12

Integrales

ACTIVIDADES

1. **Señala las funciones cuya función primitiva es $F(x) = \frac{3x^2}{10} + \frac{x}{3} + k$.**

a) $f_1(x) = \frac{3x}{5} + \frac{1}{6}$ b) $f_2(x) = \frac{3x}{5} + \frac{1}{3}$ c) $f_3(x) = \frac{3x+5}{15}$

$$F'(x) = \frac{6x}{10} + \frac{1}{3} = \frac{3x}{5} + \frac{1}{3}$$

$F(x)$ es función primitiva de b).

2. **Escribe cuatro primitivas para la función $f(x) = x^2 - x + 2$.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x + k$ para $k = 1, 2, 3$ y 4

3. **La función $F(x) = k \cdot e^{3x} + n$ es una función primitiva de la función $f(x) = e^{3x}$. Halla los valores de las constantes k y n si $F(0) = 0$.**

$$F'(x) = 3ke^{3x} = e^{3x} \rightarrow k = \frac{1}{3} \qquad F(0) = \frac{1}{3}e^0 + n = 0 \rightarrow n = -\frac{1}{3}$$

4. **Considera estas derivadas.**

$$[x^2]' = 2x \rightarrow \int 2x\,dx = x^2 + k$$

$$[x^3]' = 3x^2 \rightarrow \int 3x^2\,dx = x^3 + k$$

Aplica las propiedades de la integral y calcula.

a) $\int x\,dx$ b) $\int x^2\,dx$ c) $\int 4x\,dx$ d) $\int (x + x^2)dx$

a) $\left[\frac{x^2}{2}\right]' = \frac{2x}{2} = x \rightarrow \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + k$

b) $\left[\frac{x^3}{3}\right]' = \frac{3x^2}{3} = x^2 \rightarrow \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + k$

c) $\int 4x\,dx = 4\int x\,dx = 4\frac{x^2}{2} + k = 2x^2 + k$

d) $\int (x + x^2)dx = \int x\,dx + \int x^2\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + k$

5. **A partir de estas derivadas:**

$$[\cos x]' = -\operatorname{sen} x \rightarrow \int (-\operatorname{sen} x)\,dx = \cos x + k$$

$$[\operatorname{sen} x]' = \cos x \rightarrow \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + k$$

Halla las siguientes integrales.

a) $\int \operatorname{sen} x\,dx$

b) $\int (3 \operatorname{sen} x + \cos x)\,dx$

a) $[-\cos x]' = \operatorname{sen} x \rightarrow \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + k$

b) $\int (3 \operatorname{sen} x + \cos x)\,dx = 3\int \operatorname{sen} x\,dx + \int \cos x\,dx = -3\cos x + \operatorname{sen} x + k$

6. **Resuelve estas integrales.**

a) $\int (x^2 + 3x - 7)\,dx$

b) $\int \frac{x-2}{2}\,dx$

c) $\int \left(\frac{x}{6} - \frac{5}{3}\right)dx$

d) $\int \left(\frac{8}{x} + \sqrt[4]{x}\right)dx$

a) $\int (x^2 + 3x - 7)\,dx = \frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - 7x + k$

b) $\int \frac{x-2}{2}\,dx = \int \left(\frac{x}{2} - 1\right)dx = \frac{x^2}{4} - x + k$

c) $\int \left(\frac{x}{6} - \frac{5}{3}\right)dx = \frac{x^2}{12} - \frac{5}{3}x + k$

d) $\int \left(\frac{8}{x} + \sqrt[4]{x}\right)dx = 8\ln x + \frac{x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1} + k = 8\ln x + \frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5} + k$

7. **Resuelve estas integrales.**

a) $\int 10x(x^2 - 4)^4\,dx$

b) $\int \frac{6x+3}{x^2+x-3}\,dx$

c) $\int \left(\frac{4x^2}{x^3+5}\right)dx$

d) $\int \frac{x(x^2+1)^3}{2}\,dx$

a) $\int 5 \cdot 2x\left(x^2-4\right)^4 dx = \left(x^2-4\right)^5 + k$

b) $\int \frac{3(2x+1)}{x^2+x-3}\,dx = 3\ln\left|x^2+x-3\right| + k$

c) $\int \frac{4x^2}{x^3+5}\,dx = \frac{4}{3}\int \frac{3x^2}{x^3+5}\,dx = \frac{4}{3}\ln\left|x^3+5\right| + k$

d) $\frac{1}{2}\int \frac{2x\left(x^2+1\right)^3}{2}\,dx = \frac{1}{4}\frac{\left(x^2+1\right)^4}{4} + k = \frac{1}{16}\left(x^2+1\right)^4 + k$

8. Calcula las siguientes integrales.

a) $\int 2^{\frac{x}{2}}\,dx$

b) $\int e^{x+1}\,dx$

c) $\int \left(\frac{5}{2}\right)^{2x} dx$

d) $\int (e^{-2x} + e^{x-1})\,dx$

a) $\int 2^{\frac{x}{2}}\,dx = 2\cdot\frac{2^{\frac{x}{2}}}{\ln 2} + k = \frac{2^{\frac{x}{2}+1}}{\ln 2} + k$

b) $\int e^{x+1}\,dx = e^{x+1} + k$

c) $\int \left(\frac{5}{2}\right)^{2x} dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^{2x}}{\ln\frac{5}{2}} + k$

d) $\int (e^{-2x} + e^{x-1})\,dx = -\frac{1}{2}\cdot e^{-2x} + e^{x-1} + k$

9. Halla estas integrales.

a) $\int 5^{x^2+1}\cdot 2x\,dx$

b) $\int 2e^{\frac{x}{2}+2}\,dx$

c) $\int \frac{3^{5x-1}}{2}\,dx$

d) $\int \frac{x}{e^{x^2}}\,dx$

a) $\int 5^{x^2+1}\cdot 2x\,dx = \frac{5^{x^2+1}}{\ln 5} + k$

c) $\int \frac{3^{5x-1}}{2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{3^{5x-1}}{\ln 3} + k = \frac{3^{5x-1}}{10\ln 3} + k$

b) $\int 2e^{\frac{x}{2}+2}\,dx = 4e^{\frac{x}{2}+2} + k$

d) $\int \frac{x}{e^{x^2}}\,dx = \int x\cdot e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\cdot e^{-x^2} + k$

10. Resuelve las siguientes integrales.

a) $\int sen(3x+2)\,dx$

b) $\int 8\cos(4x-3)\,dx$

c) $\int sen(-2x)\,dx$

d) $\int \cos(5-6x)\,dx$

a) $\frac{1}{3}\int 3\,sen(3x+2)\,dx = -\frac{1}{3}\cos(3x+2) + k$

b) $2\int 4\cos(4x-3)\,dx = 2\,sen(4x-3) + k$

c) $-\frac{1}{2}\int -2\,sen(-2x)\,dx = \frac{1}{2}\cos(-2x) + k$

d) $-\frac{1}{6}\int -6\cos(5-6x)\,dx = -\frac{1}{6}\,sen(5-6x) + k$

11. Resuelve estas integrales.

a) $\int \frac{1}{\cos^2(x+3)}\,dx$

b) $\int \frac{2x}{\cos^2(4x^2)}\,dx$

c) $\int \frac{1+tg^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$

d) $\int [x^2 tg^2(x^3) + x^2]\,dx$

a) $\int \frac{1}{\cos^2(x+3)}\,dx = tg(x+3)+k$

b) $\int \frac{2x}{\cos^2(4x^2)}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{8x}{\cos^2(4x^2)}\,dx = \frac{1}{4}tg(4x^2)+k$

c) $\int \frac{\left[1+tg^2(\sqrt{x})\right]}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int \frac{1+tg^2(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\,dx = 2\,tg(\sqrt{x})+k$

d) $\int \left[x^2\,tg^2(x^3)+x^2\right]dx = \frac{1}{3}\int 3x^2\left[tg^2(x^3)+1\right]dx = \frac{1}{3}tg(x^3)+k$

12. **Resuelve las siguientes integrales.**

a) $\int \frac{1}{\sqrt{4-16x^2}}\,dx$

b) $\int \frac{-1}{\sqrt{5-25x^2}}\,dx$

c) $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^4}}\,dx$

d) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\,dx$

a) $\int \frac{1}{\sqrt{4-16x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}}\,dx = \frac{1}{4}\,arc\,sen\,2x+k$

b) $\int \frac{-1}{\sqrt{5-25x^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{5}x\right)^2}}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{1-\left(\sqrt{5}x\right)^2}}\,dx = \frac{1}{5}\,arc\cos\left(\sqrt{5}x\right)+k$

c) $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^4}}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x}{\sqrt{1-\left(2x^2\right)^2}}\,dx = \frac{1}{4}\,arc\,sen\left(2x^2\right)+k$

d) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\,dx = arc\,sen(\ln x)+k$

13. **Resuelve estas integrales.**

a) $\int \frac{1}{3+9x^2}\,dx$

b) $\int \frac{4}{1+(6-x)^2}\,dx$

c) $\int \frac{x^2}{2+8x^6}\,dx$

d) $\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$

a) $\int \frac{1}{3+9x^2}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+3x^2}\,dx = \frac{1}{3\sqrt{3}}\int \frac{\sqrt{3}}{1+\left(\sqrt{3}x\right)^2}\,dx = \frac{1}{3\sqrt{3}}\,arc\,tg\left(\sqrt{3}x\right)+k$

b) $\int \frac{4}{1+(6-x)^2}\,dx = -4\int \frac{-1}{1+(6-x)^2}\,dx = -4\,arc\,tg(6-x)+k$

c) $\int \frac{x^2}{2+8x^6}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+\left(2x^3\right)^2}\,dx = \frac{1}{12}\int \frac{6x^2}{1+\left(2x^3\right)^2}\,dx = \frac{1}{12}\,arc\,tg\left(2x^3\right)+k$

d) $\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{1}{1+\left(x^2+2x+1\right)}\,dx = \int \frac{1}{1+(x+1)^2}\,dx = arc\,tg(x+1)+k$

14. **Resuelve las siguientes integrales definidas.**

a) $\int_0^3 (x^3+4x^2-5)\,dx$

b) $\int_{-2}^{1} \left(\frac{x}{3}+2\right)^2 dx$

a) $F(x)=\int(x^3+4x^2-5)dx=\frac{x^4}{4}+\frac{4x^3}{3}-5x$

$F(3)-F(0)=\frac{165}{4}-0=\frac{165}{4}$

b) $F(x)=\int\left(\frac{x}{3}+2\right)^2 dx=\left(\frac{x}{3}+2\right)^3$

$F(1)-F(-2)=\left(\frac{7}{3}\right)^3-\left(\frac{4}{3}\right)^3=\frac{279}{27}=\frac{31}{3}$

15. Resuelve las siguientes integrales.

a) $\int_1^4 \frac{3}{\sqrt{x}}dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(5\cos x-\operatorname{sen} x)dx$

a) $F(x)=\int\frac{3}{\sqrt{x}}dx=3\int x^{-\frac{1}{2}}dx=6\sqrt{x}$ $\qquad F(4)-F(1)=12-6=6$

b) $F(x)=\int(5\cos x-\operatorname{sen} x)dx=5\int\cos x\,dx-\int\operatorname{sen} x\,dx=5\operatorname{sen} x+\cos x$ $\qquad F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F(0)=5-1=4$

16. Halla el área del triángulo limitado por los ejes *X* e *Y* y la recta de ecuación $f(x)=x-3$.

Corte con el eje *X*: (3, 0) Corte con el eje *Y*: (0, –3)

Es un triángulo que está por debajo del eje *X* de base 3 y altura 3.

$A_T=\frac{3\cdot 3}{2}=\frac{9}{2}$

Con la integral definida se obtiene el mismo valor, pero negativo, porque el área está bajo el eje *X*.

$$\int_0^3(x-3)dx=\left[\frac{x^2}{2}-3x\right]_0^3=\frac{9}{2}-9=-\frac{9}{2}$$

17. Halla el área del triángulo que tiene como vértices (2, 0), (4, 4) y (5, 0) utilizando integrales definidas.

El triángulo es de base 3 y altura 4.

$A_T=\frac{4\cdot 3}{2}=6$

Con la integral definida se obtiene el mismo valor. Para ello se divide el triángulo en dos triángulos rectángulos.

La recta que pasa por los puntos (2, 0) y (4, 4) tiene como ecuación $y=2x-4$.

$$\int_2^4(2x-4)dx=\left[x^2-4x\right]_2^4=4$$

La recta que pasa por los puntos (4, 4) y (5, 0) tiene como ecuación $y=-4x+20$.

$$\int_4^5(-4x+20)dx=\left[-2x^2+20x\right]_4^5=50-48=2$$

$A_T=4+2=6$

18. **Halla el área de la región limitada por la gráfica de la curva $f(x) = x^2 - 4$ y el eje X entre los puntos de corte con este eje.**

Cortes con el eje X: (2, 0) y (−2, 0)

$$F(x) = \int (x^2 - 4)dx = \frac{x^3}{3} - 4x \qquad |F(2) - F(-2)| = \left|-\frac{16}{3} - \frac{16}{3}\right| = \frac{32}{3}$$

19. **Halla el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ y el eje X en el intervalo [3, 4].**

$$\int_3^4 \left(\frac{1}{x-2}\right)dx = [\ln|x-2|]_3^4 = \ln 2$$

20. **Determina el área comprendida entre las funciones $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = x + 2$ en el intervalo [−3, 4].**

$$f(x) = g(x) \to x^2 - 4 = x + 2 \to x^2 - x - 6 = 0 \to \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$F(x) = \int (x^2 - 4 - (x + 2))\, dx = \int (x^2 - x - 6)\, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x$$

$$\left|\int_{-3}^{-2} (x^2 - x - 6)\, dx\right| + \left|\int_{-2}^{3} (x^2 - x - 6)\, dx\right| + \left|\int_{3}^{4} (x^2 - x - 6)\, dx\right| = |F(-2) - F(-3)| +$$

$$+ |F(3) - F(-2)| + |F(4) - F(3)| = \left|\frac{22}{3} - \frac{9}{2}\right| + \left|-\frac{27}{2} - \frac{22}{3}\right| + \left|-\frac{32}{3} + \frac{27}{2}\right| = \frac{53}{2}$$

21. **Halla el área comprendida entre las parábolas $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^2 + 2$.**

$$f(x) = g(x) \to x^2 = -x^2 + 2 \to x^2 - 1 = 0 \to x = \pm 1$$

$$F(x) = \int (x^2 - (-x^2 + 2))\, dx = \int (2x^2 - 2)\, dx = \frac{2x^3}{3} - 2x$$

$$\text{Área} = |F(1) - F(-1)| = \left|-\frac{4}{3} - \frac{4}{3}\right| = \frac{8}{3}$$

SABER HACER

22. **Confirma que $F(x) = \dfrac{3x^2}{8} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x}$ es una primitiva de $f(x) = \dfrac{3x^3 + 2x^2 - 4}{4x^2}$. De todas las primitivas de $f(x)$, encuentra la que vale 3 para $x = -2$.**

$$F'(x) = \frac{6x}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} = \frac{3x^3 + 2x^2 - 4}{4x^2}$$

$$F(-2) = \frac{3 \cdot 4}{8} + \frac{-2}{2} + \frac{1}{-2} + k = 3 \to k = 3$$

23. **Halla estas integrales.**

a) $\int x^2 \operatorname{sen} x^3\, dx$

b) $\int 2x^3 \operatorname{sen} (x^4 - 2)\, dx$

c) $\int 5x^2 e^{x^3+4}\, dx$

d) $\int x^2\left(1 + \operatorname{tg}^2 \dfrac{x^3}{2}\right) dx$

a) $\int x^2 sen\, x^3\, dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 sen\, x^3\, dx = -\frac{1}{3}\cos x^3 + k$

b) $\int 2x^3 sen(x^4-2)dx = \frac{1}{2}\int 4x^3 sen(x^4-2)dx = -\frac{1}{2}\cos(x^4-2)+k$

c) $\int 5x^2 e^{x^3+4}\, dx = \frac{5}{3}\int 3x^2 e^{x^3+4}\, dx = \frac{5}{3}e^{x^3+4}+k$

d) $\int x^2\left(1+tg^2\frac{x^3}{2}\right)dx = \frac{2}{3}\int \frac{3x^2}{2}\left[1+tg^2\left(\frac{x^3}{2}\right)\right]dx = \frac{2}{3}tg\left(\frac{x^3}{2}\right)+k$

24. **Calcula las integrales.**

a) $\int \sqrt[3]{x^2}\, dx$

b) $\int \frac{7\sqrt[3]{x}}{2}\, dx$

c) $\int \frac{8\sqrt[4]{x^3}}{5}\, dx$

d) $\int 4\sqrt[5]{x^3}\, dx$

a) $\int \sqrt[3]{x^2}\, dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}+k = \frac{3\sqrt[3]{x^5}}{5}+k$

b) $\int \frac{7\sqrt[3]{x}}{2}\, dx = \frac{7}{2}\cdot\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+k = \frac{21}{8}\sqrt[3]{x^4}+k$

c) $\int \frac{8\sqrt[4]{x^3}}{5}\, dx = \frac{8}{5}\cdot\frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1}+k = \frac{32\sqrt[4]{x^7}}{35}+k$

d) $\int 4\sqrt[5]{x^3}\, dx = 4\cdot\frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1}+k = \frac{5\sqrt[5]{x^8}}{2}+k$

25. **Halla estas integrales.**

a) $\int \frac{4}{x^2}\, dx$

b) $\int \frac{-6}{x^3}\, dx$

c) $\int \frac{3}{5x^4}\, dx$

d) $\int \frac{8}{(2x)^4}\, dx$

a) $4\int x^{-2}\, dx = -4x^{-1}+k = -\frac{4}{x}+k$

b) $-6\int x^{-3}\, dx = 3x^{-2}+k = \frac{3}{x^2}+k$

c) $\frac{3}{5}\int x^{-4}\, dx = -\frac{1}{5}x^{-3}+k = -\frac{1}{5x^3}+k$

d) $\frac{1}{2}\int x^{-4}\, dx = -\frac{1}{6}x^{-3}+k = -\frac{1}{6x^3}+k$

26. **Calcula estas integrales.**

a) $\int \frac{2x^2+3x-2}{x}\, dx$

b) $\int \frac{x^2+6x-8}{x^2}\, dx$

a) $\int \frac{2x^2+3x-2}{x}\, dx = 2\int x\, dx + \int 3\, dx - 2\int \frac{1}{x}\, dx = x^2+3x-2\ln x+k$

b) $\int \frac{x^2+6x-8}{x^2}\, dx = \int 1 dx + 6\int \frac{1}{x}\, dx - 8\int \frac{1}{x^2}\, dx = x+6\ln x+\frac{8}{x}+k$

27. **Calcula las siguientes integrales.**

a) $\int \frac{4x-5}{x^2}\, dx$

b) $\int \frac{(x+1)^2}{2x}\, dx$

a) $\int \frac{4x-5}{x^2}\, dx = 4\int \frac{1}{x}\, dx - 5\int \frac{1}{x^2}\, dx = 4\ln x+\frac{5}{x}+k$

b) $\int \frac{(x+1)^2}{2x}\, dx = \int \frac{x^2+2x+1}{2x}\, dx = \frac{1}{2}\int x\, dx + \int 1 dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\, dx = \frac{x^2}{4}+x+\frac{1}{2}\ln x+k$

28. **Calcula estas integrales.**

a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{4}{1+(2x-1)^2}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^6}\,dx = \int \frac{x^2}{1+\left(x^3\right)^2}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{1+\left(x^3\right)^2}\,dx = \frac{1}{3}\,arc\ tg\left(x^3\right)+k$

b) $\displaystyle\int \frac{4}{1+(2x-1)^2}\,dx = 2\int \frac{2}{1+(2x-1)^2}\,dx = 2\,arc\ tg(2x-1)+k$

29. **Halla estas integrales.**

a) $\displaystyle\int \frac{8x}{\sqrt{1-4x^4}}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{-1}{\sqrt{1-16x^2}}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{8x}{\sqrt{1-4x^4}}\,dx = 2\int \frac{4x}{\sqrt{1-\left(2x^2\right)^2}}\,dx = 2\,arc\ sen\left(2x^2\right)+k$

b) $\displaystyle\int \frac{-1}{\sqrt{1-16x^2}}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{-4}{\sqrt{1-(4x)^2}}\,dx = \frac{1}{4}\,arc\ cos(4x)+k$

30. **Calcula estas integrales.**

a) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2+6x+10}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2-8x+17}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{3}{x^2-x+2}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{3}{4x^2-8x+7}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2+6x+10}\,dx = 2\int \frac{1}{1+(x+3)^2}\,dx = 2\,arc\ tg(x+3)+k$

b) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2-8x+17}\,dx = 2\int \frac{1}{1+(x-4)^2}\,dx = 2\,arc\ tg(x-4)+k$

c) $\displaystyle\int \frac{3}{x^2-x+2}\,dx = 3\int \frac{1}{\frac{7}{4}+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,dx = \frac{12}{7}\int \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{4}{7}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2}\,dx = \frac{12}{7}\sqrt{\frac{7}{4}}\int \frac{3\cdot\sqrt{\frac{4}{7}}}{1+\left(\sqrt{\frac{4}{7}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2}\,dx =$

$\displaystyle= \frac{6\sqrt{7}}{7}\,arc\ tg\left(\sqrt{\frac{4}{7}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)+k$

d) $\displaystyle\int \frac{3}{4x^2-8x+7}\,dx = 3\int \frac{1}{3+(2x-2)^2}\,dx = \int \frac{1}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x-2)\right)^2}\,dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x-2)\right)^2}\,dx =$

$\displaystyle= \frac{\sqrt{3}}{2}\,arc\ tg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x-2)\right)+k$

31. **Halla estas integrales.**

a) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2+6x+8}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2-8x+7}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2+6x+8}\,dx = \int \frac{2}{(x+2)(x+4)}\,dx = \int\left(\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+4}\right)dx \to 2 = A(x+4)+B(x+2) \to A=1, B=-1$

$\displaystyle\int\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)dx = \ln|x+2|-\ln|x+4|+k$

b) $\int \frac{2}{x^2-8x+7}\,dx = \int \frac{2}{(x-7)(x-1)}\,dx = \int \left(\frac{A}{x-7}+\frac{B}{x-1}\right)dx \to 2 = A(x-1)+B(x-7) \to A=\frac{1}{3}, B=-\frac{1}{3}$

$$\int \frac{2}{x^2-8x+7}\,dx = \int \left(\frac{1}{3(x-7)}-\frac{1}{3(x-1)}\right)dx = \frac{1}{3}\ln|x-7| - \frac{1}{3}\ln|x-1| + k$$

32. Calcula estas integrales.

a) $\int \frac{x+3}{x^2+6x+10}\,dx$ b) $\int \frac{x-2}{x^2-8x+17}\,dx$

a) $\int \frac{x+3}{x^2+6x+10}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{x^2+6x+10}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+6x+10\right| + k$

b) $\int \frac{x-2}{x^2-8x+17}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-4-4+4}{x^2-8x+17}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-8}{x^2-8x+17}\,dx + 2\int \frac{1}{x^2-8x+17}\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-8x+17\right| + 2\,arc\,tg(x-4) + k$$

33. Halla estas integrales.

a) $\int \frac{2x+1}{x^2+6x+8}\,dx$ b) $\int \frac{2x-3}{x^2-8x+7}\,dx$

a) $\int \frac{2x+1}{x^2+6x+8}\,dx = \int \frac{2x+1+5-5}{x^2+6x+8}\,dx = \int \frac{2x+6}{x^2+6x+8}\,dx - \int \frac{5}{x^2+6x+8}\,dx =$

$$= \ln\left|x^2+6x+8\right| + \int \left(\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+4}\right)dx = \ln\left|x^2+6x+8\right| - \int \frac{5}{2(x+2)}\,dx + \int \frac{5}{2(x+4)}\,dx =$$

$$= \ln\left|x^2+6x+8\right| - \frac{5}{2}\ln|x+2| + \frac{5}{2}\ln|x+4| + k$$

b) $\int \frac{2x-3}{x^2-8x+7}\,dx = \int \frac{2x-3-5+5}{x^2-8x+7}\,dx = \int \frac{2x-8}{x^2-8x+7}\,dx + \int \frac{5}{x^2-8x+7}\,dx = \ln\left|x^2-8x+7\right| + \int \left(\frac{A}{x-7}+\frac{B}{x-1}\right)dx$

$$= \ln\left|x^2-8x+7\right| + \int \frac{5}{6(x-7)}\,dx - \int \frac{5}{6(x-1)}\,dx = \ln\left|x^2-8x+7\right| + \frac{5}{6}\ln|x-7| - \frac{5}{6}\ln|x-1| + k$$

34. Halla la expresión de una función polinómica de segundo grado que tiene (1, 0) y (3, 0) como puntos de corte con el eje *X*, y cuya área limitada por la curva y los dos ejes coordenados vale $\frac{4}{3}$.

$f(x) = ax^2+bx+c$ $f(1) = a+b+c = 0$ $f(3) = 9a+3b+c = 0$

$$\int_0^1 (ax^2+bx+c)\,dx = \left[a\frac{x^3}{3}+b\frac{x^2}{2}+cx\right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

$F(0) = 0$ $F(1) = \frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b+c$

$$F(1)-F(0) = \frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c = \frac{4}{3}$$

Resolvemos el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left.\begin{array}{r} a+b+c=0 \\ 9a+3b+c=0 \\ 2a+3b+6c=8 \end{array}\right\} a=1, b=-4, c=3$$

La función cuadrática buscada es $f(x) = x^2-4x+3$.

35. **Encuentra a, b y c en la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, sabiendo que su gráfica pasa por los puntos de coordenadas (0, −1) y (1, 2) y además $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \frac{5}{6}$.**

$f(0) = c = -1 \qquad f(1) = a + b + c = 2 \to a + b = 3$

$$\int_{-1}^{0}(ax^2 + bx + c)dx = \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right]_{-1}^{0} = \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + c = \frac{5}{6}$$

Resolvemos el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} a + b = 3 \\ c = -1 \\ \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + c = \frac{5}{6} \end{array}\right\} \to a = 4, b = -1, c = -1$$

La función cuadrática es $f(x) = 4x^2 - x - 1$.

36. **Halla el área comprendida entre las funciones.**

$$f(x) = x^2 + 3x - 2 \qquad g(x) = -x^2 + x + 10$$

Los puntos de corte de las dos gráficas son:

$x^2 + 3x - 2 = -x^2 + x + 10 \to x_1 = 2,\ x_2 = -3$

$$\left|\int_{-3}^{2}(f(x) - g(x))dx\right| = \left|\int_{-3}^{2}(2x^2 + 2x - 12)dx\right| = \left|\left[\frac{2x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - 12x\right]_{-3}^{2}\right| = \left|\frac{16}{3} + 4 - 24 - (-18 + 9 + 36)\right| = \left|\frac{-125}{3}\right| = \frac{125}{3}$$

37. **¿Qué área encierran estas funciones?**

$$f(x) = x + 4 \qquad g(x) = -x + 2 \qquad h(x) = \frac{x}{2} + 2$$

El punto de corte de $f(x)$ y $g(x)$ es (−1, 3). El punto de corte de $g(x)$ y $h(x)$ es (0, 2).

El punto de corte de $f(x)$ y $h(x)$ es (−4,0).

$$\left|\int_{-4}^{-1}(f(x) - h(x))dx\right| + \left|\int_{-1}^{0}(g(x) - h(x))dx\right| = \left|\int_{-4}^{1}\left(\frac{x}{2} + 2\right)dx\right| + \left|\int_{-1}^{0} -\frac{3x}{2}\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^2}{4} + 2x\right]_{-4}^{-1}\right| + \left|\left[-\frac{3x^2}{4}\right]_{-1}^{0}\right| = 3$$

ACTIVIDADES FINALES

38. **Comprueba si las funciones $F(x)$ son primitivas de $f(x)$.**

a) $F(x) = x^3 - 6x^2 + 2x - 1 \qquad f(x) = 3x^2 - 12x + 2$

b) $F(x) = 2x^3 - x^2 - 3x + 9{,}5 \qquad f(x) = 6x - 12x^2 - \frac{3}{2}x^2$

c) $F(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1} \qquad f(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2}$

d) $F(x) = \operatorname{sen} x \cos x \qquad f(x) = 2\cos^2 x - 1$

e) $F(x) = \ln\frac{x^2}{x + 1} \qquad f(x) = \frac{x + 2}{x(x + 1)}$

a) $F(x)$ es primitiva de $f(x)$ porque: $F'(x) = 3x^2 - 12x + 2$

b) $F(x)$ no es primitiva de $f(x)$ porque: $F'(x) = 6x^2 - 2x - 3$

c) $F(x)$ es primitiva de $f(x)$ porque: $F'(x) = \dfrac{2x \cdot (x-1) - (x^2+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$

d) $F(x)$ es primitiva de $f(x)$ porque: $F'(x) = cos\ x \cdot cos\ x + sen\ x\ (-sen\ x) =$
$= cos^2\ x - sen^2\ x = cos^2\ x - 1 + cos^2\ x = 2\ cos^2\ x - 1$

e) $F(x)$ es primitiva de $f(x)$ porque: $F'(x) = \dfrac{1}{\dfrac{x^2}{x+1}} \cdot \dfrac{2x \cdot (x+1) - x^2}{(x+1)^2} =$
$= \dfrac{x^2 + 2x}{x^2(x+1)} = \dfrac{x+2}{x(x+1)}$

39. Comprueba que $F(x) = 2x^2 - 3x + 2\sqrt{x}$ es una primitiva de la función $f(x) = 4x - 3 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
De todas las primitivas de esta función halla aquella que cumple que $F(1) = 5$.

F(x) es primitiva de $f(x)$ porque: $F'(x) = 4x - 3 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Las primitivas de $f(x)$ son de la forma: $F(x) = 2x^2 - 3x + 2\sqrt{x} + k$

$F(1) = 2 - 3 + 2 + k = 5 \rightarrow k = 4$

40. La pendiente de la recta tangente a una curva en cualquiera de sus puntos es $6x$.
Averigua la función de la que se trata, si se sabe que pasa por el origen de coordenadas.

$F(x) = \int 6x\ dx = 3x^2 + k$ $\qquad$ $F(0) = k = 0$

41. Calcula las siguientes integrales.

a) $\int (6x^2 - 4x + 3)\, dx$

b) $\int (5x^2 + 3x - 2)\, dx$

c) $\int \left(\dfrac{1}{3}x^4 - \dfrac{3}{4}x^2 - 2x\right) dx$

d) $\int (0{,}3x^3 + 1{,}3x^2 - 0{,}2)\, dx$

e) $\int \left(-\dfrac{3}{7}x^5 + \dfrac{1}{5}x^3 - \dfrac{7}{4}x^2\right) dx$

a) $\int (6x^2 - 4x + 3)\ dx = 2x^3 - 2x^2 + 3x + k$

b) $\int (5x^2 + 3x - 2)\ dx = \dfrac{5x^3}{3} + \dfrac{3x^2}{2} - 2x + k$

c) $\int \left(\dfrac{1}{3}x^4 - \dfrac{3}{4}x^2 - 2x\right) dx = \dfrac{x^5}{15} - \dfrac{x^3}{4} - x^2 + k$

d) $\int (0{,}3x^3 + 1{,}3x^2 - 0{,}2)\ dx = \dfrac{3x^4}{40} + \dfrac{13x^3}{30} - \dfrac{x}{5} + k$

e) $\int \left(-\dfrac{3}{7}x^5 + \dfrac{1}{5}x^3 - \dfrac{7}{4}x^2\right) dx = -\dfrac{x^6}{14} + \dfrac{x^4}{20} - \dfrac{7x^3}{12} + k$

42. Calcula las siguientes integrales.

a) $\int \frac{1}{x}\,dx$

b) $\int \frac{3}{x^4}\,dx$

c) $\int \frac{-2}{5x^3}\,dx$

d) $\int \left(\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx$

e) $\int (3x^{-2} + 1)\,dx$

f) $\int \left(\frac{2}{3}x^{-3} + \frac{5}{x}\right) dx$

a) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + k$

b) $\int \frac{3}{x^4}\,dx = -\frac{1}{x^3} + k$

c) $\int \frac{-2}{5x^3}\,dx = \frac{1}{5x^2} + k$

d) $\int \left(\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \int \frac{3}{x}\,dx - \int \frac{1}{x^2}\,dx = 3\ln x + \frac{1}{x} + k$

e) $\int (3x^{-2} + 1)\,dx = 3\int x^{-2}\,dx + \int 1\,dx = -\frac{3}{x} + x + k$

f) $\int \left(\frac{2}{3}x^{-3} + \frac{5}{x}\right) dx = \frac{2}{3}\int x^{-3}\,dx + 5\int \frac{1}{x}\,dx = -\frac{1}{3x^2} + 5\ln x + k$

43. Calcula estas integrales.

a) $\int \left(\frac{5}{4x^3} + \frac{4}{x^2} - x^3 + 2x - 1\right) dx$

b) $\int (-3x^5 + 3x^2 - 5x + 2x^{-1} - 6x^{-2} + 11)\,dx$

c) $\int \left(\frac{-1}{x^2} + \frac{-12}{x} - x(x^2 - 7x - 5)\right) dx$

a) $\int \left(\frac{5}{4x^3} + \frac{4}{x^2} - x^3 + 2x - 1\right) dx = -\frac{5}{8x^2} - \frac{4}{x} - \frac{x^4}{4} + x^2 - x + k$

b) $\int (-3x^5 + 3x^2 - 5x + 2x^{-1} - 6x^{-2} + 11)\,dx = -\frac{x^6}{2} + x^3 - \frac{5x^2}{2} + 2\ln x + \frac{6}{x} + 11x + k$

c) $\int \left(\frac{-1}{x^2} + \frac{-12}{x} - x\left(x^2 - 7x - 5\right)\right) dx = \int \left(\frac{-1}{x^2} - \frac{12}{x} - x^3 + 7x^2 + 5x\right) dx = \frac{1}{x} - 12\ln x - \frac{x^4}{4} + \frac{7x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + k$

44. Resuelve las siguientes integrales.

a) $\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^4}\right) dx$

b) $\int \left(2x - \frac{1}{x^5}\right) dx$

c) $\int \left(5 - \frac{7}{x^4} + 2x\right) dx$

d) $\int \left(\frac{x^3 + 2x}{5} + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}\right) dx$

e) $\int \left(3x - \frac{4}{3}x^{-1} + 5\right) dx$

f) $\int \left(\frac{3x^4}{5} + \frac{x - 1}{2} - \frac{3}{x^4}\right) dx$

a) $\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^4}\right) dx = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + k$

b) $\int \left(2x - \frac{1}{x^5}\right) dx = x^2 + \frac{1}{4x^4} + k$

c) $\int \left(5 - \frac{7}{x^4} + 2x\right) dx = 5x + \frac{7}{3x^3} + x^2 + k$

d) $\int \left(\frac{x^3 + 2x}{5} + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}\right) dx = \frac{x^4}{20} + \frac{x^2}{5} + 2\ln x - \frac{5}{x} + k$

e) $\int \left(3x - \frac{4}{3}x^{-1} + 5\right) dx = \frac{3x^2}{2} - \frac{4}{3}\ln x + 5x + k$

f) $\int \left(\frac{3x^4}{5} + \frac{x - 1}{2} - \frac{3}{x^4}\right) dx = \frac{3x^5}{25} + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{x^3} + k$

45. **Calcula estas integrales de funciones potenciales.**

a) $\int (2x-1)^{-1}\,dx$

b) $\int \frac{4}{5x-7}\,dx$

c) $\int \left(\frac{x^2}{3}+1\right)^2 dx$

d) $\int (3x-2)\,dx$

e) $\int \frac{x}{2x^2-1}\,dx$

f) $\int \frac{4x^2}{x^3+1}\,dx$

a) $\int (2x-1)^{-1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{2x-1}dx = \frac{1}{2}\ln|2x-1|+k$

b) $\int \frac{4}{5x-7}dx = \frac{4}{5}\int \frac{5}{5x-7}dx = \frac{4}{5}\ln|5x-7|+k$

c) $\int \left(\frac{x^2}{3}+1\right)^2 dx = \int \left(\frac{x^4}{9}+\frac{2x^2}{3}+1\right)dx = \frac{x^5}{45}+\frac{2x^3}{9}+x+k$

d) $\int (3x-2)dx = \frac{3x^2}{2}-2x+k$

e) $\int \frac{x}{2x^2-1}dx = \frac{1}{4}\ln|2x^2-1|+k$

f) $\int \frac{4x^2}{x^3+1}dx = \frac{4}{3}\int \frac{3x^2}{x^3+1}dx = \frac{4}{3}\ln|x^3+1|+k$

46. **Resuelve estas integrales.**

a) $\int (x+1)\sqrt[3]{x^2+2x-3}\,dx$

b) $\int 8x\sqrt[4]{(x^2-5)^3}\,dx$

c) $\int e^{3x}\sqrt[5]{e^{3x-2}+7}\,dx$

d) $\int e^{2x}\sqrt{e^{2x-6}-2}\,dx$

e) $\int \cos 2x\sqrt{\operatorname{sen} 2x+1}\,dx$

f) $\int (1+\operatorname{sen} x)\sqrt{\cos x - x}\,dx$

a) $\int (x+1)\sqrt[3]{x^2+2x-3}\,dx = \frac{1}{2}\int 2(x+1)\sqrt[3]{x^2+2x-3}\,dx = \frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2+2x-3)^4}+k$

b) $\int 8x\sqrt[4]{(x^2-5)^3}\,dx = 4\int 2x\sqrt[4]{(x^2-5)^3}\,dx = \frac{16}{7}\sqrt[4]{(x^2-5)^7}+k$

c) $\int e^{3x}\sqrt[5]{e^{3x-2}+7}\,dx = \frac{e^2}{3}\int 3e^{3x-2}\sqrt[5]{e^{3x-2}+7}\,dx = \frac{5e^2\sqrt[5]{(e^{3x-2}+7)^6}}{18}+k$

d) $\int e^{2x}\sqrt{e^{2x-6}-2}\,dx = \frac{e^6}{2}\int 2e^{2x-6}\sqrt{e^{2x-6}-2}\,dx = \frac{1}{3}e^6\sqrt{(e^{2x-6}-2)^3}+k$

e) $\int \cos 2x\sqrt{\operatorname{sen} 2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int 2\cos 2x\,\sqrt{\operatorname{sen} 2x+1}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{(\operatorname{sen} 2x+1)^3}+k$

f) $\int (1+\operatorname{sen} x)\sqrt{\cos x-x}\,dx = -\int -(1+\operatorname{sen} x)\sqrt{\cos x-x}\,dx = -\frac{2}{3}\sqrt{(\cos x-x)^3}+k$

47. **Resuelve estas integrales.**

a) $\int e^{2x}dx$

b) $\int xe^{x^2}dx$

c) $\int e^{\frac{3x}{4}}dx$

d) $\int 5^{2x+1}dx$

e) $\int 2^{\frac{x+1}{2}}dx$

f) $\int 3xe^{x^2+1}dx$

a) $\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + k$

b) $\int x e^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + k$

c) $\int e^{\frac{3x}{4}} dx = \frac{4}{3}e^{\frac{3x}{4}} + k$

d) $\int 5^{2x+1}dx = \frac{1}{2\ln 5}5^{2x+1} + k$

e) $\int 2^{\frac{x+1}{2}} dx = \int 2^{\frac{x}{2}}\sqrt{2}\, dx = 2\sqrt{2}\int \frac{1}{2}2^{\frac{x}{2}} dx = \frac{2^{\frac{x+3}{2}}}{\ln 2} + k$

f) $\int 3xe^{x^2+1} dx = \frac{3}{2}\int 2xe^{x^2+1} dx = \frac{3}{2}e^{x^2+1} + k$

48. **Realiza las siguientes integrales de funciones trigonométricas.**

a) $\int -\cos(x-2)\, dx$

b) $\int 2x\, \text{sen}\, x^2\, dx$

c) $\int (1 + tg^2\, 2x)\, dx$

d) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, \text{sen}\, \sqrt{x}\, dx$

e) $\int \cos^2 x\, \text{sen}\, x\, dx$

f) $\int \frac{1}{\cos^2 3x}\, dx$

a) $\int -\cos(x-2)dx = -\text{sen}(x-2) + k$

b) $\int 2x\, \text{sen}\, x^2\, dx = -\cos x^2 + k$

c) $\int (1+tg^2 2x)dx = \frac{1}{2}\, tg\, 2x + k$

d) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, \text{sen}\, \sqrt{x}\, dx = -2\cos\sqrt{x} + k$

e) $\int \cos^2 x\, \text{sen}\, x\, dx = -\frac{\cos^3 x}{3} + k$

f) $\int \frac{1}{\cos^2 3x}\, dx = \frac{1}{3}\, tg\, 3x + k$

49. **Calcula las siguientes integrales de funciones trigonométricas inversas.**

a) $\int \frac{x}{1+x^4}\, dx$

b) $\int \frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}}\, dx$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{1-5x^2}}\, dx$

d) $\int \frac{\cos x}{-1-\text{sen}^2 x}\, dx$

e) $\int \frac{1}{x + x\ln^2 x}\, dx$

f) $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}}\, dx$

a) $\int \frac{x}{1+x^4}\, dx = \frac{1}{2}\, \text{arc tg}\, x^2 + k$

b) $\int \frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}}\, dx = -\text{arc sen}(1-x) + k$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{1-5x^2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{5}}\, \text{arc sen}(\sqrt{5}x) + k$

d) $\int \frac{\cos x}{-1-\text{sen}^2 x}\, dx = -\text{arc tg}(\text{sen}\, x) + k$

e) $\int \frac{1}{x + x\ln^2 x}\, dx = \int \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\, dx = \text{arc tg}\ln x + k$

f) $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}}\, dx = \int \frac{x}{2\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}}\, dx = \frac{1}{2}\, \text{arc sen}\left(\frac{x^2}{2}\right) + k$

50. **Calcula estas integrales.**

a) $\int (\text{sen}\, x + 2\cos x)\, dx$

b) $\int \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

c) $\int \frac{-3}{x^2+1}\, dx$

d) $\int (2^x + e^x)\, dx$

e) $\int \frac{6}{\sqrt{x}}\, dx$

f) $\int -\frac{3}{\sqrt{1-3x}}\, dx$

a) $\int (sen\ x + 2\ cos\ x)\ dx = -cos\ x + 2\ sen\ x + k$

b) $\int \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = 5\ arc\ sen\ x + k$

c) $\int \frac{-3}{x^2+1}\ dx = -3\ arc\ tg\ x + k$

d) $\int (2^x + e^x)\ dx = \frac{2^x}{\ln 2} + e^x + k$

e) $\int \frac{6}{\sqrt{x}}\ dx = 12\sqrt{x} + k$

f) $\int -\frac{3}{\sqrt{1-3x}}\ dx = 2\sqrt{1-3x} + k$

51. **Resuelve las siguientes integrales.**

a) $\int (4x^4 - 5x^2 + 6x - 4)\ dx$

b) $\int (2x - 2)\cos(-x^2 + 2x)\ dx$

c) $\int (sen\ x + 5\cos\ x - 1)\ dx$

d) $\int (\cos x\ sen^2 x + \cos^2 x\ sen\ x)\ dx$

a) $\int (4x^4 - 5x^2 + 6x - 4)dx = \frac{4x^5}{5} - \frac{5x^3}{3} + 3x^2 - 4x + k$

b) $\int (2x-2)\cos(-x^2+2x)\ dx = -sen(-x^2+2x) + k$

c) $\int (sen\ x + 5\cos x - 1)dx = -\cos x + 5\ sen\ x - x + k$

d) $\int (\cos x\ sen^2 x + \cos^2 x\ sen\ x)dx = \frac{sen^3 x}{3} - \frac{\cos^3 x}{3} + k$

52. **Calcula las integrales que aparecen a continuación.**

a) $\int \frac{-3}{1+x^2}\ dx$

b) $\int (4x+2)(x-1)\ dx$

c) $\int \frac{x+1}{3\sqrt{x+1}}\ dx$

d) $\int \frac{2e^x + e^{2x}}{e^x}\ dx$

e) $\int \frac{3x}{4+8x^2}\ dx$

f) $\int \frac{1}{4x^2 - 12x + 10}\ dx$

a) $\int \frac{-3}{1+x^2}\ dx = -3\ arc\ tg x + k$

b) $\int (4x+2)(x-1)dx = \frac{4x^3}{3} - x^2 - 2x + k$

c) $\int \frac{x+1}{3\sqrt{x+1}}\ dx = \frac{1}{3}\int (x+1)^{\frac{1}{2}}\ dx = \frac{2}{9}\sqrt{(x+1)^3} + k$

d) $\int \frac{2e^x + e^{2x}}{e^x}\ dx = \int (2+e^x)dx = 2x + e^x + k$

e) $\int \frac{3x}{4+8x^2}\ dx = \frac{3}{16}\int \frac{4x}{1+2x^2}\ dx = \frac{3}{16}\ln|1+2x^2| + k$

f) $\int \frac{1}{4x^2-12x+10}\ dx = \int \frac{1}{1+(2x-3)^2}\ dx = \frac{1}{2}\ arc\ tg(2x-3) + k$

53. **Calcula las siguientes integrales.**

a) $\int \frac{-x}{x^2+3}\ dx$

b) $\int \frac{1}{(1+x^2)\ arc\ tg\ x}\ dx$

c) $\int \frac{1}{2x\sqrt{x}}\ dx$

d) $\int \frac{-\ln 3}{x \ln^2 x}\ dx$

e) $\int tg\ 3x\ dx$

f) $\int \frac{1-x}{1+(x-1)^2}\ dx$

g) $\int \frac{\cos x}{sen\ x}\ dx$

h) $\int \frac{tg\ x}{\cos x}\ dx$

a) $\int \frac{-x}{x^2+3}\,dx = -\frac{1}{2}\ln\left|x^2+3\right| + k$

b) $\int \frac{1}{(1+x^2)\,arc\ tg\ x}\,dx = \ln|arc\ tg\ x| + k$

c) $\int \frac{1}{2x\sqrt{x}}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{x}} + k$

d) $\int \frac{-\ln 3}{x\ \ln^2 x}\,dx = \frac{\ln 3}{\ln x} + k$

e) $\int tg\ 3x\ dx = -\frac{1}{3}\int \frac{-3\ sen\ 3x}{\cos 3x}\,dx = -\frac{1}{3}\ln|\cos 3x| + k$

f) $\int \frac{1-x}{1+(x-1)^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2(x-1)}{(x-1)^2+1}\,dx = -\frac{1}{2}\ln\left|(x-1)^2+1\right| + k$

g) $\int \frac{\cos x}{sen\ x}\,dx = \ln|sen\ x| + k$

h) $\int \frac{sen\ x}{\cos^2 x}\,dx = \frac{1}{\cos x} + k$

54. **Calcula las siguientes integrales.**

a) $\int \frac{7e^x}{(e^x+4)^4}\,dx$

b) $\int \frac{sen\ x - \cos x}{(\cos x + sen\ x)^2}\,dx$

c) $\int \frac{sen\ x}{(\cos x + 5)^3}\,dx$

d) $\int \frac{2\cos x - x\ sen\ x}{(x\cos x + sen\ x)^2}\,dx$

e) $\int \frac{sen\ x - \cos x}{1 + 2\ sen\ x \cdot \cos x}\,dx$

a) $\int \frac{7e^x}{(e^x+4)^4}\,dx = \frac{-7}{3(e^x+4)^3} + k$

b) $\int \frac{sen\ x - \cos x}{(\cos x + sen\ x)^2}\,dx = \frac{1}{\cos x + sen\ x} + k$

c) $\int \frac{sen\ x}{(\cos x + 5)^3}\,dx = \frac{1}{2(\cos x + 5)^2} + k$

d) $\int \frac{2\cos x - x\ sen\ x}{(x\cos x + sen\ x)^2}\,dx = \frac{-1}{x\cos x + sen\ x} + k$

e) $\int \frac{sen\ x - \cos x}{1+2\ sen\ x\cdot\cos x}\,dx = \int \frac{sen\ x - \cos x}{sen^2 x + \cos^2 x + 2\ sen\ x\cdot\cos x}\,dx = \int \frac{sen\ x - \cos x}{(sen\ x + \cos x)^2}\,dx = \frac{1}{sen\ x + \cos x} + k$

55. **Calcula las siguientes integrales.**

a) $\int \left(\frac{-4}{x^2} + \frac{12}{1+x^2}\right)dx$

b) $\int \left(\frac{3x\sqrt[3]{4x^2}}{7}\right)dx$

c) $\int \left(\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$

d) $\int \frac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)^3}\,dx$

a) $\int \left(\frac{-4}{x^2} + \frac{12}{1+x^2}\right)dx = \frac{4}{x} + 12\ arc\ tg\ x + k$

b) $\int \left(\frac{3x\sqrt[3]{4x^2}}{7}\right)dx = \frac{9\sqrt[3]{4}}{56}\sqrt[3]{x^8} + k$

c) $\int \left(\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\right)dx = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} + k$

d) $\int \frac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)^3}\,dx = -\frac{1}{4(e^{2x}+1)^2} + k$

56. **¿Son ciertas las siguientes igualdades?**

a) $\int [f(x)\cdot g(x)]\,dx = \left(\int f(x)\,dx\right)\cdot\left(\int g(x)\,dx\right)$

b) $\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = \frac{\int f(x)\,dx}{\int g(x)\,dx}$

Justifica las respuestas utilizando las funciones $f(x) = x + 1$ y $g(x) = 2x^3$.

a) $\int (f(x)\cdot g(x))dx = \int (2x^4 + 2x^3)dx = \frac{2x^5}{5} + \frac{x^4}{2}$

$\int f(x)dx = \int (x+1)dx = \frac{x^2}{2} + x$

$\int g(x)dx = \int 2x^3\,dx = \frac{x^4}{2}$

No es cierta la igualdad porque $\left(\int f(x)dx\right)\cdot\left(\int g(x)dx\right)$ es de grado seis y $\int (f(x)\cdot g(x))dx$ es de grado cinco.

b) $\int \frac{f(x)}{g(x)}dx = \int \frac{x+1}{2x^3}dx = -\frac{1}{2x} - \frac{1}{4x^2}$

$\frac{\int f(x)\,dx}{\int g(x)\,dx} = \frac{\frac{x^2}{2} + x}{\frac{x^4}{2}} = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}$

No es cierta la igualdad.

57. **Calcula las integrales.**

a) $\int \frac{1}{\sqrt{x-3}}\,dx$

b) $\int \frac{2}{\sqrt[3]{6x-7}}\,dx$

c) $\int (x^2 - \sqrt{x} + 2)^2\,dx$

d) $\int \frac{9}{\sqrt{2x+1}}\,dx$

a) $\int \frac{1}{\sqrt{x-3}}dx = \int (x-3)^{-\frac{1}{2}}dx = 2\sqrt{x-3} + k$

b) $\int \frac{2}{\sqrt[3]{6x-7}}dx = \frac{1}{3}\int 6(6x-7)^{-\frac{1}{3}}\,dx = \frac{\sqrt[3]{(6x-7)^2}}{2} + k$

c) $\int (x^2 - \sqrt{x} + 2)^2\,dx = \int \left(x^4 - 2x^{\frac{5}{2}} + 4x^2 + x - 4x^{\frac{1}{2}} + 4\right)dx = \frac{x^5}{5} - \frac{4x^{\frac{7}{2}}}{7} + \frac{4x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{8x^{\frac{3}{2}}}{3} + 4x + k$

d) $\int \frac{9}{\sqrt{2x+1}}dx = \frac{9}{2}\int 2(2x+1)^{-\frac{1}{2}}\,dx = 9\sqrt{2x+1} + k$

58. **Calcula las siguientes integrales definidas.**

a) $\int_{-2}^{1} (3x^4 - 2x + 7)\,dx$

b) $\int_{-5}^{-1} (x^2 - 1)\,dx$

c) $\int_{0}^{3} (x^3 - 5x^2 + x - 1)\,dx$

d) $\int_{-3}^{0} (9x^3 - x)\,dx$

e) $\int_{-3}^{3} (2x^4 - x^2 + 5)\,dx$

f) $\int_{-5}^{-2} (4x^3 - 6x^2 + 1)\,dx$

a) $F(x)=\int(3x^4-2x+7)dx=\frac{3x^5}{5}-x^2+7x$

$F(1)-F(-2)=\left(\frac{3}{5}-1+7\right)-\left(-\frac{96}{5}-4-14\right)=\frac{219}{5}$

b) $F(x)=\int(x^2-1)\,dx=\frac{x^3}{3}-x$

$F(-1)-F(-5)=\left(-\frac{1}{3}+1\right)-\left(-\frac{125}{3}+5\right)=\frac{112}{3}$

c) $F(x)=\int(x^3-5x^2+x-1)dx=\frac{x^4}{4}-\frac{5x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x$

$F(3)-F(0)=\left(\frac{81}{4}-45+\frac{9}{2}-3\right)-0=-\frac{93}{4}$

d) $F(x)=\int(9x^3-x)dx=\frac{9x^4}{4}-\frac{x^2}{2}$

$F(0)-F(-3)=0-\left(\frac{729}{4}-\frac{9}{2}\right)=\frac{711}{4}$

e) $F(x)=\int(2x^4-x^2+5)dx=\frac{2x^5}{5}-\frac{x^3}{3}+5x$

$F(3)-F(-3)=2\left(\frac{2\cdot 3^5}{5}-3^2+5\cdot 3\right)=\frac{1032}{5}$

f) $F(x)=\int(4x^3-6x^2+1)dx=x^4-2x^3+x$

$F(-2)-F(-5)=(16+16-2)-(625+250-5)=-840$

59. Calcula estas integrales definidas.

a) $\int_1^2 \frac{1}{2x}\,dx$

b) $\int_0^2 xe^{x^2}\,dx$

c) $\int_{-\pi}^{\pi} sen\, x\, dx$

d) $\int_0^{\pi} 1+tg^2\frac{x}{4}\,dx$

a) $\int_1^2 \frac{1}{2x}dx=\left[\frac{1}{2}\ln x\right]_1^2=\frac{1}{2}\ln 2$

b) $\int_0^2 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^2 2xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^2=\frac{1}{2}(e^4-1)$

c) $\int_{-\pi}^{\pi} sen\,x\,dx=[-cos\,x]_{-\pi}^{\pi}=0$

d) $\int_0^{\pi}\left(1+tg^2\frac{x}{4}\right)dx=\left[4\,tg\left(\frac{x}{4}\right)\right]_0^{\pi}=4$

60. Resuelve.

a) $\int_2^5 \frac{4}{x+2}\,dx$

b) $\int_{-5}^{-3} \frac{6}{x^2}\,dx$

c) $\int_2^4\left(x-\frac{1}{x-1}+\frac{4}{x^2}\right)dx$

d) $\int_{-1}^{1}\frac{2}{1+x^2}\,dx$

e) $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

f) $\int_{-1}^{3}\frac{8}{\sqrt{x+4}}\,dx$

g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\cos x-2\,sen\,x)\,dx$

h) $\int_1^2\frac{4}{x^5}\,dx$

a) $F(x)=\int\frac{4}{x+2}\,dx=4\ln|x+2|$

$\int_2^5\frac{4}{x+2}\,dx=F(5)-F(2)=4\ln 7-4\ln 4=4\ln\frac{7}{4}$

b) $F(x)=\int\frac{6}{x^2}\,dx=-\frac{6}{x}$

$\int_{-5}^{-3}\frac{6}{x^2}\,dx=F(-3)-F(-5)=2-\frac{6}{5}=\frac{4}{5}$

c) $F(x) = \int \left(x - \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x^2}\right) dx = \frac{x^2}{2} - \ln|x-1| - \frac{4}{x}$

$$\int_2^4 \left(x - \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x^2}\right) dx = F(4) - F(2) = 7 - \ln 3 - \ln 1 = 7 - \ln 3$$

d) $F(x) = \int \frac{2}{1+x^2}\, dx = 2 \text{ arc tg } x$

$$\int_{-1}^{1} \frac{2}{1+x^2}\, dx = F(1) - F(-1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

e) $F(x) = \int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = 2 \text{ arc sen } x$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0) = \frac{\pi}{3} - 0 = \frac{\pi}{3}$$

f) $F(x) = \int \frac{8}{\sqrt{x+4}}\, dx = 16\sqrt{x+4}$

$$\int_{-1}^{3} \frac{8}{\sqrt{x+4}}\, dx = F(3) - F(-1) = 16\sqrt{7} - 16\sqrt{3}$$

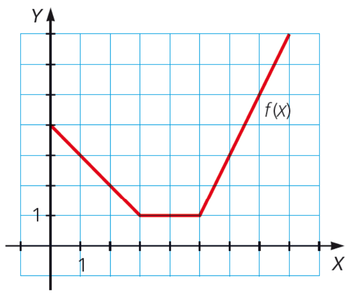
g) $F(x) = \int (3 \cos x - 2 \text{ sen } x)\, dx = -3 \text{ sen } x + 2 \cos x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \cos x - 2 \text{ sen } x)\, dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = -3 - 5 = -8$$

h) $F(x) = \int \frac{4}{x^5}\, dx = -\frac{1}{x^4}$

$$\int_1^2 \frac{4}{x^5}\, dx = F(2) - F(1) = -\frac{1}{16} + 1 = \frac{15}{16}$$

61. Completa en tu cuaderno la tabla con la función representada en el gráfico.



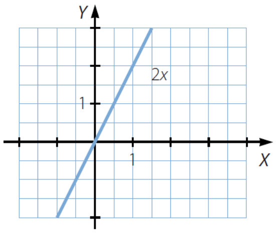
x	1	2	3	4	5
Área entre 0 y x					

x	1	2	3	4	5
Área entre 0 y x	$\frac{7}{2}$	6	$\frac{15}{2}$	$\frac{17}{2}$	$\frac{19}{2}$

62. **Representa la función $f(x) = 2x$ y completa en tu cuaderno la tabla de su función integral.**

x	1	2	3	4	5
Área entre 0 y x					

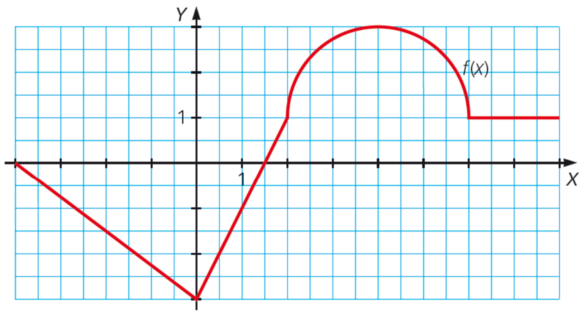
Halla la expresión analítica de dicha función.



x	1	2	3	4	5
Área entre 0 y x	1	4	9	16	25

La expresión analítica de la función es: $F(x) = x^2$

63. **Calcula cada una de las siguientes integrales a partir de la gráfica de $f(x)$.**



a) $\int_{-4}^{0} f(x)\,dx$ b) $\int_{4}^{7} f(x)\,dx$ c) $\int_{0}^{4} f(x)\,dx$ d) $\int_{6}^{8} f(x)\,dx$

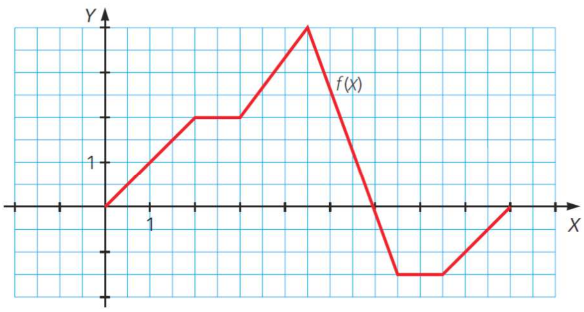
a) $\int_{-4}^{0} f(x)dx = -6$

c) $\int_{0}^{4} f(x)dx = -2{,}25 + 0{,}25 + \pi + 2 = \pi$

b) $\int_{4}^{7} f(x)dx = \pi + 3$

d) $\int_{6}^{9} f(x)dx = 3$

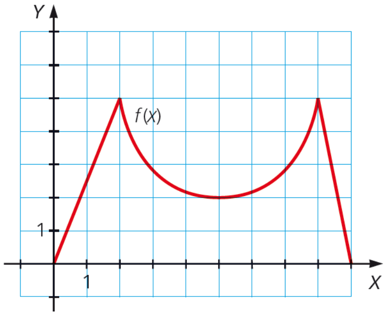
64. **Calcula cada una de las siguientes integrales a partir de la gráfica de $f(x)$.**



a) $\int_{0}^{2} f(x)\,dx$ b) $\int_{2}^{3} f(x)\,dx$ c) $\int_{3}^{6} f(x)\,dx$ d) $\int_{6}^{9} f(x)\,dx$ e) ¿Cuál es el valor de $\int_{0}^{9} f(x)\,dx$?

a) $\int_{0}^{2} f(x)dx = 2$ b) $\int_{2}^{3} f(x)dx = 2$ c) $\int_{3}^{6} f(x)dx = 7{,}5$ d) $\int_{6}^{9} f(x)dx = -3$ e) $\int_{0}^{9} f(x)dx = 8{,}5$

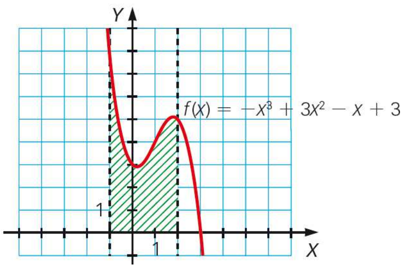
65. **Determina el área que queda situada bajo la función y sobre el eje *X* en los intervalos [0, 2], [2, 5], [2, 8], [8, 9], [0, 5] y [5, 9].**



$A([0,2]) = \frac{2\cdot 5}{2} = 5$ $\quad A([2,8]) = \frac{60-9\pi}{2}$ $\quad A([0,5]) = 5 + \frac{60-9\pi}{4} = \frac{80-9\pi}{4}$

$A([2,5]) = \frac{60-9\pi}{4}$ $\quad A([8,9]) = \frac{1\cdot 5}{2} = \frac{5}{2}$ $\quad A([5,9]) = \frac{60-9\pi}{4} + \frac{5}{2} = \frac{70-9\pi}{4}$

66. **Calcula el área sombreada.**



$$F(x) = \int \left(-x^3+3x^2-x+3\right)dx = -\frac{x^4}{4}+x^3-\frac{x^2}{2}+3x \quad \rightarrow \quad \left|\int_{-1}^{2}\left(-x^3+3x^2-x+3\right)dx\right| = \left|F(2)-F(-1)\right| = \frac{51}{4}$$

67. **Determina el área de la región comprendida entre la función, el eje *X* y las abscisas indicadas.**

a) $f(x) = 3x^2 - 2x \qquad x = 2,\ x = 4$

b) $f(x) = x^3 - x^2 + 5x + 1 \qquad x = 1,\ x = 3$

c) $f(x) = 5^x \qquad x = -1,\ x = 2$

d) $f(x) = \frac{4}{x^2} \qquad x = 3,\ x = 8$

e) $f(x) = sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \qquad x = \pi,\ x = \frac{3\pi}{2}$

a) $F(x) = \int \left(3x^2-2x\right)dx = x^3 - x^2 \qquad A = \left|F(4)-F(2)\right| = \left|48-4\right| = 44$

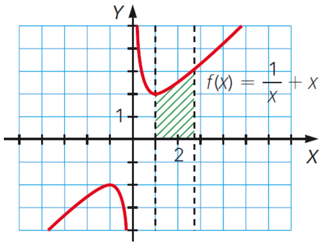
b) $F(x) = \int \left(x^3-x^2+5x+1\right)dx = \frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}+x \qquad A = \left|F(3)-F(1)\right| = \left|\frac{147}{4}-\frac{41}{12}\right| = \frac{100}{3}$

c) $F(x) = \int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} \qquad A = \left|F(2)-F(-1)\right| = \left|\frac{25}{\ln 5}-\frac{1}{5\ln 5}\right| = \frac{124}{5\ln 5}$

d) $F(x) = \int \frac{4}{x^2}dx = -\frac{4}{x} \qquad A = \left|F(8)-F(3)\right| = \left|-\frac{1}{2}+\frac{4}{3}\right| = \frac{5}{6}$

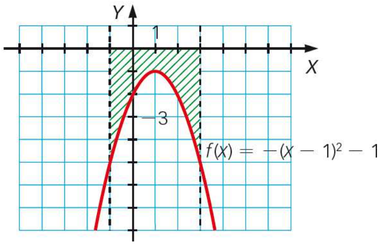
e) $F(x) = \int \text{sen}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)dx = -\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \qquad A = \left|F\left(\frac{3\pi}{2}\right)-F(\pi)\right| = \left|1-0\right| = 1$

68. **Calcula el área de la región comprendida entre la función $f(x) = \frac{1}{x} + x$, el eje X y las rectas $x = 1$ y $x = e$.**



$$\left|\int_1^e \left(\frac{1}{x}+x\right)dx\right| = \left|\left[\ln x + \frac{x^2}{2}\right]_1^e\right| = \frac{1+e^2}{2}$$

69. **Calcula el área sombreada.**



$$\left|\int_{-1}^3 (-x^2+2x-2)dx\right| = \left|\left[-\frac{x^3}{3}+x^2-2x\right]_{-1}^3\right| = \frac{28}{3}$$

70. **Calcula el área de la zona limitada por la función, el eje de abscisas y las rectas verticales que se indican. Ten en cuenta que las funciones pueden cortar al eje X.**

a) $f(x) = 3x^2 + 16x - 12$ $\quad x = -7,\ x = 0$

b) $f(x) = 2x^2 + 6x - 20$ $\quad x = -1,\ x = 5$

c) $f(x) = 2x^3 - 19x^2 + 49x - 20$ $\quad x = -1,\ x = 3$

d) $f(x) = sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ $\quad x = 0,\ x = \pi$

e) $f(x) = 4^x - 4$ $\quad x = 0,\ x = 2$

a) $f(x) = 0 \rightarrow 3x^2 + 16x - 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ x = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

$$F(x) = \int (3x^2 + 16x - 12)\ dx = x^3 + 8x^2 - 12x$$

$$\left|\int_{-7}^{-6} (3x^2 + 16x - 12)\ dx\right| + \left|\int_{-6}^{0} (3x^2 + 16x - 12)\ dx\right| =$$

$$= |F(-6) - F(-7)| + |F(0) - F(-6)| = |144 - 133| + |0 - 144| = 155$$

b) $f(x) = 0 \rightarrow 2x^2 + 6x - 20 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 2 \end{cases}$

$$F(x) = \int (2x^2 + 6x - 20)\ dx = \frac{2x^3}{3} + 3x^2 - 20x$$

$$\int_{-1}^{2} (2x^2 + 6x - 20)\ dx + \int_{2}^{5} (2x^2 + 6x - 20)\ dx = |F(2) - F(-1)| + |F(5) - F(2)| = \left|-\frac{68}{3} - \frac{67}{3}\right| + \left|\frac{175}{3} + \frac{68}{3}\right| = 126$$

c) $f(x) = 0 \to 2x^3 - 19x^2 + 49x - 20 = 0 \to \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ x = 4 \\ x = 5 \end{cases}$

$$F(x) = \int (2x^3 - 19x^2 + 49x - 20)\, dx = \frac{x^4}{2} - \frac{19x^3}{3} + \frac{49x^2}{2} - 20x$$

$$\left|\int_{-1}^{\frac{1}{2}} (2x^3 - 19x^2 + 49x - 20)\, dx\right| + \left|\int_{\frac{1}{2}}^{3} (2x^3 - 19x^2 + 49x - 20)\, dx\right| =$$

$$= \left|F\left(\frac{1}{2}\right) - F(-1)\right| + \left|F(3) - F\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|-\frac{445}{96} - \frac{154}{3}\right| + \left|30 + \frac{445}{96}\right| = \frac{4\,349}{48}$$

d) $f(x) = 0 \to sen\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \to x = \dfrac{\pi}{2}$

$$F(x) = \int sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx = -cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx\right| =$$

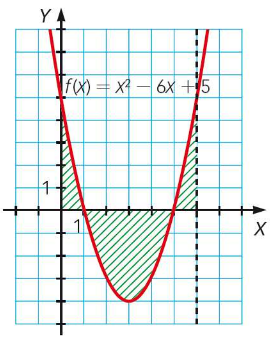
$$= \left|F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0)\right| + \left|F(\pi) - F\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = |-1 - 0| + |0 + 1| = 2$$

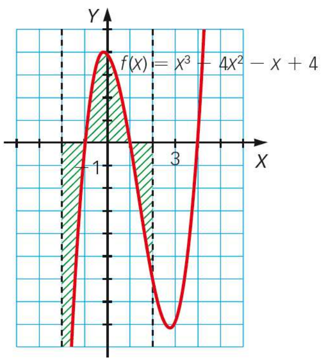
e) $f(x) = 0 \to 4^x - 4 = 0 \to x = 1$

$$F(x) = \int (4^x - 4)\, dx = \frac{4^x}{\ln 4} - 4x$$

$$\left|\int_0^1 (4^x - 4)\, dx\right| + \left|\int_1^2 (4^x - 4)\, dx\right| = |F(1) - F(0)| + |F(2) - F(1)| = \left|\frac{4}{\ln 4} - 4 - \frac{1}{\ln 4}\right| + \left|\frac{16}{\ln 4} - 8 - \frac{4}{\ln 4} + 4\right| = 6{,}48$$

71. **Calcula el área de la región comprendida entre la función, el eje *X* y las rectas dibujadas en las siguientes gráficas.**

a) 

b) 

a) $\left|\int_0^1 (x^2 - 6x + 5)dx\right| + \left|\int_1^5 (x^2 - 6x + 5)dx\right| + \left|\int_5^6 (x^2 - 6x + 5)dx\right| =$

$$= \left|\left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x\right]_0^1\right| + \left|\left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x\right]_1^5\right| + \left|\left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x\right]_5^6\right| = \left|\frac{7}{3}\right| + \left|-\frac{32}{3}\right| + \left|\frac{7}{3}\right| = \frac{46}{3}$$

b) $\left|\int_{-2}^{-1} (x^3 - 4x^2 - x + 4)dx\right| + \left|\int_{-1}^{1} (x^3 - 4x^2 - x + 4)dx\right| + \left|\int_1^2 (x^3 - 4x^2 - x + 4)dx\right| =$

$$= \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 4x\right]_{-2}^{-1}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 4x\right]_{-1}^{1}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 4x\right]_1^2\right| = \left|-\frac{91}{12}\right| + \left|\frac{64}{12}\right| + \left|-\frac{37}{12}\right| = 16$$

72. **Calcula el área de la región limitada por el eje X, las rectas verticales $x = -1$ y $x = 2$ y la gráfica de esta función.**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\left|\int_{-1}^{0} x^2\,dx\right| + \left|\int_{0}^{2} \sqrt{x}\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3}\right]_{0}^{2}\right| = \frac{1}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

73. **Calcula el área de la región limitada por el eje X y la gráfica de esta función.**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 5x & \text{si } x < -1 \\ 2x - 2 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ -x^2 + 3x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Cortes con el eje X: $x^2 + 5x = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -5$ $\quad 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1$ $\quad -x^2 + 3x = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 3$

$$\left|\int_{-5}^{-1} (x^2 + 5x)\,dx\right| + \left|\int_{-1}^{1} (2x - 2)\,dx\right| + \left|\int_{1}^{2} (2x - 2)\,dx\right| + \left|\int_{2}^{3} (-x^2 + 3x)\,dx\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2}\right]_{-5}^{-1}\right| + \left|\left[x^2 - 2x\right]_{-1}^{1}\right| + \left|\left[x^2 - 2x\right]_{1}^{2}\right| + \left|\left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_{2}^{3}\right| = \left|-\frac{56}{3}\right| + |-4| + 1 + \frac{7}{6} = \frac{149}{6}$$

74. **Sea la función** $g(x) = \begin{cases} 3x^2 + 6x - 3 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{6}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

Determina el área de la región limitada por esta curva, el eje X y estas rectas.

a) $x = -1,\ x = 0$ b) $x = 3,\ x = 7$ c) $x = -1,\ x = 4$

a) $f(x) = 0 \rightarrow 3x^2 + 6x - 3 = 0 \rightarrow x = -1 \pm \sqrt{2}$

$$F(x) = \int (3x^2 + 6x - 3)\,dx = x^3 + 3x^2 - 3x$$

$$\left|\int_{-1}^{0} (3x^2 + 6x - 3)\,dx\right| = |F(0) - F(-1)| = |0 - 5| = 5$$

b) $F(x) = \displaystyle\int \frac{6}{x}\,dx = 6\ln|x|$

$$\left|\int_{3}^{7} \frac{6}{x}\,dx\right| = |F(7) - F(3)| = |6\ln 7 - 6\ln 3| = 6\ln\frac{7}{3}$$

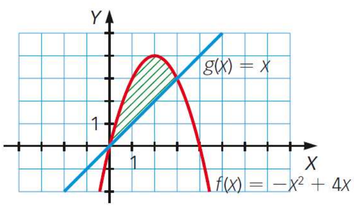
c) $$\left|\int_{-1}^{-1+\sqrt{2}} (3x^2 + 6x - 3)\,dx\right| + \left|\int_{-1+\sqrt{2}}^{1} (3x^2 + 6x - 3)\,dx\right| + \left|\int_{1}^{4} \frac{6}{x}\,dx\right| =$$

$$= \left|F(-1+\sqrt{2}) - F(-1)\right| + \left|F(1) - F(-1+\sqrt{2})\right| + \left|F(4) - F(1)\right| =$$

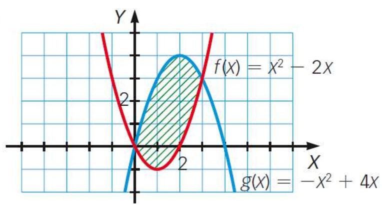
$$= \left|5 - 4\sqrt{2} - 5\right| + \left|1 - (5 - 4\sqrt{2})\right| + \left|6\ln 4 - 6\ln 1\right| = 8\sqrt{2} + 5 + 6\ln 4$$

75. **Calcula, en cada caso, el área comprendida entre las gráficas de las dos funciones.**

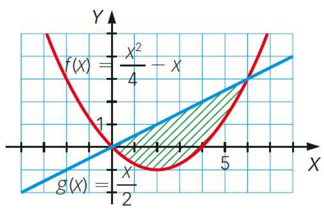
a)



b)



c)



a) Las gráficas se cortan en $x_1=0, x_2=3 \rightarrow \left|\int_0^3(-x^2+4x-x)dx\right|=\left|\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_0^3\right|=\frac{9}{2}$

b) Las gráficas se cortan en $x_1=0, x_2=3 \rightarrow \left|\int_0^3(-x^2+4x-x^2+2x)dx\right|=\left|\left[-\frac{2x^3}{3}+3x^2\right]_0^3\right|=9$

c) Las gráficas se cortan en $x_1=0, x_2=6 \rightarrow \left|\int_0^6\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}+x\right)dx\right|=\left[\frac{3x^2}{4}-\frac{x^3}{12}\right]_0^6=9$

76. **Halla el área de la región comprendida entre las gráficas de las siguientes funciones.**

a) $f(x)=2x-1$ $\quad g(x)=x^2-4$
b) $f(x)=3$ $\quad g(x)=x^2$
c) $f(x)=\sqrt{x}$ $\quad g(x)=x^2$
d) $f(x)=x^2+6x$ $\quad g(x)=x^3$
e) $f(x)=x^3-6x^2+9x$ $\quad g(x)=x^2-3x$

a) Las gráficas se cortan en $x_1=-1, x_2=3$.

$$\left|\int_{-1}^3(2x-1-x^2+4)dx\right|=\left|\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right]_{-1}^3\right|=\frac{32}{3}$$

b) Las gráficas se cortan en $x_1=-\sqrt{3}, x_2=\sqrt{3}$.

$$\left|\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(3-x^2)dx\right|=\left|\left[3x-\frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\right|=4\sqrt{3}$$

c) Las gráficas se cortan en $x_1=0, x_2=1$.

$$\left|\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx\right|=\left|\left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1\right|=\frac{1}{3}$$

d) Las gráficas se cortan en $x_1=-2, x_2=0, x_3=3$.

$$\left|\int_{-2}^0(x^3-x^2-6x)dx\right|+\left|\int_0^3(x^2+6x-x^3)dx\right|=\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-3x^2\right]_{-2}^0\right|+\left|\left[\frac{x^3}{3}+3x^2-\frac{x^4}{4}\right]_0^3\right|=\frac{253}{12}$$

e) Las gráficas se cortan en $x_1=0, x_2=3, x_3=4$.

$$\left|\int_0^3(x^3-6x^2+9x-x^2+3x)dx\right|+\left|\int_3^4(x^2-3x-x^3+6x^2-9x)dx\right|=\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{7x^3}{3}+6x^2\right]_0^3\right|+\left|\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{7x^3}{3}-6x^2\right]_3^4\right|=\frac{71}{6}$$

77. **Halla el área de la región limitada por las funciones $f(x)=\frac{10}{x}$, $g(x)=\frac{3}{2}x+2$ y $h(x)=2$.**

$$\left|\int_0^2\left(\frac{3}{2}x+2-2\right)dx\right|+\left|\int_2^5\left(\frac{10}{x}-2\right)dx\right|=\left|\left[\frac{3x^2}{4}\right]_0^2\right|+\left|\left[10\ln|x|-2x\right]_2^5\right|=|3-0|+|10\ln 5-10-(10\ln 2-4)|=10\ln\frac{5}{2}-3$$

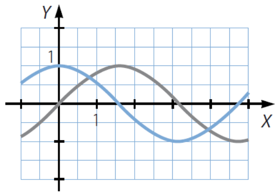
78. **Calcula el área comprendida entre $f(x)=\frac{1}{4}x^3$ y $g(x)=x$.**

Las gráficas se cortan en $x_1=0, x_2=-2, x_3=2$.

$$\left|\int_{-2}^0\left(\frac{1}{4}x^3-x\right)dx\right|+\left|\int_0^2\left(x-\frac{1}{4}x^3\right)dx\right|=\left|\left[\frac{x^4}{16}-\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^0\right|+\left|\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{16}\right]_0^2\right|=2$$

79. **Las funciones $f(x) = sen\ x$ y $g(x) = cos\ x$ determinan regiones del plano que son la repetición de una figura. Determina el área de la figura base.**

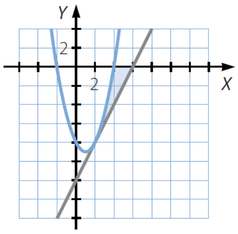
$$sen\ x = cos\ x \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} \\ x = \dfrac{5\pi}{4} \end{cases}$$



$$F(x) = \int (sen\ x - cos\ x)\ dx = -cos\ x - sen\ x$$

$$\left| \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (sen\ x - cos\ x)\ dx \right| = \left| F\left(\frac{5\pi}{4}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}\right) \right| = \left| \sqrt{2} + \sqrt{2} \right| = 2\sqrt{2}$$

80. **Dibuja la parábola $y = x^2 - 2x - 8$ y su recta tangente por el punto de abscisa 2. Halla el área de la región limitada por ambas y las abscisas 2 y 4.**



Como $y' = 2x - 2$, la recta tangente es:

$$y + 8 = 2(x - 2) \rightarrow y = 2x - 12$$

$$F(x) = \int (x^2 - 2x - 8 - (2x - 12))\ dx =$$

$$= \int (x^2 - 4x + 4)\ dx = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x$$

$$\left| \int_2^4 (x^2 - 4x + 4)\ dx \right| = \left| F(4) - F(2) \right| = \left| \frac{16}{3} - \frac{8}{3} \right| = \frac{8}{3}$$

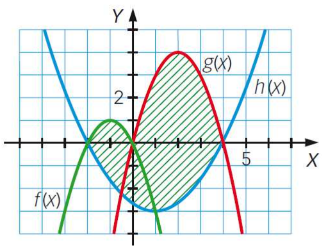
81. **Dadas las funciones $f(x) = sen\ x$ y $g(x) = sen\ 2x$ en el intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, halla el área encerrada entre estas dos funciones en dicho intervalo.**

$$2\ sen\ x\ cos\ x - sen\ x = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \frac{\pi}{3}$$

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{3}} (sen\ 2x - sen\ x) dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (sen\ x - sen\ 2x) dx \right| = \left| \left[-\frac{1}{2} cos\ 2x + cos\ x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \right| + \left| \left[-cos\ x + \frac{1}{2} cos\ 2x \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

82. **Halla el recinto máximo comprendido entre las siguientes tres funciones.**

$$f(x) = -x^2 - 2x \qquad g(x) = -x^2 + 4x \qquad h(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 2x - 8)$$



$f(x)$ y $g(x)$ cortan en $x = 0$.

$f(x)$ y $h(x)$ cortan en $x = -2$ y $x = 1$.

$g(x)$ y $h(x)$ cortan en $x = -\dfrac{1}{2}$ y en $x = 4$.

$$\left|\int_{-2}^{1}(f(x)-h(x))dx\right|+\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{4}(g(x)-h(x))dx\right|-\left(\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(g(x)-h(x))dx\right|+\left|\int_{0}^{1}(f(x)-h(x))dx\right|\right)=$$

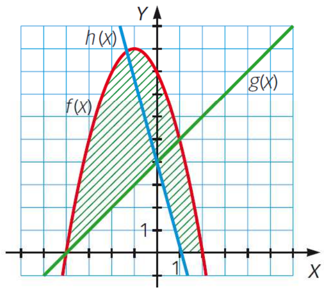
$$=\left|\int_{-2}^{1}\left(-\frac{4(x^2+x-2)}{3}\right)dx\right|+\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{4}\left(-\frac{2(2x^2-7x-4)}{3}\right)dx\right|-\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(-\frac{2(2x^2-7x-4)}{3}\right)dx\right|-\left|\int_{0}^{1}\left(-\frac{4(x^2+x-2)}{3}\right)dx\right|=$$

$$=\left|\left[\frac{-4x^3-6x^2+24x}{9}\right]_{-2}^{1}\right|+\left|\left[\frac{-4x^3+21x^2+24x}{9}\right]_{-\frac{1}{2}}^{4}\right|-\left|\left[\frac{-4x^3+21x^2+24x}{9}\right]_{-\frac{1}{2}}^{0}\right|-\left|\left[\frac{-4x^3-6x^2+24x}{9}\right]_{0}^{1}\right|=$$

$$=6+\frac{81}{4}-\frac{25}{36}-\frac{14}{9}=24$$

83. **Calcula el área de la región indicada en el dibujo sabiendo que las funciones que aparecen son:**

$$f(x)=8-2x-x^2 \qquad g(x)=x+4 \qquad h(x)=4-4x$$



$$\left|\int_{-4}^{0}(f(x)-g(x))dx\right|+\left|\int_{0}^{1}(f(x)-h(x))dx\right|+\left|\int_{1}^{2}f(x)dx\right|=$$

$$=\left|\int_{-4}^{0}(-x^2-3x+4)dx\right|+\left|\int_{0}^{1}(-x^2+2x+4)dx\right|+\left|\int_{1}^{2}(8-2x-x^2)dx\right|=$$

$$=\left|\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+4x\right]_{-4}^{0}\right|+\left|\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+4x\right]_{0}^{1}\right|+\left|\left[8x-x^2-\frac{x^3}{3}\right]_{1}^{2}\right|=\frac{56}{3}+\frac{14}{3}+\frac{8}{3}=26$$

84. **De una función $f(x)$ tenemos los siguientes datos:**

- $f(-1)=-19$
- $f'(2)=24$
- $f''(x)=18x-10$

Determina su expresión analítica.

$$F'(x)=\int(18x-10)\,dx=9x^2-10x+k$$

Si $f'(2)=24 \rightarrow 36-20+k=24 \rightarrow k=8$, y entonces: $f'(x)=9x^2-10x+8$

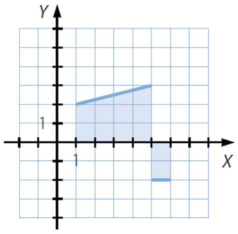
$$F(x)=\int(9x^2-10x+8)\,dx=3x^3-5x^2+8x+k$$

Si $f(-1)=-19 \rightarrow -3-5-8+k=-19 \rightarrow k=-3$

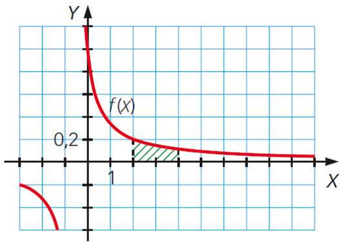
Por tanto, la función es: $f(x)=3x^3-5x^2+8x-3$

85. **¿Es posible encontrar una función tal que $\int_1^6 f(x)\,dx = 8$, pero que el área descrita por la función, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 6$ sea 12? En caso afirmativo, represéntala.**

Sí, es posible si la gráfica de la función está por encima y por debajo del eje X.
Respuesta abierta. Por ejemplo:



86. **La gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$, cuando $x > 0$, es como sigue:**



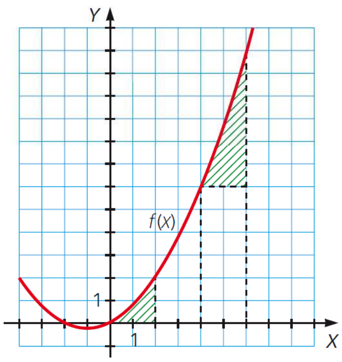
a) Halla una primitiva de la función $f(x)$.

b) Calcula el área de la región sombreada.

a) $F(x) = \int \frac{1}{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(2x+1)$

b) $\left|\int_2^4 \frac{1}{2x+1}\,dx\right| = \left|\left[\frac{1}{2}\ln(2x+1)\right]_2^4\right| = \frac{1}{2}(\ln 9 - \ln 5)$

87. **Halla el área de las figuras sombreadas, si la gráfica corresponde a la función $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{4}$.**

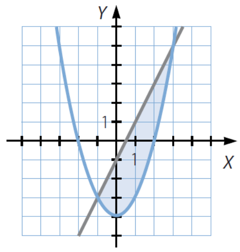


El área de la figura de la izquierda es: $\left|\int_0^2 \frac{1}{4}(x^2+x)\,dx\right| = \frac{1}{4}\cdot\left|\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^2\right| = \left|\frac{1}{4}\left(\frac{8}{3}+2\right)\right| = \frac{5}{6}$

El área de la figura de la derecha es: $\left|\int_4^6 \frac{1}{4}(x^2+x)\,dx\right| = \frac{1}{4}\cdot\left|\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_4^6\right| = \frac{1}{4}\left|(72+18)-\left(\frac{64}{3}+8\right)\right| = \frac{91}{6}$

88. **Representa gráficamente el recinto plano limitado por la parábola $y = x^2 - 4$ y la recta que pasa por los puntos $A(-1, -3)$ y $B(3, 5)$. Calcula su área.**

La ecuación de la recta es: $y = 2x - 1$



$$\int_{-1}^{3} (2x - 1 - (x^2 - 4))\,dx = \int_{-1}^{3} (-x^2 + 2x + 3)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_{-1}^{3} =$$
$$= 9 + \frac{5}{3} = \frac{32}{3}$$

89. **Sea $f(x) = |x^2 - 3x + 4|$. Calcula el área encerrada entre la grafica de $f(x)$, el eje X y las rectas $x = -2$ y $x = 5$.**

Como $f(x) = |x^2 - 3x + 4| = x^2 - 3x + 4$, el área pedida es: $\left|\int_{-2}^{5} (x^2 - 3x + 4)dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x\right]_{-2}^{5}\right| = \frac{245}{6}$

90. **Determina el área que encierra una parábola que pase por los puntos:**

$$(-2, 0) \qquad \left(\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right) \qquad (0, 6)$$

y la recta $y = x$ en el intervalo $[1, 3]$.

La ecuación de la parábola es de la forma: $y = ax^2 + bx + c$

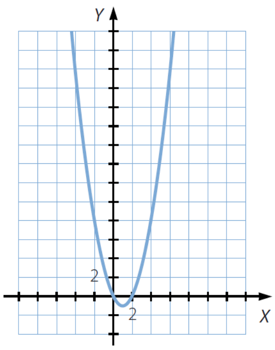
$$\left.\begin{array}{l} (-2, 0) \to 4a - 2b + c = 0 \\ \left(\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right) \to \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c = \frac{25}{4} \\ (0, 6) \to c = 6 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 2a - b = -3 \\ a + 2b = 1 \end{array}\right\} \to \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 1 \end{array}$$

Entonces, resulta que: $y = -x^2 + x + 6 \qquad -x^2 + x + 6 = x \to -x^2 + 6 = 0 \to x = \pm\sqrt{6}$

$$\int_{1}^{3} (-x^2 + x + 6 - x)\,dx = \int_{1}^{\sqrt{6}} (-x^2 + 6)\,dx + \int_{\sqrt{6}}^{3} (-x^2 + 6)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 6x\right]_{1}^{\sqrt{6}} + \left[-\frac{x^3}{3} + 6x\right]_{\sqrt{6}}^{3} = 4\sqrt{6} - \frac{17}{3} + 9 - 4\sqrt{6} = \frac{10}{3}$$

91. **El cálculo de una integral definida se relaciona con el área bajo una curva. Explica por qué se verifica entonces que:**

$$\int_{0}^{6} (x^2 - 2x)\,dx < \int_{2}^{6} (x^2 - 2x)\,dx$$



$$x^2 - 2x = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\int_{0}^{6} (x^2 - 2x)\,dx = \int_{0}^{2} (x^2 - 2x)\,dx + \int_{2}^{6} (x^2 - 2x)\,dx$$

$$\int_{0}^{2} (x^2 - 2x)\,dx < 0 \to \int_{0}^{6} (x^2 - 2x)\,dx < \int_{2}^{6} (x^2 - 2x)\,dx$$

92. **De la función $f(x) = x^2 + bx + c$ se sabe que determina un área de 36 unidades cuadradas con el eje X y las abscisas 0 y 3, y que corta al eje X, al menos, en el punto $(-3, 0)$. Halla su expresión algebraica.**

$$\int_0^3 (x^2 + bx + c)\,dx = 36 \rightarrow \left[\frac{x^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right]_0^3 = 36$$

$$\rightarrow 9 + \frac{9b}{2} + 3c = 36 \rightarrow 3b + 2c = 18$$

Si el punto $(-3, 0)$ pertenece a la gráfica de la función: $9 - 3b + c = 0 \rightarrow 3b - c = 9$,
y se obtiene que: $c = 3 \rightarrow b = 4 \rightarrow f(x) = x^2 + 4x + 3$

93. **Se sabe que la función $f(x)$ tiene simetría par y que la función $g(x)$ tiene simetría impar. Además se sabe que:**

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 6 \qquad \int_0^2 g(x)\,dx = 4$$

Calcula cada una de las siguientes integrales definidas.

a) $\int_{-2}^{2} (f(x) + g(x))\,dx$

b) $\frac{1}{4}\int_0^2 (f(x) - g(x))\,dx$

c) $\int_{-2}^{2} (f(x) + f(-x))\,dx$

d) $\int_{-2}^{0} \left(3g(x) - \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{5}\right)dx$

e) $\int_{-2}^{2} g(x)\,dx$

f) $\int_{-2}^{0} (f(x) - 2)\,dx$

g) $\int_{-2}^{0} g(x)\,dx$

h) $\int_{-1}^{1} (g(x) - g(-x))\,dx$

a) $\int_{-2}^{2}(f(x)+g(x))dx = \int_{-2}^{2} f(x)dx + \int_{-2}^{2} g(x)dx = 6+0=6$

b) $\frac{1}{4}\int_0^2(f(x)-g(x))dx = \frac{1}{4}\int_0^2 f(x)dx - \frac{1}{4}\int_0^2 g(x)dx = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$

c) $\int_{-2}^{2}(f(x)+f(-x))dx = 2\int_{-2}^{2} f(x)dx = 12$

d) $\int_{-2}^{0}\left(3g(x) - \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{5}\right)dx = 3\int_{-2}^{0} g(x)dx - \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_{-2}^{0}\frac{1}{5}\,dx = -12 - \frac{3}{2} + \frac{2}{5} = -\frac{131}{10}$

e) $\int_{-2}^{2} g(x)dx = \int_{-2}^{0} g(x)dx + \int_0^2 g(x)dx = 0$

f) $\int_{-2}^{0}(f(x)-2)dx = \int_{-2}^{0} f(x)dx - \int_{-2}^{0} 2\,dx = 3 - 4 = -1$

g) $\int_{-2}^{0} g(x)dx = -4$

h) f $\int_{-1}^{1}(g(x)-g(-x))dx = 0$

94. **Dada la función:**

$$f(x) = \begin{cases} 2ax^2 - x + 4 & \text{si } x \le 1 \\ ax + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

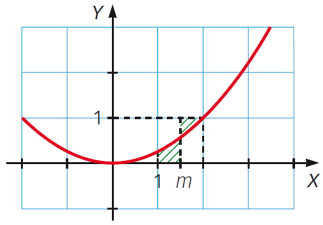
a) Calcula un valor de a para que la función $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.

b) Para el valor de a calculado, halla el área delimitada por $f(x)$ en el primer cuadrante.

a) $2ax^2 - x + 4 = ax + 2$ para $x = 1$ $\qquad$ $2a - 1 + 4 = a + 2 \rightarrow a = -1$

b) $\left|\int_0^1(-2x^2 + x + 4)dx\right| + \left|\int_1^2(-x+2)dx\right| = \left|\left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x\right]_0^1\right| + \left|\left[-\frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^2\right| = \frac{23}{6} + \frac{1}{2} = \frac{13}{3}$

95. **En la figura aparece la gráfica de la parábola $y = \frac{x^2}{4}$.**



Halla el valor de m para que las áreas de las superficies rayadas sean iguales.

$$\int_1^m \frac{x^2}{4}dx = \int_m^2\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)dx \rightarrow \left[\frac{x^3}{12}\right]_1^m = \left[x - \frac{x^3}{12}\right]_m^2 \rightarrow m = \frac{11}{6}$$

96. **Sea $f(x) = x^2 + bx$, donde b es una constante.**

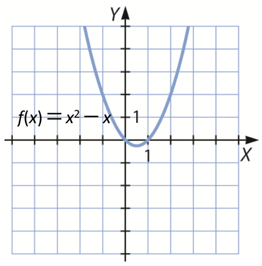
a) Encuentra el valor de b sabiendo que hay una primitiva $F(x)$ de $f(x)$ con $F(0) = 2$ y $F(3) = 20$. Encuentra también la expresión de $F(x)$.

b) Dibuja la curva $f(x)$ cuando $b = -1$ y halla el área delimitada por dicha curva y el eje de abscisas entre los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 2$.

a) $F(x) = \int (x^2 + bx)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + k$

$F(0) = k = 2 \qquad F(3) = 9 + \frac{9b}{2} + 2 = 20 \rightarrow b = 2$

$F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + 2$



b) $-\int_0^1 (x^2 - x)dx + \int_1^2 (x^2 - x)dx = -\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$

97. **Determina los valores de los parámetros a, b y c para que la función polinómica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ tenga un mínimo en el punto (3, 0) y el área limitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje X sea $\frac{27}{4}$.**

Como $x = 3$ es un mínimo sobre el eje X, entonces esta raíz es doble.

$f(x) = ax(x-3)^2 \qquad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$$\left.\begin{array}{l} f(3) = 0 \rightarrow 27a + 9b + 3c = 0 \\ f'(3) = 0 \rightarrow 27a + 6b + c = 0 \end{array}\right\} \rightarrow b = -6a,\ c = 9a$$

$$\int_0^3 (ax^3 - 6ax^2 + 9ax)dx = \left[\frac{ax^4}{4} - \frac{6ax^3}{3} + \frac{9ax^2}{2}\right]_0^3 = \frac{81a}{4} - 54a + \frac{81a}{2} = \frac{27}{4} \rightarrow a = 1$$

$a = 1,\ b = -6,\ c = 9$

98. **Sean las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = |x|$. Calcula el área del recinto limitado por $f(x)$ y $g(x)$.**

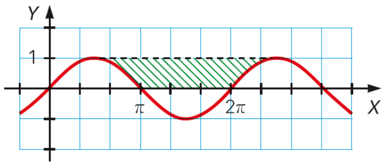
$g(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \qquad f(x) = g(x) \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1$

$$\left|\int_{-1}^0 (-x - x^2)dx\right| + \left|\int_0^1 (x - x^2)dx\right| = \left|\left[-\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0\right| + \left|\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1\right| = \frac{1}{3}$$

99. **Calcula el valor de $a > 0$ para que el área de la región acotada por las curvas $y = x^2$ e $y = ax$ sea igual a 4 unidades cuadradas.**

$ax - x^2 = x(a - x)$ $\qquad$ $\int_0^a (ax - x^2)dx = \left[\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{a^3}{6} = 4 \rightarrow a = \sqrt[3]{24} = 2\sqrt[3]{3}$

100. **La función cuya gráfica aparece en el dibujo es $f(x) = sen\ x$. Considera el recinto sombreado en la figura y realiza lo siguiente.**



a) Halla de forma aproximada su área y razona cuál puede ser su medida.
b) Calcula su valor mediante el cálculo integral.

a) El recinto sombreado corresponde aproximadamente a 4 rectángulos.

$$A = 4\left(\frac{\pi}{3} \cdot 1\right) = \frac{4\pi}{3} \simeq 4{,}18$$

b) $sen\ x = 1 \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{5\pi}{2} \end{cases}$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 - sen\ x)\ dx + \int_{\pi}^{2\pi} 1\ dx + \int_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} (1 - sen\ x)\ dx = \left[x + cos\ x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \left[x\right]_{\pi}^{2\pi} + \left[x + cos\ x\right]_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} =$$

$$= \pi - 1 - \frac{\pi}{2} + 2\pi - \pi + \frac{5\pi}{2} - 2\pi - 1 = 2\pi - 2 \simeq 4{,}28$$

101. **Dada la integral $\displaystyle\int \frac{8x - 7}{x^2 - x - 2} dx$, encuentra los valores de A y B tales que:**

$$\frac{8x - 7}{x^2 - x - 2} = \frac{8x - 7}{(x - 2)(x + 1)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 1}$$

Opera en el último miembro e iguala los polinomios. Después, resuelve la integral.

$$\frac{8x - 7}{(x - 2)(x + 1)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 1} \rightarrow 8x - 7 = A(x + 1) + B(x - 2)$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} A + B = 8 \\ A - 2B = -7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} A = 3 \\ B = 5 \end{array}$$

$$\int \frac{8x - 7}{(x - 2)(x + 1)} dx = \int \left(\frac{3}{x - 2} + \frac{5}{x + 1}\right) dx = 3\ \ln|x - 2| + 5\ \ln|x + 1| + k$$

102. **Al llover, una gota de agua cae desde una altura de 600 m. ¿Qué velocidad tendrá a los 3 segundos? Determina mediante integrales el espacio que habrá recorrido hasta ese momento.**

¿Cuánto tiempo tardará en llegar al suelo?

(La aceleración de la gravedad es 9,8 m/s²).

La velocidad viene dada por la fórmula: $v = 9{,}8t$
A los 3 segundos, la velocidad es: $v = 29{,}4$ m/s

$e = \int_0^3 9{,}8t\ dt = \left[4{,}9t^2\right]_0^3 = 44{,}1\text{ m}$ $\qquad$ $4{,}9t^2 = 600 \rightarrow t^2 = 122{,}44 \rightarrow t = 11{,}06$ s

103. **En una pared de 6 m de altura se quiere pintar de blanco la figura que encierran estas funciones.**

$$f(x) = -x^2 + 3x + 4$$
$$g(x) = 2x^2 - 3x + 4$$

a) ¿Cuál es la superficie que hay que pintar de blanco?

b) Si la pared tiene 23 m de longitud y se quiere repetir esa figura dejando 5 m entre figura y figura, ¿cuánto costaría pintar las figuras, si cada metro cuadrado de pintura blanca cuesta 2 €?

a) $f(x) = g(x) \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$

$$\int_0^1 (f(x) - g(x))dx + \left|\int_1^2 (6 - f(x))dx\right| = \left|\int_0^1 (-3x^2 + 6x)dx\right| + \left|\int_1^2 (x^2 - 3x + 2)dx\right| =$$

$$= \left|\left[-x^3 + 3x^2\right]_0^1\right| + \left|\left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_1^2\right| = \frac{11}{6} \text{ m}^2$$

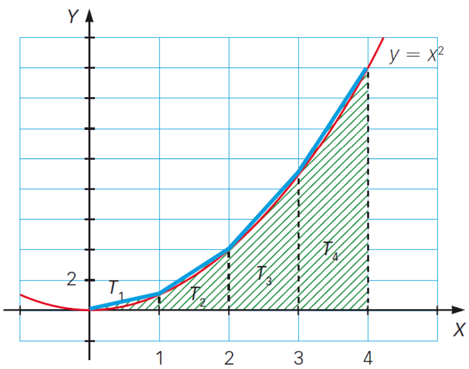
b) La superficie que se quiere pintar es $4 \cdot \frac{11}{6} \text{ m}^2 = \frac{22}{3} \text{ m}^2$. Costaría $2 \cdot \frac{22}{3} \text{ m}^2 = \frac{44}{3}$ €.

104. **La variación instantánea de la cotización, su derivada, sigue durante una semana la función $f(x) = 0{,}02x^2 + 1$, donde x es el día de la semana (0 = lunes, 1 = martes…). Si el lunes cotiza a 5 €, halla la función de cotización.**

$$F(x) = \int (0{,}02x^2 + 1)\, dx = 0{,}02 \cdot \frac{x^3}{3} + x + k$$

Si $F(0) = 5 \rightarrow k = 5 \rightarrow F(x) = 0{,}02 \cdot \frac{x^3}{3} + x + 5$

105. **La siguiente función tiene por ecuación $y = x^2$. Podemos calcular el área que queda debajo de la curva, sobre el eje X y las abscisas 0 y 4, de forma aproximada utilizando el área de los trapecios que hemos dibujado.**



El área de esos trapecios es:

$$A_1 = \frac{1}{2} \qquad A_2 = \frac{5}{2} \qquad A_3 = \frac{13}{2} \qquad A_4 = \frac{25}{2}$$

$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 22$ unidades cuadradas

a) Realiza el cálculo por medio de integrales y comprueba que el error no es excesivo.

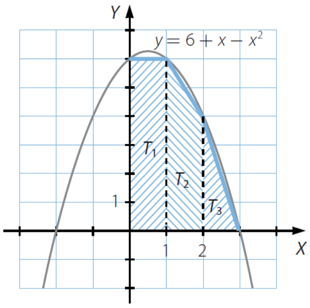
b) Calcula, mediante los dos procedimientos, el área de la región que la curva $y = 6 + x - x^2$ describe en el primer cuadrante.

a) $\int_0^4 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{64}{3} = 21{,}33$

b) $T_1 = 6 \qquad T_2 = 5 \qquad T_3 = 2$

$T_1 + T_2 + T_3 = 13$

$\int_0^3 (6 + x - x^2)\,dx = \left[6x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{27}{2} = 13{,}5$



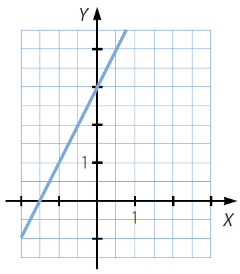
106. **Un móvil que parte con una velocidad inicial de 3 m/s se somete a una aceleración constante de 2 m/s. Eso significa que su velocidad viene expresada por la fórmula $v = 3 + 2t$, mientras que el espacio que recorre en función del tiempo es $e = 3t + t^2$.**

(Recuerda que, en un movimiento uniformemente acelerado, $\mathbf{v = v_0 + at}$ ***y*** $\mathbf{e = v_0 t + \frac{1}{2}at^2}$***).***

Representa la función velocidad y calcula:

a) El área comprendida entre la gráfica, el eje de abscisas y las abscisas 0 y 2.
b) El espacio recorrido en los dos primeros segundos.
c) El área comprendida entre la función, el eje de abscisas y las abscisas 0 y 5.
d) El espacio recorrido en los cinco primeros segundos.
e) El área comprendida entre la función, el eje de abscisas y las abscisas 2 y 6.
f) El espacio recorrido entre el segundo 2 y el segundo 6.

a) $\int_0^2 (3 + 2t)\,dt = \left[3t + t^2\right]_0^2 = 10$



b) $e = 3 \cdot 2 + 2^2 = 10$ m

c) $\int_0^5 (3 + 2t)\,dt = \left[3t + t^2\right]_0^5 = 40$

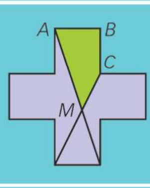
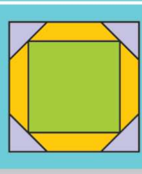
d) $e = 3 \cdot 5 + 5^2 = 40$ m

e) $\int_2^6 (3 + 2t)\,dt = \left[3t + t^2\right]_2^6 = |54 - 10| = 44$

f) $(3 \cdot 6 + 6^2) - (3 \cdot 2 + 2^2) = 54 - 10 = 44$ m

PARA PROFUNDIZAR

107. **Elige la respuesta adecuada.** (Concurso de primavera)

El área del recinto limitado por las gráficas $y = \|x - 1\|$ e $y = 2$ es:	4	3	2	1	$\frac{1}{2}$
El área de la región encerrada por la curva formada por los puntos (x, y) tales que $\|x - 1\| + \|y - 1\| = 1$ es:	2	$\frac{5}{2}$	3	π	4
Los doce lados del polígono de la figura son de igual longitud, 4, y cualesquiera dos lados consecutivos se cortan en un ángulo recto. ¿Cuál es el área del cuadrilátero verde? 	$\frac{44}{3}$	16	$\frac{88}{5}$	20	$\frac{62}{3}$
En la figura podemos ver dos cuadrados y un octógono regular que están inscritos unos en otros. Si el área del cuadrado grande es de 48 cm², el área del pequeño, en cm², es: 	40	36	32	28	24

□ $y = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \geq 1 \\ -x + 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

Las gráficas se cortan en $x_1 = -1, x_2 = 3$:

$$\left|\int_{-1}^{1}(2-(-x+1))dx\right| + \left|\int_{1}^{3}(2-(x-1))dx\right| = \left|\left[x+\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1}\right| + \left|\left[3x-\frac{x^2}{2}\right]_{1}^{3}\right| = 4$$

□ La región es un cuadrado encerrado por las rectas $y = x + 1$, $y = -x + 3$, $y = x - 1$, $y = -x + 1$.

$$\left|\int_{0}^{1}(x+1-(-x+1))dx\right| + \left|\int_{1}^{2}(-x+3-(x-1))dx\right| = \left|\int_{0}^{1}2x\,dx\right| + \left|\int_{1}^{2}(-2x+4)dx\right| = \left|\left[x^2\right]_0^1\right| + \left|\left[-x^2+4x\right]_1^2\right| = 1+1 = 2$$

□ Elegimos un sistema de referencia de forma que $A(0, 12)$, $B(4, 12)$ y $C(4, 8)$.

Podemos escribir las dos rectas como $y = -3x + 12$, $y = 2x$, que se cortan en el punto $M\left(\frac{12}{5}, \frac{24}{5}\right)$.

$$\left|\int_{0}^{\frac{12}{5}} 12-(-3x+12)dx\right| + \left|\int_{\frac{12}{5}}^{4}(12-2x)dx\right| = \left|\left[\frac{3x^2}{2}\right]_0^{\frac{12}{5}}\right| + \left|\left[12x-x^2\right]_{\frac{12}{5}}^{4}\right| = \frac{88}{5}$$

□ En la figura podemos ver dos cuadrados y un octógono regular que están inscritos unos en otros. Si el área del cuadrado grande es de 48 cm², el área del pequeño, en cm², es:

El lado del cuadrado grande mide $\sqrt{48}$ cm.

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + x^2 = h^2 \\ h = \sqrt{48} - 2x \end{array}\right\} \rightarrow x_1 = 2\sqrt{3}\left(2-\sqrt{2}\right),\ x_2 = 2\sqrt{3}\left(2+\sqrt{2}\right)$$

Descartamos la segunda solución por ser mayor que el lado del cuadrado.

El lado del cuadrado pequeño mide: $\sqrt{48} - 2\sqrt{3}\left(2-\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{6}$

El área es: $\left(2\sqrt{6}\right)^2 = 24\text{ cm}^2$.

108. **Calcula la integral** $\int sen^2\, x\, dx$.

$$\int sen^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\, sen\, 2x + k$$

109. **Calcula.**

a) $\int \sec x\, dx$

b) $\int cosec\, x\, dx$

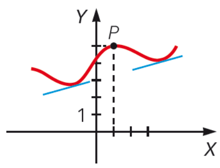
a) $$\int \sec x\, dx = \int \frac{\sec x\,(\sec x + tg\, x)}{\sec x + tg\, x}\, dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x\; tg\, x}{\sec x + tg\, x}\, dx =$$

$$= \int \frac{\dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{sen\, x}{\cos^2 x}}{\dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{sen\, x}{\cos x}}\, dx = \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \frac{sen\, x}{\cos x}\right| + k = \ln\left|sen\, x + tg\, x\right| + k$$

b) $$\int cosec\, x\, dx = \int \frac{1}{sen\, x}\, dx = \int \frac{1}{2\, sen\,\dfrac{x}{2}\cdot \cos\dfrac{x}{2}}\, dx = 2\int \frac{\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}}{\dfrac{sen\,\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}}}\, dx =$$

$$= 2\int \frac{\sec^2\dfrac{x}{2}}{tg\,\dfrac{x}{2}}\, dx = 2\ln\left|tg\,\frac{x}{2}\right| + k$$

110. **Halla la función que pasa por el punto $P(1, 5)$ y tal que la pendiente de la recta tangente en cualquiera de sus puntos viene dada por la función $g(x) = 3x^2 + 5x - 2$.**



$$f'(x) = g(x) \rightarrow f(x) = \int (3x^2 + 5x - 2)\, dx = x^3 + \frac{5x^2}{2} - 2x + k$$

$$(1, 5) \rightarrow 1 + \frac{5}{2} - 2 + k = 5 \rightarrow k = \frac{7}{2} \rightarrow f(x) = x^3 + \frac{5x^2}{2} - 2x + \frac{7}{2}$$

111. **Halla la función $f(x)$ que cumple la ecuación $f'(x) + x^2 \cdot f(x) = 0$, sabiendo que $f(1) = e$. Representa gráficamente esta función y calcula la tangente en el punto de la curva de abscisa 1.**

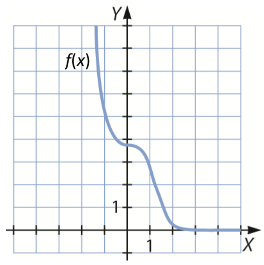
$$f'(x) + x^2 \cdot f(x) = 0 \rightarrow f'(x) = -x^2 f(x)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = -\int x^2\, dx \rightarrow \ln f(x) = -\frac{x^3}{3} + k \rightarrow f(x) = Ae^{-\frac{x^3}{3}}$$

$$f(1) = Ae^{-\frac{1}{3}} = e \rightarrow A = e^{\frac{4}{3}} \rightarrow f(x) = e^{\frac{4-x^3}{3}}$$

$$f'(x) = -x^2 e^{\frac{4-x^3}{3}} \rightarrow f'(1) = -e$$

La recta tangente es: $y - e = -e(x-1)$



112. **Calcula $A_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$, con n un número natural no nulo, y:**

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x & \text{si } 0 \le x < \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{3}{n} & \text{si } \dfrac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$

$$A_n = \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^{\frac{1}{n}} n^2x\,dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{3}{n}dx = \left[\frac{n^2x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{n}} + \left[\frac{3}{n}x\right]_{\frac{1}{n}}^1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{n} - \frac{3}{n^2}$$

113. **Halla la integral definida $\int_2^4 sen\,(x-3)^3\,dx$.**

(Olimpiadas Bachillerato. Fase Nacional)

Esta función tiene simetría impar centrada en el $x = 3$, entonces:

$$\int_2^4 sen(x-3)^3\,dx = 0$$

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. **¿Qué es el trabajo en física?**

El trabajo efectuado por un agente que ejerce una fuerza constante para producir un movimiento es el producto de la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento por la magnitud del desplazamiento, es decir, $W = F \cdot d$.

2. **Escribe dos ejemplos en los que se realice un trabajo como magnitud física.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

- Se arrastra por el suelo una silla una distancia de tres metros con una fuerza horizontal de cinco Newtons.
- Se recoge un libro del suelo, levantándolo un metro hasta la mesa, con una fuerza vertical de cuatro Newtons.

3. **Si la partícula se mueve a lo largo del eje X, ¿sería la fuerza la derivada del trabajo?**

Sí, ya que $W = \int_{x_i}^{x_f} F_x\,dx \rightarrow dW = F$.

4. **La fuerza que es necesaria para mover una partícula desde su posición de equilibrio hasta el punto x es $F_x = kx$, donde k es una constante positiva.**

a) Halla, integrando, el trabajo realizado para mover la partícula hasta el punto $x = 1$ desde su posición de equilibrio.
b) ¿Y si llevamos la misma partícula hasta el punto $x = 2$?
c) ¿Cuál es la expresión del trabajo en función del punto, x, donde se mueve la partícula?

a) $W = \int_0^1 kx\,dx = \left[k\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{k}{2}$

b) $W = \int_0^2 kx\,dx = \left[k\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2k$

c) $W = \int_0^x kx\,dx = \left[k\frac{x^2}{2}\right]_0^x = \frac{kx^2}{2}$