1=-4\\ k_2=2\end{cases}$$

Como en la definición vemos que $k>0\rightarrow k=2$. Así, la función de distribución queda:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ \dfrac{x^2+2x}{8} & \text{si } 0\le x<2\\ 1 & \text{si } 2\le x\end{cases}$$

c) Dibujamos $f(x)$:



Como se ve, k debe valer como mínimo $\frac{1}{2}$, porque de otro modo $f(x)$ no sería siempre positiva, algo imprescindible para ser función de densidad.

Además, si hacemos $k=\frac{1}{2}$, el área bajo $f(x)$ sería un triángulo de base y altura $\frac{1}{2}$ cuya área es 1. Por tanto $k=\frac{1}{2}$ para que $f(x)$ sea función de densidad.

La función de distribución entre –1 y 1, es el área del trozo de triángulo entre –1 y x o, lo que es lo mismo, 1 menos el área del triángulo entre x y 1:

$$F(x)=1-\frac{(1-x)\cdot\left(-0,5x+\frac{1}{2}\right)}{2}=1-\frac{(1-x)\cdot\left(\frac{-x+1}{2}\right)}{2}=1-\frac{x^2-2x+1}{4}$$

La función de densidad es: $F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ 1-\dfrac{x^2-2x+1}{4} & \text{si } -1\le x\le 1\\ 1 & \text{si } 1<x\end{cases}$

61. **Comprueba que $f(x)$ es una función de densidad, halla su función de distribución y calcula las probabilidades que se indican.**

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{6} & \text{si } x\in[2,8]\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$

a) $P(X<3)$ b) $P(3\le X\le 5)$ c) $P(x>6)$

$f(x)$ en [2, 8] forma un rectángulo con el eje X de cuyos lados miden $\frac{1}{6}$ y 6, y cuya área mide $\frac{1}{6}\cdot 6=1$. Por tanto, es una función de densidad cuya función de distribución es:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<-1\\ 1-\dfrac{x^2-2x+1}{4} & \text{si } -1\le x\le 1\\ 1 & \text{si } 1<x\end{cases}$$

a) $P(X<3)=F(x)=\frac{1}{6}\cdot(3-2)=\frac{1}{6}$

b) $P(3\le X\le 5)=P(X\le 5)-P(X<3)=F(5)-F(3)=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

c) $P(X>6)=1-P(X\le 6)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

62. **Comprueba que $f(x)$ es una función de densidad, halla su función de distribución y calcula las probabilidades que se indican.**

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{10} & \text{si } x\in[4,6]\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$

a) $P(X<4,5)$ b) $P(4,5\le X\le 5)$ c) $P(X>5)$

La función $\frac{x}{10}$ forma un triángulo con el eje X de base x y altura $\frac{x}{10}$, cuya área es $A(x)=\frac{x^2}{20}$. De esta forma, el área bajo $f(x)$ será: $A(6)-A(4)=\frac{6^2}{20}-\frac{4^2}{20}=1\rightarrow$ Es función de densidad.

La función de distribución en [4, 6] será $A(x)-A(4)$, así: $F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<4\\ \dfrac{x^2-16}{20} & \text{si } 4\le x\le 6\\ 1 & \text{si } 6<x\end{cases}$

a) $P(X<4,5)=F(4,5)=0,2125$

b) $P(4,5\le X\le 5)=P(X\le 5)-P(X\le 4,5)=F(5)-F(4,5)=0,2375$

c) $P(X>5)=1-P(X\le 5)=1-F(5)=0,55$

63. **La función de distribución de una variable aleatoria continua es la siguiente.**

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^3}{8} & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Halla las siguientes probabilidades.

a) $P(0{,}5 < X < 1{,}5)$
b) $P(1 < X < 2)$
c) $P(X < 1{,}5)$
d) $P(X > 1{,}2)$

a) $P(0{,}5 < X < 1{,}5) = F(1{,}5) - F(0{,}5) = 0{,}40625$

b) $P(1 < X < 2) = F(2) - F(1) = 0{,}875$

c) $P(X < 1{,}5) = F(1{,}5) = 0{,}4219$

d) $P(X > 1{,}2) = 1 - F(1{,}2) = 0{,}784$

64. **La función de distribución de una variable aleatoria continua es la siguiente.**

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{x-1}{3} & \text{si } 1 \le x \le 4 \\ 1 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Determina estas probabilidades.

a) $P(2 \le X \le 3)$
b) $P(X \le 3)$
c) $P(1{,}5 \le X \le 2{,}5)$
d) $P(X > 2)$

a) $P(2 \le X \le 3) = F(3) - F(2) = \dfrac{1}{3}$

b) $P(X \le 3) = F(3) = \dfrac{2}{3}$

c) $P(1{,}5 \le X \le 2{,}5) = F(2{,}5) - F(1{,}5) = \dfrac{1}{3}$

d) $P(X > 2) = 1 - F(2) = \dfrac{2}{3}$

65. **Una variable aleatoria tiene la siguiente función de distribución.**

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-\infty, 3) \\ \dfrac{x^2 + x - 12}{8} & \text{si } x \in [3, 4] \\ 1 & \text{si } x \in (4, +\infty) \end{cases}$$

Calcula estas probabilidades.

a) $P(3 \le X \le 4)$
b) $P(3{,}5 \le X < 3{,}6)$
c) $P(X \le 3{,}5)$
d) $P(X > 3{,}8)$

a) $P(3 \le X \le 4) = P(X \le 4) - P(X \le 3) = F(4) - F(3) = 1 - 0 = 1$

b) $P(3{,}5 \le X < 3{,}6) = P(X < 3{,}6) - P(X \le 3{,}5) = F(3{,}6) - F(3{,}5) = 0{,}57 - 0{,}47 = 0{,}1$

c) $P(X \le 3{,}5) = F(3{,}5) = 0{,}47$

d) $P(X > 3{,}8) = 1 - P(X \le 3{,}8) = 1 - F(3{,}8) = 1 - 0{,}78 = 0{,}22$

66. **Calcula las probabilidades que aparecen a continuación para la distribución $N(0, 1)$.**

a) $P(Z < 0{,}6)$
b) $P(Z \le 0{,}92)$
c) $P(Z < 1{,}3)$
d) $P(Z \le 2{,}4)$
e) $P(Z < 1{,}23)$
f) $P(Z \le 2{,}01)$
g) $P(Z \le 0{,}07)$
h) $P(Z < 0{,}31)$

a) $P(Z < 0{,}6) = 0{,}7257$
b) $P(Z \leq 0{,}92) = 0{,}8212$
c) $P(Z < 1{,}3) = 0{,}9032$
d) $P(Z \leq 2{,}4) = 0{,}9918$
e) $P(Z < 1{,}23) = 0{,}8907$
f) $P(Z \leq 2{,}01) = 0{,}9778$
g) $P(Z \leq 0{,}07) = 0{,}5279$
h) $P(Z < 0{,}31) = 0{,}6217$

67. En la distribución $N(0, 1)$, calcula las probabilidades que aparecen a continuación.

a) $P(Z \geq 0{,}68)$
b) $P(Z > 0{,}9)$
c) $P(Z > 1{,}5)$
d) $P(Z \geq 2)$
e) $P(Z = 1{,}2)$
f) $P(Z > 1{,}6)$
g) $P(Z > 0{,}03)$
h) $P(Z \geq 2{,}21)$

a) $P(Z \geq 0{,}6) = 1 - P(Z \leq 0{,}6) = 0{,}2743$
b) $P(Z > 0{,}9) = 1 - P(Z \leq 0{,}9) = 0{,}1841$
c) $P(Z > 1{,}5) = 1 - P(Z \leq 1{,}5) = 0{,}0668$
d) $P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 0{,}0228$
e) $P(Z = 1{,}2) = 0$
f) $P(Z > 1{,}6) = 1 - P(Z \leq 1{,}6) = 0{,}0548$
g) $P(Z > 0{,}03) = 1 - P(Z \leq 0{,}03) = 0{,}488$
h) $P(Z \geq 2{,}21) = 1 - P(Z \leq 2{,}21) = 0{,}0136$

68. Calcula el valor de las siguientes probabilidades de la distribución $N(0, 1)$.

a) $P(Z \leq -0{,}4)$
b) $P(Z \leq -1{,}62)$
c) $P(Z < -2{,}3)$
d) $P(Z = -2{,}05)$
e) $P(Z < -2{,}5)$
f) $P(Z \leq -1{,}76)$
g) $P(Z < -0{,}13)$
h) $P(Z \leq -1{,}07)$

a) $P(Z \leq -0{,}4) = 1 - P(Z \leq 0{,}4) = 0{,}3446$
b) $P(Z \leq -1{,}62) = 1 - P(Z \leq 1{,}62) = 0{,}0526$
c) $P(Z < -2{,}3) = 1 - P(Z \leq 2{,}3) = 0{,}0107$
d) $P(Z = -2{,}05) = 0$
e) $P(Z < -2{,}5) = 1 - P(Z \leq 2{,}5) = 0{,}0062$
f) $P(Z \leq -1{,}76) = 1 - P(Z \leq 1{,}76) = 0{,}0392$
g) $P(Z < -0{,}13) = 1 - P(Z \leq 0{,}13) = 0{,}4483$
h) $P(Z \leq -1{,}07) = 1 - P(Z \leq 1{,}07) = 0{,}1423$

69. En la distribución $N(0, 1)$, calcula las probabilidades que aparecen a continuación.

a) $P(Z > -1{,}27)$
b) $P(Z \geq -2{,}02)$
c) $P(Z > -1{,}35)$
d) $P(Z \geq -2)$
e) $P(Z = -0{,}2)$
f) $P(Z \geq -1{,}04)$
g) $P(Z > -0{,}09)$
h) $P(Z \geq -2{,}31)$

a) $P(Z > -1{,}27) = P(Z \leq 1{,}27) = 0{,}898$
b) $P(Z \geq -2{,}02) = P(Z \leq 2{,}02) = 0{,}9783$
c) $P(Z > -1{,}35) = P(Z \leq 1{,}35) = 0{,}9115$
d) $P(Z \geq -2) = P(Z \leq 2) = 0{,}9772$
e) $P(Z = -0{,}2) = 0$
f) $P(Z \geq -1{,}04) = P(Z \leq 1{,}04) = 0{,}8508$
g) $P(Z > -0{,}09) = P(Z \leq 0{,}09) = 0{,}5359$
h) $P(Z \geq -2{,}31) = P(Z \leq 2{,}31) = 0{,}9896$

70. Halla cada una de las siguientes probabilidades de la distribución $N(0, 1)$.

a) $P(Z > 1{,}11)$
b) $P(Z \leq -0{,}93)$
c) $P(Z \geq 2{,}29)$
d) $P(Z = 0)$
e) $P(Z < -0{,}33)$
f) $P(Z > 0{,}45)$
g) $P(Z \leq -1)$
h) $P(Z \geq -2{,}11)$

a) $P(Z > 1{,}11) = 1 - P(Z \le 1{,}11) = 0{,}1335$

b) $P(Z \le -0{,}93) = 1 - P(Z \le 0{,}93) = 0{,}1762$

c) $P(Z \ge 2{,}29) = 1 - P(Z \le 2{,}29) = 0{,}011$

d) $P(Z = 0) = 0$

e) $P(Z < -0{,}33) = 1 - P(Z \le 0{,}33) = 0{,}3707$

f) $P(Z > 0{,}45) = 1 - P(Z \le 0{,}45) = 0{,}3264$

g) $P(Z \le -1) = 1 - P(Z \le 1) = 0{,}1587$

h) $P(Z \ge -2{,}11) = P(Z \le 2{,}11) = 0{,}9826$

71. Dada la distribución *N*(0, 1), calcula las probabilidades siguientes.

a) $P\left(Z \le \frac{1}{2}\right)$

b) $P\left(Z \ge -\frac{3}{4}\right)$

c) $P\left(Z > \frac{7}{3}\right)$

d) $P\left(Z < -\frac{10}{6}\right)$

e) $P\left(Z \le \frac{4}{7}\right)$

f) $P\left(Z \ge \frac{5}{2}\right)$

a) $P\left(Z \le \frac{1}{2}\right) = 0{,}6915$

b) $P\left(Z \ge -\frac{3}{4}\right) = P\left(Z \le \frac{3}{4}\right) = 0{,}7734$

c) $P\left(Z > \frac{7}{3}\right) = 1 - P\left(Z \le \frac{7}{3}\right) = 0{,}0098$

d) $P\left(Z < -\frac{10}{6}\right) = 1 - P\left(Z \le \frac{10}{6}\right) = 0{,}0478$

e) $P\left(Z \le \frac{4}{7}\right) = 0{,}7161$

f) $P\left(Z \ge \frac{5}{2}\right) = 1 - P\left(Z \le \frac{5}{2}\right) = 0{,}0062$

72. En la distribución *N*(0, 1), calcula las probabilidades que aparecen a continuación.

a) $P(0{,}4 < Z \le 1{,}8)$

b) $P(-0{,}6 \le Z \le 0{,}93)$

c) $P(-1{,}51 \le Z < -0{,}64)$

a) $P(0{,}4 < Z \le 1{,}8) = P(Z \le 1{,}8) - P(Z \le 0{,}4) = 0{,}3086$

b) $P(-0{,}6 \le Z \le 0{,}93) = P(Z \le 0{,}93) - P(Z \le -0{,}6) = P(Z \le 0{,}93) - (1 - P(Z \le 0{,}6)) = 0{,}5496$

c) $P(-1{,}51 \le Z < -0{,}64) = P(Z \le -0{,}64) - P(Z \le -1{,}51) = 1 - P(Z \le 0{,}64) - (1 - P(Z \le 1{,}51)) =$

$= P(Z \le 1{,}51) - P(Z \le 0{,}64) = 0{,}1956$

73. En la distribución *N*(0, 1), calcula las probabilidades que aparecen a continuación.

a) $P(-1{,}8 < Z \le 1{,}8)$

b) $P(-2{,}06 \le Z \le 2{,}06)$

c) $P(-1{,}51 \le Z < 1{,}51)$

a) $P(-1{,}8 < Z \le 1{,}8) = P(Z \le 1{,}8) - P(Z \le -1{,}8) = P(Z \le 1{,}8) - (1 - P(Z \le 1{,}8)) = 2 \cdot P(Z \le 1{,}8) - 1 = 0{,}9281$

b) $P(-2{,}06 \le Z \le 2{,}06) = 2 \cdot P(Z \le 2{,}06) - 1 = 0{,}9606$

c) $P(-1{,}51 \le Z < 1{,}51) = 2 \cdot P(Z \le 1{,}51) - 1 = 0{,}8690$

74. Halla el valor de *k* para que se verifiquen las igualdades en la distribución *N*(0, 1).

a) $P(Z < k) = 0{,}9599$

b) $P(Z > k) = 0{,}9375$

c) $P(Z > k) = 0{,}3085$

d) $P(Z < k) = 0{,}0256$

e) $P(Z \le k) = 0{,}4364$

f) $P(Z > k) = 0{,}5557$

a) $P(Z < k) = 0{,}9599 \rightarrow k = 1{,}75$

b) $P(Z > k) = P(Z \leq -k) = 0{,}9375 \rightarrow k = -1{,}535$

c) $P(Z > k) = 1 - P(Z \leq k) = 0{,}3085 \rightarrow P(Z \leq k) = 0{,}6915 \rightarrow k = 0{,}5$

d) $P(Z < k) = 1 - P(Z \leq -k) = 0{,}0256 \rightarrow P(Z \leq -k) = 0{,}9744 \rightarrow k = -1{,}95$

e) $P(Z \leq k) = 1 - P(Z \leq -k) = 0{,}4364 \rightarrow P(Z \leq -k) = 0{,}5636 \rightarrow k = -0{,}16$

f) $P(Z > k) = P(Z \leq -k) = 0{,}5557 \rightarrow k = -0{,}14$

75. Halla *a*, *b*, *c*, …, para que en una distribución normal *N*(108, 16) se cumpla lo siguiente.

a) $P(X < a) = 0{,}8849$
b) $P(X < b) = 0{,}9972$
c) $P(X < c) = 0{,}3632$
d) $P(X \geq d) = 0{,}0495$
e) $P(X \geq e) = 0{,}5987$
f) $P(X \leq f) = 0{,}7717$

a) $P(X < a) = 0{,}8849 \rightarrow P\left(\frac{X-108}{16} < \frac{a-108}{16}\right) = 0{,}8849 \rightarrow \frac{a-108}{16} = 1{,}2$
$\rightarrow a = 127{,}2$

b) $P(X < b) = 0{,}9972 \rightarrow P\left(\frac{X-108}{16} < \frac{b-108}{16}\right) = 0{,}9972 \rightarrow \frac{b-108}{16} = 2{,}77$
$\rightarrow b = 152{,}32$

c) $P(X < c) = 0{,}3632 \rightarrow P\left(\frac{X-108}{16} < \frac{c-108}{16}\right) = 0{,}3632$
$\rightarrow P\left(\frac{X-108}{16} \leq -\frac{c-108}{16}\right) = 0{,}6368 \rightarrow -\frac{c-108}{16} = 0{,}35$
$\rightarrow c = 102{,}4$

d) $P(X \geq d) = 0{,}0495 \rightarrow P\left(\frac{X-108}{16} \geq \frac{d-108}{16}\right) = 0{,}0495$
$\rightarrow P\left(\frac{X-108}{16} < \frac{d-108}{16}\right) = 0{,}9505 \rightarrow \frac{d-108}{16} = 1{,}65$
$\rightarrow d = 134{,}4$

e) $P(X \geq e) = 0{,}5987 \rightarrow P\left(\frac{X-108}{16} \geq \frac{e-108}{16}\right) = 0{,}5987$
$\rightarrow P\left(\frac{X-108}{16} \leq -\frac{e-108}{16}\right) = 0{,}5987 \rightarrow -\frac{e-108}{16} = 0{,}25$
$\rightarrow e = 104$

f) $P(X \leq f) = 0{,}7717 \rightarrow P\left(\frac{X-108}{16} \leq \frac{f-108}{16}\right) = 0{,}7717 \rightarrow \frac{f-108}{16} = 0{,}745 \rightarrow f = 119{,}92$

76. Halla el valor de *k* para que se verifiquen las igualdades en la distribución *N*(0, 1).

a) $P(-k < Z < k) = 0{,}8414$
b) $P(-k < Z < k) = 0{,}0398$
c) $P(-k < Z < k) = 0{,}383$
d) $P(-k < Z < k) = 0{,}4448$
e) $P(-k < Z < k) = 0{,}8664$

$P(-k < Z < k) = P(Z \leq k) - (1 - P(Z \leq k)) = 2 \cdot P(Z \leq k) - 1$

a) $P(-k < Z < k) = 0{,}8414 \rightarrow P(Z \leq k) = \frac{0{,}8414 + 1}{2} = 0{,}9207 \rightarrow k = 1{,}41$

b) $P(-k < Z < k) = 0{,}0398 \rightarrow P(Z \leq k) = \frac{0{,}0398 + 1}{2} = 0{,}5199 \rightarrow k = 0{,}05$

c) $P(-k < Z < k) = 0{,}383 \rightarrow P(Z \le k) = \frac{0{,}383 + 1}{2} = 0{,}6915 \rightarrow k = 0{,}5$

d) $P(-k < Z < k) = 0{,}4448 \rightarrow P(Z \le k) = \frac{0{,}4448 + 1}{2} = 0{,}7224 \rightarrow k = 0{,}59$

e) $P(-k < Z < k) = 0{,}8664 \rightarrow P(Z \le k) = \frac{0{,}8664 + 1}{2} = 0{,}9332 \rightarrow k = 1{,}5$

77. Determina los extremos del intervalo simétrico respecto a la media μ que contiene el porcentaje indicado de las observaciones de cada una de las distribuciones $N(\mu, \sigma)$.

a) Contiene el 90 % para $N(15, 3)$.

b) Contiene el 68 % para $N(48, 7)$.

c) Contiene el 84 % para $N(70, 15)$.

Calculamos los extremos correspondientes, $-k$ y k, para $N(0, 1)$ y los transformamos en los extremos x, y de la normal correspondiente mediante las siguientes transformaciones:

$\frac{x - \mu}{\sigma} = -k \rightarrow x = \mu - \sigma k$ $\qquad$ $\frac{y - \mu}{\sigma} = k \rightarrow x = \mu + \sigma k$

a) $P(-k < Z < k) = 0{,}9 \rightarrow P(Z \le k) = \frac{0{,}9 + 1}{2} = 0{,}95 \rightarrow k = 1{,}645$ El intervalo es [10,355; 19,935].

b) $P(-k < Z < k) = 0{,}68 \rightarrow P(Z \le k) = \frac{0{,}68 + 1}{2} = 0{,}84 \rightarrow k = 0{,}995$ El intervalo es [41,035; 54,965].

c) $P(-k < Z < k) = 0{,}84 \rightarrow P(Z \le k) = \frac{0{,}84 + 1}{2} = 0{,}92 \rightarrow k = 1{,}405$ El intervalo es [48,925; 91,075].

78. Halla el valor de k para que se cumplan las igualdades en la distribución $N(0, 1)$.

a) $P(k < Z < 2k) = 0{,}0761$

b) $P(-k < Z < 3k) = 0{,}1574$

c) $P(-2k < Z < k) = 0{,}9318$

d) $P(-5k < Z < -2k) = 0{,}1891$

a) $P(k < Z < 2k) = P(Z < 2k) - P(Z < k) = 0{,}0761 \rightarrow k = 0{,}2$

b) $P(-k < Z < 3k) = P(Z < 3k) - P(Z < -k) = P(Z < 3k) - P(Z > k) = P(Z < 3k) + P(Z < k) - 1 = 0{,}1574 \rightarrow$

$\rightarrow P(Z < 3k) + P(Z < k) = 1{,}1574 \rightarrow k = 0{,}1$

c) $P(-2k < Z < k) = P(Z < k) - P(Z < -2k) = P(Z < k) - P(Z > 2k) = P(Z < k) + P(Z < 2k) - 1 = 0{,}9318 \rightarrow$

$\rightarrow P(Z < k) + P(Z < 2k) = 1{,}9318 \rightarrow k = 1{,}5$

d) $P(-5k < Z < -2k) = P(2k < Z < 5k) = P(Z < 5k) - P(Z < 2k) = 0{,}1891 \rightarrow k = 0{,}4$

79. En la distribución $N(25, 4)$ calcula las probabilidades que aparecen a continuación.

a) $P(X < 22)$

b) $P(X \ge 27{,}3)$

c) $P(X \le 28{,}4)$

d) $P(X \ge 18{,}04)$

e) $P(24 < X \le 30)$

f) $P(20 \le X < 23)$

g) $P(21 \le X < 26)$

h) $P(26 \le X \le 27)$

a) $P(X < 22) = P\left(Z \le \frac{22 - 25}{4}\right) = P(Z \le -0{,}75) = 1 - P(Z \le 0{,}75) = 0{,}2266$

b) $P(X \ge 27{,}3) = 1 - P(X \le 27{,}3) = 1 - P(Z \le 0{,}575) = 0{,}2826$

c) $P(X \le 28{,}4) = P(Z \le 0{,}85) = 0{,}8023$

d) $P(X \geq 18{,}04) = 1 - P(X \leq 18{,}04) = 1 - P(Z \leq -1{,}74) = P(Z \leq 1{,}74) = 0{,}9591$

e) $P(24 < X \leq 30) = P(X \leq 30) - P(X \leq 24) = P(Z \leq 1{,}25) - P(Z \leq -0{,}25) = P(Z \leq 1{,}25) - (1 - P(Z \leq 0{,}25)) = 0{,}4931$

f) $P(20 \leq X < 23) = P(X \leq 23) - P(X \leq 20) = P(Z \leq -0{,}5) - P(Z \leq -1{,}25) = P(Z \leq 1{,}25) - P(Z \leq 0{,}5) = 0{,}2029$

g) $P(21 \leq X < 26) = P(X \leq 26) - P(X \leq 21) = P(Z \leq 0{,}25) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 0{,}25) - (1 - P(Z \leq 1)) = 0{,}4401$

h) $P(26 \leq X \leq 27) = P(X \leq 27) - P(X \leq 26) = P(Z \leq 0{,}5) - P(Z \leq 0{,}25) = 0{,}0928$

80. En la distribución *N*(80, 11) calcula las probabilidades que aparecen a continuación.

a) $P(X < 86)$
b) $P(X \geq 88)$
c) $P(X \leq 75)$
d) $P(X \geq 68)$
e) $P(67 < X \leq 77)$
f) $P(76 \leq X < 85)$
g) $P(70 \leq X \leq 72)$
h) $P(83 \geq X > 80)$

a) $P(X < 86) = P\left(Z \leq \frac{86 - 80}{11}\right) = P(Z \leq 0{,}55) = 0{,}7088$

b) $P(X \geq 88) = 1 - P(X \leq 88) = 1 - P(Z \leq 0{,}73) = 0{,}2327$

c) $P(X \leq 75) = P(Z \leq -0{,}45) = 1 - P(Z \leq 0{,}45) = 0{,}33$

d) $P(X \geq 68) = 1 - P(X \leq 68) = 1 - P(Z \leq -1{,}09) = P(Z \leq 1{,}09) = 0{,}8621$

e) $P(67 < X \leq 77) = P(X \leq 77) - P(X \leq 67) = P(Z \leq -0{,}27) - P(Z \leq -1{,}18) = P(Z \leq 1{,}18) - P(Z \leq 0{,}27) = 0{,}2746$

f) $P(76 \leq X < 85) = P(X \leq 85) - P(X \leq 76) = P(Z \leq 0{,}45) - P(Z \leq -0{,}36) = P(Z \leq 0{,}45) - (1 - P(Z \leq 0{,}36)) = 0{,}3142$

g) $P(70 \leq X \leq 72) = P(X \leq 72) - P(X \leq 70) = P(Z \leq -0{,}73) - P(Z \leq -0{,}91) = P(Z \leq 0{,}91) - P(Z \leq 0{,}73) = 0{,}513$

h) $P(83 \geq X > 80) = P(X \leq 83) - P(X \leq 80) = P(Z \leq 0{,}27) - P(Z \leq 0) = 0{,}1064$

81. Calcula, en cada caso, μ y σ de una distribución *N*(μ, σ) sabiendo que:

a) $P(X \leq 22) = 0{,}6915$
$P(X < 8) = 0{,}9938$

b) $P(X > 25) = 0{,}1056$
$P(X > 4{,}8) = 0{,}9332$

a) $P(X \leq 22) = P\left(Z \leq \frac{22 - \mu}{\sigma}\right) = 0{,}6915 \rightarrow \frac{22 - \mu}{\sigma} = 0{,}5 \rightarrow 0{,}5\sigma + \mu = 22$

$P(X < 8) = P\left(Z \leq \frac{8 - \mu}{\sigma}\right) = 0{,}9938 \rightarrow \frac{8 - \mu}{\sigma} = 2{,}5 \rightarrow 2{,}5\sigma + \mu = 8$

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}5\sigma + \mu = 22 \\ 2{,}5\sigma + \mu = 8 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \mu = 25{,}5 \\ \sigma = -7 \end{array}\right\}$$

b) $P(X > 25) = 1 - P(X \leq 25) = 1 - P\left(Z \leq \frac{25 - \mu}{\sigma}\right) = 0{,}1056 \rightarrow P\left(Z \leq \frac{25 - \mu}{\sigma}\right) = 0{,}8944 \rightarrow \frac{25 - \mu}{\sigma} = 1{,}25 \rightarrow 1{,}25\sigma + \mu = 25$

$P(X > 4{,}8) = 1 - P(X \leq 4{,}8) = 1 - P\left(Z \leq \frac{4{,}8 - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq -\frac{4{,}8 - \mu}{\sigma}\right) = 0{,}9332 \rightarrow -\frac{4{,}8 - \mu}{\sigma} = 1{,}5 \rightarrow -1{,}5\sigma + \mu = 4{,}8$

$$\left.\begin{array}{l} 1{,}25\sigma + \mu = 25 \\ -1{,}5\sigma + \mu = 4{,}8 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \mu = \frac{174}{11} = 15{,}8182 \\ \sigma = \frac{404}{55} = 7{,}34545 \end{array}\right\}$$

82. La talla de un grupo de personas sigue una distribución normal con una media de 165 cm y una desviación típica de 12 cm. Calcula la probabilidad de que una persona elegida al azar:

a) Mida más de 170 cm.

b) Mida menos de 168 cm.

c) Mida entre 159 y 172 cm.

a) $P(X > 170) = 1 - P(X \leq 170) = 1 - P(Z \leq 0{,}42) = 0{,}3372$

b) $P(X < 168) = P(Z \leq 0{,}25) = 0{,}5987$

c) $P(159 \leq X \leq 172) = P(X \leq 172) - P(X \leq 159) = P(Z \leq 0{,}52) - P(Z \leq -0{,}50) = P(Z \leq 0{,}52) + P(Z \leq 0{,}50) - 1 = 0{,}4116$

83. Las puntuaciones obtenidas por los alumnos de 1.º de Bachillerato en la materia de Matemáticas siguen una distribución normal, donde:

$P(X \leq 3) = 0{,}1762 \qquad P(X > 9) = 0{,}0075$

Averigua la media y la desviación típica de la distribución normal.

$$P(X \leq 3) = P\left(Z \leq \frac{3-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}1762 \to P\left(Z \leq -\frac{3-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}8238 \to -\frac{3-\mu}{\sigma} = 0{,}93 \to -0{,}93\sigma + \mu = 3$$

$$P(X > 9) = 1 - P(X \leq 9) = 1 - P\left(Z \leq \frac{9-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}0075 \to P\left(Z \leq \frac{9-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}9925 \to \frac{9-\mu}{\sigma} = 2{,}43 \to 2{,}43\sigma + \mu = 9$$

$$\left.\begin{array}{l} -0{,}93\sigma + \mu = 3 \\ 2{,}43\sigma + \mu = 9 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} \mu = \dfrac{261}{56} = 4{,}66 \\ \sigma = \dfrac{25}{14} = 1{,}79 \end{array}\right\}$$

84. Los pesos de los deportistas de un club de natación siguen una distribución con media 75 kg y desviación típica 4 kg. Calcula la probabilidad de que un deportista elegido al azar:

a) Pese menos de 72 kg pero más de 70 kg.

b) Pese entre 78 y 80 kg.

c) Pese, al menos, 81 kg.

a) $P(70 \leq X \leq 72) = P(X \leq 72) - P(X \leq 70) = P(Z \leq -0{,}75) - P(Z \leq -1{,}25) = P(Z \leq 1{,}25) - P(Z \leq 0{,}75) = 0{,}121$

b) $P(78 \leq X \leq 80) = P(X \leq 80) - P(X \leq 78) = P(Z \leq 1{,}25) - P(Z \leq 0{,}75) = 0{,}121$

c) $P(X > 81) = 1 - P(X \leq 81) = 1 - P(Z \leq 1{,}5) = 0{,}0668$

85. El peso de las lubinas de piscifactoría, medido en gramos, se distribuye según una normal *N*(900, 200). Cada día se extraen 100 ejemplares para su consumo.

a) Determina el número de lubinas que pesa más de 980 g.

b) Calcula el porcentaje de las que pesan entre 750 y 1 100 g.

c) Completa en tu cuaderno:
«Las 20 lubinas más pequeñas pesan menos de …

d) Completa en tu cuaderno:
«La cuarta parte formada por las más grandes pesan más de …

Para calcular el número de lubinas multiplicamos la probabilidad por el número de ejemplares extraídos.

a) $P(X \geq 980) = 1 - P(X \leq 980) = 1 - P(Z \leq 0{,}4) = 0{,}3446 \to 100 \cdot 0{,}3446 \approx 34$ lubinas

b) $P(750 \leq X \leq 1100) = P(X \leq 1100) - P(X \leq 750) = P(Z \leq 1) - P(Z \leq -0{,}75) =$

$= P(Z \leq 1) + P(Z \leq 0{,}75) - 1 = 0{,}6147 = 61{,}47\%$ de las lubinas

c) Las 20 lubinas más pequeñas representan la $\frac{20}{100} = 0{,}2$ parte menor de la probabilidad, por tanto, debemos encontrar un número k tal que:

$$P(X \le k) = 0{,}2 \to P(X \le k) = P\left(Z \le \frac{k-900}{200}\right) = 1 - P\left(Z \le -\frac{k-900}{200}\right) = 0{,}2 \to$$

$$\to P\left(Z \le -\frac{k-900}{200}\right) = 0{,}8 \to -\frac{k-900}{200} = 0{,}84 \to k = 732$$

«Las 20 lubinas más pequeñas pesan menos de 732 g».

d) Procedemos de forma similar al apartado anterior:

$$P(X \ge k) = \frac{1}{4} = 0{,}25 \to P(X \ge k) = 1 - P(X \le k) = 1 - P\left(Z \le \frac{k-900}{200}\right) = 0{,}25 \to$$

$$\to P\left(Z \le \frac{k-900}{200}\right) = 0{,}75 \to \frac{k-900}{200} = 0{,}675 \to k = 1035$$

«Las cuarta parte formada por las más grandes pesa más de 1 035 g».

86. El tiempo de vida de las bombillas de una empresa, medido en horas, se distribuye según una normal $N(5000, 120)$. Calcula qué porcentaje de las bombillas:

a) Durará más de 5 200 horas.
b) Durará entre 5 040 y 5 070 horas.
c) Durará entre 5 145 y 5 230 horas.

a) $P(X > 5200) = 1 - P(X \le 5200) = 1 - P(Z \le 1{,}67) = 0{,}0478 = 4{,}78\,\%$ de bombillas

b) $P(5040 \le X \le 5070) = P(X \le 5070) - P(X \le 5040) = P(Z \le 0{,}58) - P(Z \le 0{,}33) = 0{,}0896 = 8{,}96\,\%$ de las bombillas

c) $P(5145 \le X \le 5230) = P(X \le 5230) - P(X \le 5145) = P(Z \le 1{,}92) - P(Z \le 1{,}21) = 0{,}0858 = 8{,}58\,\%$ de las bombillas

87. Se sabe que el 93,7 % de las camisas de una marca se fabrican en un tiempo menor de 7 horas. Si el tiempo de fabricación se distribuye con una media de 6,5 horas, calcula la desviación típica.

X = «Tiempo de fabricación de una camisa» $\equiv N(6{,}5;\ \sigma)$

$$P(X \le 7) = 93{,}70\% = 0{,}937 \to P(X \le 7) = P\left(Z \le \frac{7-6{,}5}{\sigma}\right) = 0{,}937 \to \frac{0{,}5}{\sigma} = 1{,}53 \to \sigma = 0{,}327 \to X \equiv N(6{,}5;\ 0{,}327)$$

88. En una ciudad la temperatura máxima en el mes de julio sigue una distribución normal de media 32 °C y una desviación típica de 4 °C. Calcula cuántos días se superan los 37 °C y cuántos no se superan los 35 °C.

Para calcular el número de días multiplicamos la probabilidad por el número total de días del año.

$P(X \ge 37) = 1 - P(X \le 37) = 1 - P(Z \le 1{,}25) = 0{,}1056 \to 0{,}1056 \cdot 365 = 38{,}544 \approx 39$ días al año se superan los 37º.

$P(X \le 35) = P(Z \le 0{,}75) = 0{,}7734 \to 0{,}7734 \cdot 365 = 282{,}291 \approx 282$ días al año no se superan los 35 ºC.

89. El peso de las manzanas se distribuye normalmente con una media de 175 g y una desviación típica de 25 g. Un almacenista ha comprado 15 000 kg de manzanas.

a) ¿Qué cantidad de manzanas espera que pesen menos de 168 g?
b) ¿Qué porcentaje pesará entre 170 y 180 g?
c) Si quiere hacer dos grupos, uno con las que pesan menos de 160 g y otro con el resto, ¿cuántos kilos habrá en cada grupo?
d) Si, por el contrario, uno de los grupos está formado por la cuarta parte de manzanas más pesadas, ¿a partir de qué peso hará la separación?

Para calcular el número de manzanas multiplicamos la probabilidad por el número de kilos comprados.

a) $P(X \le 168) = P(Z \le -0{,}28) = 1 - P(Z \le 0{,}28) = 0{,}3897 \rightarrow 0{,}3897 \cdot 15000 = 5845$ kg de manzanas.

b) $P(170 \le X \le 180) = P(X \le 180) - P(X \le 170) = P(Z \le 0{,}2) - P(Z \le -0{,}2) =$

$= P(Z \le 0{,}2) + P(Z \le 0{,}2) - 1 = 0{,}1585 \rightarrow 0{,}1585 \cdot 15\,000 = 2\,377{,}5$ kg de manzanas.

c) $P(X \le 160) = P(Z \le -0{,}6) = 1 - P(Z \le 0{,}6) = 0{,}2743 \rightarrow 0{,}2743 \cdot 15\,000 = 4\,114{,}5$ kg de manzanas de menos de 160 g.

$15\,000 - 4\,114{,}5 = 10\,885{,}5$ kg de manzanas de más de 160 g.

d) El peso, k, debe cumplir:

$$P(X \ge k) = \frac{1}{4} = 0{,}25 \rightarrow P(X \ge k) = 1 - P(X \le k) = 1 - P\left(Z \le \frac{k-175}{25}\right) = 0{,}25 \rightarrow$$

$$\rightarrow P\left(Z \le \frac{k-175}{25}\right) = 0{,}75 \rightarrow \frac{k-175}{25} = 0{,}675 \rightarrow k = 191{,}875 \text{ g será el peso de separación.}$$

90. Una máquina que fabrica discos compactos consigue fabricar un 90 % de unidades sin error. Si escogemos al azar 100 discos de ellos, calcula las siguientes probabilidades.

a) Que haya dos defectuosos.
b) Que haya más de uno defectuoso.

Sea X = «Cuántos discos son defectuosos de los 100 escogidos al azar» $\longrightarrow X \equiv B(100; 0{,}1)$

$$\left.\begin{array}{l} 100 \cdot 0{,}1 = 10 > 5 \\ 100 \cdot 0{,}9 = 90 > 5 \end{array}\right\} \rightarrow X \equiv B(100; 0{,}1) \approx N(10; 3)$$

a) $P\left(2 - \frac{1}{2} \le X \le 2 + \frac{1}{2}\right) = P(X \le 2{,}5) - P(X \le 1{,}5) = P(Z \le -2{,}5) - P(Z \le -2{,}83) = P(Z \le 2{,}83) - P(Z \le 2{,}5) = 0{,}0039$

b) $P(X > 1) = 1 - P(X \le 1) = 1 - P(Z \le -3) = P(Z \le 3) = 0{,}9987$

91. Un examen tipo test consta de 50 preguntas con tres posibles respuestas, siendo solamente una de ellas correcta. Si se realiza el examen respondiendo al azar, calcula.

a) La probabilidad de que se responda correctamente a más de 4 preguntas.
b) La probabilidad de que se responda correctamente a menos de 10 preguntas.
c) La probabilidad de que se apruebe el examen (para ello se debe responder correctamente a 25 o más preguntas).

$P(\text{Acertar una pregunta}) = \frac{1}{3}$

Sea X = «Cuántas preguntas se han respondido correctamente de las 50» $\longrightarrow X \equiv B\left(50; \frac{1}{3}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} 50 \cdot \frac{1}{3} = 16{,}67 > 5 \\ 50 \cdot \frac{2}{3} = 33{,}67 > 5 \end{array}\right\} \rightarrow X \equiv B\left(50; \frac{1}{3}\right) \approx N\left(\frac{50}{3}; \frac{10}{3}\right)$$

a) $P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - P(Z \leq -3{,}80) = P(Z \leq 3{,}80) = 0{,}9999$

b) $P(X < 10) = P(Z \leq -2) = 1 - P(Z \leq 2) = 0{,}0228$

c) $P(X \geq 25) = 1 - P(X \leq 25) = 1 - P(Z \leq 2{,}50) = 0{,}0062$

92. En un laboratorio de análisis clínicos saben que el 70 % de las pruebas de anemia que realizan resultan negativas. Si han recibido 60 muestras para analizar, responde.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya menos de 5 personas a las que les dé positivo?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la prueba resulte positiva a una persona o más?

Sea X = «Cuántas pruebas dan positivas de las 60» $\rightarrow X \equiv B(60; 0{,}3)$

$$\left.\begin{array}{l} 60 \cdot 0{,}3 = 18 > 5 \\ 60 \cdot 0{,}7 = 42 > 5 \end{array}\right\} \rightarrow X \equiv B(60; 0{,}3) \approx N(18; 3{,}55)$$

a) $P(X < 5) = P(Z \leq -3{,}66) = 1 - P(Z \leq 3{,}66) = 0{,}0001$

b) $P(X \geq 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(Z \leq -4{,}79) = P(Z \leq 4{,}79) \approx 1$

93. Se está experimentando una nueva vacuna para la malaria que resulta efectiva en el 60 % de los casos. Si se eligen al azar 200 personas, halla las siguientes probabilidades.

a) Que en ese grupo la vacuna sea efectiva para 30 personas.
b) Que la vacuna sea efectiva para más de 80 pero menos de 120 personas.
c) Que la vacuna sea efectiva en 90 o menos personas.

Sea X = «Cuántas vacunaciones son efectivas de las 200 realizadas» $\rightarrow X \equiv B(200; 0{,}6)$

$$\left.\begin{array}{l} 200 \cdot 0{,}6 = 333{,}33 > 5 \\ 200 \cdot 0{,}4 = 80 > 5 \end{array}\right\} \rightarrow X \equiv B(200; 0{,}6) \approx N(120; 6{,}93)$$

a) $P\left(30 - \frac{1}{2} \leq X \leq 30 + \frac{1}{2}\right) = P(X \leq 30{,}5) - P(X \leq 29{,}5) = P(Z \leq -12{,}91) - P(Z \leq -13{,}06) = P(Z \leq 13{,}06) - P(Z \leq 12{,}91) \approx 0$

b) $P(80 \leq X \leq 120) = P(X \leq 120) - P(X \leq 80) = P(Z \leq 0) - P(Z \leq -5{,}77) = P(Z \leq 5{,}77) - P(Z \leq 0) = 0{,}5$

c) $P(X \leq 90) = P(Z \leq -4{,}33) = 1 - P(Z \leq 4{,}33) \approx 1$

94. Las compañías de seguros han calculado que 1 de cada 5 vehículos tiene un accidente al año. Si se toman al azar 40 vehículos, determina.

a) La probabilidad de que ese año 10 de ellos tengan un accidente.
b) La probabilidad de que sean entre 10 y 12 vehículos, ambos números incluidos.
c) ¿Cuál es la probabilidad de que ese año se accidenten más de 15 vehículos?

$X \equiv B(40; 0{,}2)$

$$\left.\begin{array}{l} np = 8 > 5 \\ n(1 - p) = 6{,}4 > 5 \end{array}\right\} \rightarrow X \equiv B(40; 0{,}2) \approx N(8; 2{,}53)$$

a) $P(X = 10) = P(9{,}5 < X < 10{,}5) = P\left(\frac{9{,}5 - 8}{2{,}53} < \frac{X - 8}{2{,}53} < \frac{10{,}5 - 8}{2{,}53}\right) =$
$= P(0{,}59 < Z < 0{,}98) = P(Z < 0{,}98) - P(Z < 0{,}59) =$
$= 0{,}8365 - 0{,}7224 = 0{,}1141$

b) $P(10 \le X \le 12) = P\left(\dfrac{10-8}{2,53} \le \dfrac{X-8}{2,53} \le \dfrac{12-8}{2,53}\right) = P(0,79 \le Z \le 1,58) =$
$= P(Z \le 1,58) - P(Z \le 0,79) = 0,9429 - 0,7852 = 0,1577$

c) $P(X > 15) = P\left(\dfrac{X-8}{2,53} > \dfrac{15-8}{2,53}\right) = P(Z > 2,76) = 1 - P(Z \le 2,76) =$
$= 1 - 0,9971 = 0,0029$

95. **Un fabricante de correas para relojes ha estudiado que el contorno de la muñeca de los varones sigue una distribución normal cuya media es 20,5 cm y la desviación típica es 1,5 cm.**

a) ¿Qué porcentaje de la población tiene un contorno de muñeca de más de 23 cm?
b) Si se fabrican correas que midan entre 17 y 22 cm, ¿qué porcentaje de la población podrá usarlas?
c) Se pretende reducir costes fabricando menos variedad de longitudes de correas.
Encuentra un intervalo $(20,5 - a; 20,5 + a)$ en el que se incluya el 95 % de los varones.

a) $P(X > 23) = P\left(\dfrac{X-20,5}{1,5} > \dfrac{23-20,5}{1,5}\right) = P(Z > 1,67) = 1 - P(Z \le 1,67) =$
$= 1 - 0,9525 = 0,0475$

El 4,75 % de la población tiene un contorno de muñeca de más de 23 cm.

b) $P(17 < X < 22) = P\left(\dfrac{17-20,5}{1,5} < \dfrac{X-20,5}{1,5} < \dfrac{22-20,5}{1,5}\right) = P(-2,33 < Z < 1) =$
$= P(Z < 1) - (1 - P(Z < 2,33)) = 0,8413 - 1 + 0,9901 = 0,8314$

Estas correas podrá usarlas el 83,14 % de la población.

c) $P(20,5 - a < X < 20,5 + a) = 0,95$

$\rightarrow P\left(\dfrac{20,5 - a - 20,5}{1,5} < \dfrac{X-20,5}{1,5} < \dfrac{20,5 + a - 20,5}{1,5}\right) =$

$= P\left(-\dfrac{a}{1,5} < Z < \dfrac{a}{1,5}\right) = P\left(Z < \dfrac{a}{1,5}\right) - \left(1 - P\left(Z < \dfrac{a}{1,5}\right)\right) =$

$= 2P\left(Z < \dfrac{a}{1,5}\right) - 1 = 0,95 \rightarrow P\left(Z < \dfrac{a}{1,5}\right) = 0,975 \rightarrow \dfrac{a}{1,5} = 1,96 \rightarrow a = 2,94$

El intervalo en el que se encuentra el 95 % de los varones es (17,56; 23,44).

96. **Solo el 10 % de los boletos de una tómbola tienen premio. ¿Qué es más fácil, tener dos premios comprando 10 boletos o conseguir un premio comprando 3 boletos?**

Si se compran 10 boletos: $P(X = 2) = \dbinom{10}{2} \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^8 = 0,1937$

Si se compran 3 boletos: $P(X = 1) = \dbinom{3}{1} \cdot 0,1^1 \cdot 0,9^2 = 0,243$

Así, es más probable conseguir un premio comprando 3 boletos.

97. **Escoge, entre los juegos a) y b), el que tengas mayor probabilidad de ganar.**

a) Se lanzan 2 dados y si la suma es mayor que 9 ganas.
b) Se lanzan 10 monedas y ganas si salen más de 6 caras.

a) $P(\text{suma mayor que 9 al lanzar dos dados}) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6} = 0,1667$

b) $X \equiv B(10; 0,5)$

$P(X > 6) = P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) = \dbinom{10}{7} \cdot 0,5^7 \cdot 0,5^3 +$
$+ \dbinom{10}{8} \cdot 0,5^8 \cdot 0,5^2 + \dbinom{10}{9} \cdot 0,5^9 \cdot 0,5^1 + \dbinom{10}{10} \cdot 0,5^{10} \cdot 0,5^0 = 0,1718$

En el juego b) se tiene mayor probabilidad de ganar.

98. **Se sabe que el 98,61 % de los tornillos fabricados por una empresa tiene un diámetro menor que 3,398 mm. Si el diámetro de los tornillos se distribuye según una normal de media 3,2 mm, determina la desviación típica.**

$$P(X < 3{,}398) = 0{,}9861 \to P\left(\frac{X - 3{,}2}{\sigma} < \frac{3{,}398 - 3{,}2}{\sigma}\right) = 0{,}9861$$

$$\to P\left(Z < \frac{0{,}198}{\sigma}\right) = 0{,}9861 \to \frac{0{,}198}{\sigma} = 2{,}2 \to \sigma = 0{,}09$$

99. **La distribución de edades de los miembros de una asociación sigue una ley normal $N(\mu, \sigma)$. Sabiendo que el 94,52 % tiene menos de 32 años, y un 21,19 % tiene menos de 20 años, calcula su media y su desviación típica.**

$$P(X < 32) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{32 - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{32 - \mu}{\sigma}\right) = 0{,}9452 \to \frac{32 - \mu}{\sigma} = 1{,}6$$

$$\to 32 - \mu = 1{,}6\sigma$$

$$P(X < 20) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{20 - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{20 - \mu}{\sigma}\right) = 0{,}2119$$

$$\to P\left(Z < -\frac{20 - \mu}{\sigma}\right) = 0{,}7881 \to -\frac{20 - \mu}{\sigma} = 0{,}8 \to 20 - \mu = -0{,}8\sigma$$

$$\left.\begin{array}{l} 32 - \mu = 1{,}6\sigma \\ 20 - \mu = -0{,}8\sigma \end{array}\right\} \begin{array}{l} \mu = 24 \\ \sigma = 5 \end{array}$$

100. **Dos amigos están jugando al parchís. Uno de ellos asegura que ha tirado el dado 30 veces y no le ha salido ningún 5. El otro amigo afirma que eso es imposible. ¿Es realmente imposible? ¿Cuál es la probabilidad de que eso suceda?**

No es imposible, porque la probabilidad no puede asegurar el resultado de los lanzamientos.

$$X \equiv B\left(30, \frac{1}{6}\right) \qquad P(X = 0) = \binom{30}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{30} = 0{,}0042$$

101. **En un instituto se han comprado 150 ordenadores para 4 aulas de informática. La duración de la batería permite tener una media de trabajo de 180 minutos, con una desviación típica de 25 minutos.**

a) Calcula la probabilidad de que la batería de uno de los ordenadores solo dure 2 horas.

b) ¿Cuántos ordenadores tendrán una batería cuya carga dure más de 200 minutos?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que 110 de esos ordenadores sigan trabajando a los 180 minutos?

$X \equiv N(180, 25)$

a) $$P(X \leq 120) = P\left(\frac{X - 180}{25} \leq \frac{120 - 180}{25}\right) = P(Z \leq -2{,}4) = 1 - P(Z < 2{,}4) =$$
$$= 1 - 0{,}9918 = 0{,}0082$$

b) $$P(X > 200) = P\left(\frac{X - 180}{25} > \frac{200 - 180}{25}\right) = P(Z > 0{,}8) = 1 - P(Z \leq 0{,}8) =$$
$$= 1 - 0{,}7881 = 0{,}2119$$

Como $0{,}2119 \cdot 150 = 31{,}785$; en 31 ordenadores la carga de la batería durará más de 200 minutos.

c) $P(X \geq 180) = P\left(\frac{X-180}{25} \geq \frac{180-180}{25}\right) = P(Z \geq 0) = 1 - P(Z < 0) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

$Y \equiv B(150; 0{,}5)$

$$\left.\begin{array}{l} np = 75 > 5 \\ n(1-p) = 75 > 5 \end{array}\right\} \rightarrow Y \equiv B(150; 0{,}5) \approx N(75; 6{,}12)$$

$$P(Y = 110) = P(109{,}5 < Y < 110{,}5) = P\left(\frac{109{,}5-75}{6{,}12} < \frac{Y-75}{6{,}12} < \frac{110{,}5-75}{6{,}12}\right) =$$
$$= P(5{,}62 < Z < 5{,}8) = P(Z < 5{,}8) - P(Z < 5{,}62) = 1 - 1 = 0$$

102. El peso de los recién nacidos se distribuye según una distribución normal de media μ y desviación típica σ. Si los últimos datos publicados aseguran que los percentiles 75 y 90 de esta distribución son 3,2 y 3,5 kg, respectivamente:

a) Calcula la probabilidad de que un recién nacido pese menos de 2,5 kg.

b) Halla la probabilidad de que un recién nacido pese más de 4 kg.

c) ¿Cuál es el percentil 10?

d) Determina la mediana de la distribución.

$$P(X < 3{,}2) = 0{,}75 \rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{3{,}2-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{3{,}2-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}75 \rightarrow \frac{3{,}2-\mu}{\sigma} = 0{,}68$$

$$P(X < 3{,}5) = 0{,}9 \rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{3{,}5-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{3{,}5-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}9 \rightarrow \frac{3{,}5-\mu}{\sigma} = 1{,}29$$

$$\left.\begin{array}{l} 3{,}2 - \mu = 0{,}68\sigma \\ 3{,}5 - \mu = 1{,}29\sigma \end{array}\right\} \begin{array}{l} \mu = 2{,}86 \\ \sigma = 0{,}49 \end{array}$$

a) $P(X < 2{,}5) = P\left(\frac{X-2{,}86}{0{,}49} < \frac{2{,}5-2{,}86}{0{,}49}\right) = P(Z < -0{,}73) = 1 - P(Z \leq 0{,}73) =$
$= 1 - 0{,}7673 = 0{,}2327$

b) $P(X > 4) = P\left(\frac{X-2{,}86}{0{,}49} > \frac{4-2{,}86}{0{,}49}\right) = P(Z > 2{,}32) = 1 - P(Z \leq 2{,}32) =$
$= 1 - 0{,}9898 = 0{,}0102$

c) $P(X < a) = 0{,}1 \rightarrow P\left(\frac{X-2{,}86}{0{,}49} < \frac{a-2{,}86}{0{,}49}\right) = P\left(Z < \frac{a-2{,}86}{0{,}49}\right) = 0{,}1$
$\rightarrow P\left(Z \leq -\frac{a-2{,}86}{0{,}49}\right) = 0{,}9 \rightarrow -\frac{a-2{,}86}{0{,}49} = 1{,}29 \rightarrow a = 2{,}23$

d) $P(X \leq M) = 0{,}5 \rightarrow P\left(\frac{X-2{,}86}{0{,}49} \leq \frac{M-2{,}86}{0{,}49}\right) = P\left(Z \leq \frac{M-2{,}86}{0{,}49}\right) = 0{,}5$
$\rightarrow \frac{M-2{,}86}{0{,}49} = 0 \rightarrow M = 2{,}86$

103. El sueldo de los trabajadores de una empresa sigue una distribución normal de media 1 500 €. Si el sueldo de un técnico de categoría 3 es de 960 €, y el 75 % de los trabajadores de la empresa cobra más que él:

a) Calcula la probabilidad de que el sueldo de un empleado escogido al azar sea superior a 1 600 €.

b) El sueldo más elevado es el de los directivos. Si estos representan el 5% de los empleados de la empresa, ¿cuál es su sueldo mínimo?

$$P(X > 960) = 0{,}75 \rightarrow P\left(\frac{X-1\,500}{\sigma} > \frac{960-1\,500}{\sigma}\right) = P\left(Z > -\frac{540}{\sigma}\right) =$$
$$= P\left(Z < \frac{540}{\sigma}\right) = 0{,}75 \rightarrow \frac{540}{\sigma} = 0{,}68 \rightarrow \sigma = 794{,}12$$

a) $P(X > 1\,600) = P\left(\frac{X - 1\,500}{794{,}12} > \frac{1\,600 - 1\,500}{794{,}12}\right) = P(Z > 0{,}13) = 1 - P(Z \leq 0{,}13) =$
$= 1 - 0{,}5517 = 0{,}4483$

b) $P(X \geq a) = 0{,}05 \rightarrow P\left(\frac{X - 1\,500}{794{,}12} \geq \frac{a - 1.500}{794{,}12}\right) = P\left(Z \geq \frac{a - 1\,500}{794{,}12}\right) = 0{,}05$
$\rightarrow P\left(Z < \frac{a - 1\,500}{794{,}12}\right) = 0{,}95 \rightarrow \frac{a - 1\,500}{794{,}12} = 1{,}65 \rightarrow a = 2\,810{,}29$

El sueldo mínimo de los directivos es de 2 810,29 euros.

104. En una granja de gallinas se clasifican los huevos por su peso, en gramos, según las categorías incluidas en la tabla.

Categoría	S	M	L	XL
Peso	< 53	[53, 63)	[63, 73)	≥ 73

El peso de los huevos de las gallinas de esa granja sigue una distribución $N(62, 8)$. Calcula los porcentajes de huevos que se obtienen de cada categoría.

$P(X < 53) = P\left(\frac{X - 62}{8} < \frac{53 - 62}{8}\right) = P(Z < -1{,}125) = 1 - P(Z \leq 1{,}125) =$
$= 1 - 0{,}8697 = 0{,}1303$

$P(53 \leq X < 63) = P\left(\frac{53 - 62}{8} \leq \frac{X - 62}{8} < \frac{63 - 62}{8}\right) = P(-1{,}125 \leq Z < 0{,}125) =$
$= P(Z < 0{,}125) - (1 - P(Z \leq 1{,}125)) = 0{,}5497 - 1 + 0{,}8697 = 0{,}4194$

$P(63 \leq X < 73) = P\left(\frac{63 - 62}{8} \leq \frac{X - 62}{8} < \frac{73 - 62}{8}\right) = P(0{,}125 \leq Z < 1{,}375) =$
$= P(Z < 1{,}375) - P(Z \leq 0{,}125) = 0{,}9154 - 0{,}5497 = 0{,}3657$

$P(X \geq 73) = P\left(\frac{X - 62}{8} \geq \frac{73 - 62}{8}\right) = P(Z \geq 1{,}375) = 1 - P(Z < 1{,}375) =$
$= 1 - 0{,}9154 = 0{,}0846$

Hay un 13,03 % de huevos de tamaño S; un 41,94 % de tamaño M; un 36,57 % de tamaño L; y un 8,46 % de tamaño XL.

PARA PROFUNDIZAR

105. Elige la respuesta adecuada. (Concurso de Primavera)

Una moneda está trucada de forma que la probabilidad de obtener cara al lanzarla es menor que $\frac{1}{2}$. Si la probabilidad de obtener igual número de caras que de cruces al lanzarla 4 veces es $\frac{1}{6}$, ¿cuál es la probabilidad de obtener cara?	$\frac{\sqrt{15} - 3}{6}$	$\frac{6 - \sqrt{6\sqrt{6} + 2}}{12}$	$\frac{\sqrt{2} - 1}{2}$	$\frac{3 - \sqrt{3}}{6}$	$\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$
En una caja hay 1 001 bolas blancas y 1 001 bolas negras. Si P_1 es la probabilidad de que al coger dos bolas sean del mismo color, y P_2 es la probabilidad de que sean de diferente color, $P_2 - P_1$ es igual a:	0	$\frac{1}{2\,002}$	$\frac{1}{2\,001}$	$\frac{2}{2\,001}$	$\frac{1}{1\,000}$
En una clase de 25 estudiantes hay 7 zurdos. Si elegimos al azar 2 estudiantes, ¿cuál es la probabilidad de que ambos sean zurdos?	$\frac{7}{15}$	$\frac{21}{50}$	$\frac{7}{100}$	$\frac{18}{25}$	$\frac{7}{25}$
Lanzamos al aire 5 veces una moneda. ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos 2 caras?	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{37}{32}$

□ Sea X = «Número de caras al lanzar la moneda 4 veces» $\longrightarrow X \equiv B(4; p)$

$$P(X=2)=\binom{4}{2}p^2(1-p)^2=\frac{1}{6}\rightarrow 36p^2(1-p)=1\rightarrow\sqrt{36p^2(1-p)^2}=\sqrt{1}\rightarrow 6p(1-p)=\pm1\rightarrow$$

$$\rightarrow -6p+6p\pm1=0\rightarrow\begin{cases} p=\dfrac{-6\pm\sqrt{36-24}}{-12}=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{6} \\ p=\dfrac{-6\pm\sqrt{36+24}}{-12}=\dfrac{3\pm\sqrt{15}}{6}\end{cases}$$

La única solución con $0<p<\frac{1}{2}$ es $p=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$.

□ En la primera elección podemos sacar cualquier bola. Es en la segunda donde hay diferencia:

$$P_1=1\cdot\frac{1000}{2\,001}\qquad P_2=1\cdot\frac{1001}{2\,001}\qquad P_2-P_1=\frac{1001}{2\,001}-\frac{1000}{2\,001}=\frac{1}{2\,001}$$

□ $P(\text{Elegir dos zurdos})=\frac{7}{25}\cdot\frac{6}{24}=\frac{7}{100}$

□ $X\equiv B(5;0,5)\rightarrow P(X\ge 2)=1-P(X<2)=1-\left[\binom{5}{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5+\binom{5}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\right]=1-\left[\frac{6}{32}\right]=\frac{13}{16}$

106. **La probabilidad de que un reloj sea defectuoso es del 4 %. Halla la probabilidad de que en un lote de 1 000 relojes haya menos de 10 defectuosos.**

Sea X = «Cuántos relojes están defectuosos de los 1 000» $\longrightarrow X\equiv B(1000; 0,04)$

$$\left.\begin{array}{l}1000\cdot 0,04=40>5\\ 1000\cdot 0,96=960>5\end{array}\right\}\rightarrow X\equiv B(1000;0,04)\approx N(40;6,2)$$

$$P(X<10)=P(Z\le -4,84)=1-P(Z\le 4,84)\approx 0$$

107. **En una distribución normal, el 3 % de los valores es inferior a 19 y el 5 % es superior a 28,6. Calcula $P(X<18)$.**

$$P(X<19)=P\left(Z\le\frac{19-\mu}{\sigma}\right)=0,03\rightarrow P\left(Z\le-\frac{19-\mu}{\sigma}\right)=0,97\rightarrow -\frac{19-\mu}{\sigma}=1,88\rightarrow -1,88\sigma+\mu=19$$

$$P(X>28,6)=1-P(X\le 28,6)=1-P\left(Z\le\frac{28,6-\mu}{\sigma}\right)=0,05\rightarrow P\left(Z\le-\frac{28,6-\mu}{\sigma}\right)=0,95\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{28,6-\mu}{\sigma}=1,645\rightarrow 1,645\sigma+\mu=28,6$$

$$\left.\begin{array}{l}-1,88\sigma+\mu=19\\ 1,645\sigma+\mu=28,6\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}\mu=\dfrac{603}{25}=24,12\\ \sigma=\dfrac{128}{47}=2,72\end{array}\right\}\rightarrow X\equiv N(24,12;2,72)$$

$$P(X<18)=P(Z\le -2,25)=1-P(Z\le 2,25)=0,0122$$

108. **Las bolas para un rodamiento se someten a un control de calidad consistente en eliminar las que pasan por un orificio de diámetro d y las que no pasan por otro orificio de diámetro D, con $d<D$. Calcula la probabilidad de eliminar una bola sabiendo que la media de su diámetro sigue esta distribución normal.**

$$N\left(\frac{D+d}{2};0,3\cdot(D-d)\right)$$

$P(\text{Eliminar una bola}) = P(X < d) + P(X > D)$

$$P(X < d) = P\left(Z \le \frac{d - \frac{D+d}{2}}{0{,}3(D-d)}\right) = P\left(Z \le \frac{d-D}{2\cdot 0{,}3(D-d)}\right) = P\left(Z \le -\frac{1}{0{,}6}\right) = 1 - P(Z \le 1{,}67) = 0{,}0475$$

$$P(X > D) = P\left(Z > \frac{D - \frac{D+d}{2}}{0{,}3(D-d)}\right) = P\left(Z > \frac{D-d}{2\cdot 0{,}3(D-d)}\right) = P\left(Z > \frac{1}{0{,}6}\right) = 1 - P(Z \le 1{,}67) = 0{,}0475$$

$P(\text{Eliminar una bola}) = P(X < d) + P(X > D) = 0{,}095$

109. La frecuencia de acierto en el lanzamiento de triples de un jugador de baloncesto en los últimos treinta partidos es del 60 %. ¿Cuántas veces deberá lanzar a canasta para que, con una probabilidad del 90 %, como mínimo, haga triple por lo menos una vez?

(Premio Extraordinario de Bachillerato)

Si se supone que hace n lanzamientos, la probabilidad de no acertar en ninguno de ellos es $0{,}4^n$.
El suceso contrario es encestar por lo menos una vez, y su probabilidad es $1 - 0{,}4^n$.

Debe verificarse que: $1 - 0{,}4^n \ge 0{,}9 \quad \rightarrow \quad n \ge \dfrac{\log 0{,}1}{\log 0{,}4} \simeq 2{,}51$

Tiene que realizar 3 lanzamientos para que la probabilidad sea, como mínimo, del 90 %.

110. Una urna contiene los votos para la elección de dos candidatos, A y B. Se sabe que el candidato A cuenta con 6 votos y el candidato B cuenta con 9 votos. Halla la probabilidad de que, al efectuar el escrutinio, siempre vaya ganando el candidato B.

(Olimpiada de Bachillerato. Fase Nacional)

El número de casos es una combinación de 15 elementos, tomados de 6 en 6:

$$C_{15,\,6} = 5\,005$$

Los casos favorables se dan cuando el primer y segundo votos corresponden al candidato B, el tercero a B o a A, es decir, BBB o BBA, el cuarto a $BBBB$, $BBBA$ o $BBAB$, y así sucesivamente.

B

BB

BBB BBA

BBBB BBBA BBAB

BBBBB BBBBA BBBAB BBBAA BBABB BBABA

BBBBBB BBBBBA BBBBAB BBBBAA BBBABB BBBABA BBBAAB BBABBB BBABBA BBABAB

Podemos formar una tabla donde en cada casilla figuran los casos favorables, y que se pueden obtener, sumando en cada caso la cifra que aparece en la casilla situada a su izquierda más la que aparece en la casilla inmediata superior.

B/A	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	–	–	–	–	–	–
2	1	–	–	–	–	–	–
3	1	2	2	–	–	–	–
4	1	3	5	5	–	–	–
5	1	4	9	14	14	–	–
6	1	5	14	28	42	42	–
7	1	6	20	48	90	132	132
8	1	7	27	75	165	297	429
9	1	8	35	110	275	572	1 001

La probabilidad es: $P = \dfrac{1\,001}{5\,005} = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. **¿En qué consiste el control de calidad?**

   Un proceso de calidad consiste en extraer de forma aleatoria una muestra de tornillos de cada partida de elementos fabricados, comprobar si dichos elementos cumplen los estándares y se extrapolar los resultados obtenidos a toda la partida. Si la muestra ofrece por término medio unos datos incorrectos, se retira toda la partida y se vuelve a calibrar el proceso de fabricación.

2. **¿Qué distribución estadística aparece en el texto?**

   Una distribución normal.

3. **¿Cuál es la varianza de la distribución que aparece en el texto?**

   $\sigma^2 = 0{,}04$

4. **Si consideramos que un tornillo es defectuoso cuando mide menos de 34,5 mm o más de 35,5 mm, describe la variable estadística que cuenta el número de tornillos defectuosos de una muestra de *n* tornillos.**

   $X =$ «Cuántos tornillos están defectuosos de una muestra de *n*». $Y =$ «Medida de un tornillo».

   $X \equiv B(n;\, p)$, donde $p = P(Y < 34{,}5) + P(Y > 35{,}5)$

5. **¿Cuál es la probabilidad de que, cuando se elige un tornillo al azar, este resulte defectuoso?**

   Con los datos del texto, tendríamos:

   $p = P(Y < 34{,}5) + P(Y > 35{,}5) = P(Z \leq -2{,}5) + P(Z > 2{,}5) = 1 - P(Z \leq 2{,}5) + 1 - P(Z \leq 2{,}5) = 0{,}0124$

6. **¿Cuántos tornillos defectuosos se espera encontrar en una muestra de 1 000 tornillos cuando la máquina que los fabrica está bien reglada?**

   $X \equiv B(1\,000;\, 0{,}0124) \rightarrow \mu = 12{,}4 \approx 12$ tornillos defectuosos.

7. **¿Qué probabilidad hay de que un tornillo tenga una medida que esté comprendida entre 34,9 y 35,1 mm?**

   $P(34{,}9 \leq X \leq 35{,}1) = P(X \leq 35{,}1) - P(X \leq 34{,}9) = P(Z \leq 0{,}5) - P(Z \leq -0{,}5) = 2 \cdot P(Z \leq 0{,}5) - 1 = 0{,}3829$

8. **Si el máximo número de tornillos defectuosos en una muestra fuera del 1 %, ¿cuáles serían las medidas mínima y máxima para ser considerados correctos?**

   Sea *k* la medida desde la media de los tornillos.

   $P(35 - k \leq X \leq 35 + k) = 1 - 0{,}01 = 0{,}99 \rightarrow 2 \cdot P(X \leq 35 + k) - 1 = 0{,}99 \rightarrow P(X \leq 35 + k) = 0{,}995 \rightarrow$

   $\rightarrow P\left(Z \leq \dfrac{35 + k - 35}{0{,}2}\right) = P\left(Z \leq \dfrac{k}{0{,}2}\right) = 0{,}995 \rightarrow \dfrac{k}{0{,}2} = 2{,}575 \rightarrow k = 0{,}515$ mm

   Las medidas máxima y mínima serían, respectivamente, 35,515 y 34,485 mm.