Derivada de una función

10

ACTIVIDADES

1. **Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = x^2 - x + 3$ en los siguientes intervalos.**

[2, 3], [2, 4], [2, 5], [2, 6], [3, 5], [3, 6]

$$T.V.M.([2,3]) = \frac{f(3) - f(2)}{3-2} = \frac{9-5}{1} = 4$$

$$T.V.M.([2,4]) = \frac{f(4) - f(2)}{4-2} = \frac{15-5}{2} = 5$$

$$T.V.M.([2,5]) = \frac{f(5) - f(2)}{5-2} = \frac{23-5}{3} = 6$$

$$T.V.M.([2,6]) = \frac{f(6) - f(2)}{6-2} = \frac{33-5}{4} = 7$$

$$T.V.M.([3,5]) = \frac{f(5) - f(3)}{5-3} = \frac{23-9}{2} = 7$$

$$T.V.M.([3,6]) = \frac{f(6) - f(3)}{6-3} = \frac{33-9}{3} = 8$$

2. **Halla la *T.V.M.* de la función $f(x) = x^2 - x + 3$ en los intervalos siguientes.**

a) $[2, 2+h]$

b) $[3, 3+h]$

a) $$T.V.M.([2,2+h]) = \frac{f(2+h) - f(2)}{2+h-2} = \frac{(2+h)^2 - (2+h) + 3 - (4-2+3)}{h} = \frac{h^2+3h}{h} = h+3$$

b) $$T.V.M.([3,3+h]) = \frac{f(3+h) - f(3)}{3+h-3} = \frac{(3+h)^2 - (3+h) + 3 - (9-3+3)}{h} = \frac{h^2+5h}{h} = h+5$$

3. **Utilizando la definición, calcula la derivada en $x = 2$ y en $x = -1$ de estas funciones.**

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$

b) $f(x) = 2x^2 + x$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

a) $$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{2+h-2} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2+h-3} - \frac{1}{2-3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{-1+h} = -1$$

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{-1+h-(-1)} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{-1+h-3} - \frac{1}{-1-3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4-4+h}{4(-4+h)h} = -\frac{1}{16}$$

b) $$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{2+h-2} = \lim_{h\to 0} \frac{2(2+h)^2 + (2+h) - (2\cdot 2^2 + 2)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2(4+h^2+4h) + 2 + h - 10}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h^2+9h}{h} = \lim_{h\to 0} (2h+9) = 9$$

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{-1+h-(-1)} = \lim_{h\to 0} \frac{2(-1+h)^2 + (-1+h) - \left[2\cdot(-1)^2 + (-1)\right]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2(1+h^2-2h) - 1 + h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h^2-3h}{h} = \lim_{h\to 0} (2h-3) = -3$$

c) $$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{2+h-2} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(2+h)^2} - \frac{1}{2^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4-(2+h)^2}{4h(2+h)^2} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4-(4+h^2+4h)}{4h(4+h^2+4h)} = \lim_{h\to 0} \frac{-h^2-4h}{16h+4h^3+16h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{-h-4}{16+4h^2+16h} = -\frac{1}{4}$$

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{-1+h-(-1)} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(-1+h)^2} - \frac{1}{(-1)^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-(1-2h+h^2)}{h(-1+h)^2} = \lim_{h\to 0} \frac{2h-h^2}{h(1-2h+h^2)} = \lim_{h\to 0} \frac{2-h}{1-2h+h^2} = 2$$

4. **Calcula la derivada de la función $f(x) = x^3 + 4$ en los siguientes puntos.**

a) $x = 1$ b) $x = -4$ c) $x = 2$ d) $x = -3$

a) $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(1+h)^3 + 4 - (1^3 + 4)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{3h^2 + 3h + h^3}{h} = \lim\limits_{h\to 0} (3h + 3 + h^2) = 3$

b) $f'(-4) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(-4+h)^3 + 4 - \left[(-4)^3 + 4\right]}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(h^3 - 12h^2 + 48h - 64) + 4 - (-64+4)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} (h^2 - 12h + 48) = 48$

c) $f'(2) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(2+h)^3 + 4 - (2^3 + 4)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{8 + h^3 + 6h^2 + 12h + 4 - 12}{h} = \lim\limits_{h\to 0} (h^2 + 6h + 12) = 12$

d) $f'(-3) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(-3+h)^3 + 4 - \left[(-3)^3 + 4\right]}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{-27 + h^3 - 9h^2 + 27h + 4 - (-27+4)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} (h^2 - 9h + 27) = 27$

5. **Halla la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = x - x^2$ en los puntos de abscisa $x = 2$ y $x = -3$.**

$f'(2) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\left[2 + h - (2+h)^2\right] - (2 - 2^2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{2 + h - (4 + 4h + h^2) - 2 + 4}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{-3h - h^2}{h} = -3$

$f(2) = 2 - 2^2 = -2$

La ecuación de la recta tangente en el punto $P(2, -2)$ es:

$y - (-2) = f'(2) \cdot (x - 2) \rightarrow y + 2 = -3(x - 2) \rightarrow y = -3x + 4$

$f'(-3) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(-3+h) - (-3+h)^2 - \left[-3 - (-3)^2\right]}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{-3 + h - (9 + h^2 - 6h) + 12}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{-h^2 + 7h}{h} = 7$

$f(-3) = -3 - (-3)^2 = -12$

La ecuación de la recta tangente en el punto $P(-3, -12)$ es:

$y - (-12) = f'(-3) \cdot (x - (-3))$

$y + 12 = 7(x + 3)$

$y = 7x + 9$

6. **Halla la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 4x + 3$ en los puntos donde corta los ejes X e Y.**

Cortes con el eje X: $(-1, 0)$, $(-3, 0)$

La derivada $f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente en el punto $P(a, f(a))$.

$f'(-1) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(-1+h)^2 + 4(-1+h) + 3 - \left[(-1)^2 + 4\cdot(-1) + 3\right]}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1 + h^2 - 2h - 4 + 4h + 3 - 1 + 4 - 3}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h^2 + 2h}{h} = 2$

$f'(-3) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(-3+h)^2 + 4(-3+h) + 3 - \left[(-3)^2 + 4\cdot(-3) + 3\right]}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{9 + h^2 - 6h - 12 + 4h + 3 - 9 + 12 - 3}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h^2 - 2h}{h} = -2$

Corte con el eje Y: $(0, 3)$

$f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(0+h)^2 + 4(0+h) + 3 - \left[(0)^2 + 4\cdot(0) + 3\right]}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h^2 + 4h + 3 - 3}{h} = 4$

7. **Utiliza la definición para calcular la función derivada de estas funciones.**

a) $f(x) = 4x^3$ b) $f(x) = \sqrt{x}$ c) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$

a) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{4(x+h)^3-4x^3}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{4(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-4x^3}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{12x^2h+12xh^2+4h^3}{h} = 12x^2$

b) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

c) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{x+h+3}-\dfrac{1}{x+3}}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x+3-(x+h+3)}{(x+3)(x+h+3)h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-h}{(x+3)(x+h+3)h} = -\dfrac{1}{(x+3)^2}$

8. **Halla las derivadas segunda y tercera de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = x^3 + 4x^2$ b) $f(x) = x^2 - x + 5$

a) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3+4(x+h)^2-(x^3+4x^2)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3+4(x^2+h^2+2xh)-x^3-4x^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3x^2h+3xh^2+h^3+4h^2+8xh}{h} = 3x^2+8x$

$f''(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x+h)-f'(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3(x+h)^2+8(x+h)-(3x^2+8x)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3(x^2+h^2+2xh)+8x+8h-3x^2-8x}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3h^2+6xh+8h}{h} = 6x+8$

$f'''(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f''(x+h)-f''(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{6(x+h)+8-(6x+8)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{6h}{h} = 6$

b) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-(x+h)+5-(x^2-x+5)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x^2+h^2+2xh-x-h+5-x^2+x-5}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(h+2x-1) = 2x-1$

$f''(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x+h)-f'(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2(x+h)-1-(2x-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2h}{h} = 2$

$f'''(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f''(x+h)-f''(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2-2}{h} = 0$

9. **Halla la derivada de estas funciones.**

a) $f(x) = 6$ b) $f(x) = x^4$ c) $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$ d) $f(x) = \dfrac{1}{x^5}$

a) $f'(x) = 0$

b) $f'(x) = 4\cdot x^{4-1} = 4x^3$

c) $f(x) = \sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{3}{4}} \to f'(x) = \dfrac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1} = \dfrac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} = \dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^5} = x^{-5} \to f'(x) = -5x^{-5-1} = -5x^{-6} = -5\dfrac{1}{x^6}$

10. **Halla la derivada de estas funciones.**

a) $f(x) = \sqrt[7]{x^4}$ b) $f(x) = x^8$ c) $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$ d) $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$

a) $f(x) = \sqrt[7]{x^4} = x^{\frac{4}{7}} \to f'(x) = \dfrac{4}{7}x^{\frac{4}{7}-1} = \dfrac{4}{7}x^{-\frac{3}{7}} = \dfrac{4}{7\sqrt[7]{x^3}}$

b) $f'(x) = 8\cdot x^{8-1} = 8x^7$

c) $f(x)=\sqrt[5]{x^3}=x^{\frac{3}{5}}\rightarrow f'(x)=\frac{3}{5}x^{\frac{3}{5}-1}=\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}=\frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$

d) $f(x)=\frac{1}{x^4}=x^{-4}\rightarrow f'(x)=-4\cdot x^{-4-1}=-4x^{-5}=\frac{-4}{x^5}$

11. **Calcula la derivada de estas funciones.**

a) $f(x)=2^x$ b) $f(x)=3^x$ c) $f(x)=4^x$

a) $f'(x)=2^x\ln 2$ b) $f'(x)=3^x\ln 3$ c) $f'(x)=4^x\ln 4$

12. **Calcula la derivada de estas funciones.**

a) $f(x)=\log_2 x$ b) $f(x)=\log_3 x$ c) $f(x)=\log_4 x$

a) $f'(x)=\frac{1}{x\ln 2}$ b) $f'(x)=\frac{1}{x\ln 3}$ c) $f'(x)=\frac{1}{x\ln 4}$

13. **Calcula la derivada de estas funciones.**

a) $f(x)=x^3+x^2-x+1$

b) $f(x)=\frac{1}{x}+x$

c) $f(x)=\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x^3}$

d) $f(x)=3^x-arc\ tg\ x$

a) $f'(x)=3x^2+2x-1$

b) $f'(x)=-\frac{1}{x^2}+1$

c) $f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$

d) $f'(x)=3^x\ln 3-\frac{1}{1+x^2}$

14. **Calcula la derivada de estas funciones.**

a) $f(x)=2x^3+4x^2-8x+9$

b) $f(x)=2\ sen\ x-3\cos x$

c) $f(x)=7\sqrt[3]{x}-3\sqrt[4]{x^3}$

d) $f(x)=\frac{1}{2x}-5x$

a) $f'(x)=6x^2+8x-8$

b) $f'(x)=2\cos x-3(-sen\ x)=2\cos x+3\ sen\ x$

c) $f'(x)=7\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}-3\cdot\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}=\frac{7}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{9}{4\sqrt[4]{x}}$

d) $f'(x)=-\frac{1}{2x^2}-5$

15. **Calcula la derivada de estas funciones.**

a) $f(x)=x\cdot\sqrt[3]{x^2}$

b) $f(x)=x\cdot e^x$

c) $f(x)=x\cdot sen\ x$

d) $f(x)=x\cdot\ln x$

e) $f(x)=sen\ x\cdot\cos x$

f) $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$

g) $f(x)=(x^2+2x)\cdot sen\ x$

h) $f(x)=(e^x-x)\cdot\ln x$

a) $f'(x)=1\cdot\sqrt[3]{x^2}+x\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x^2}+\frac{2\sqrt[3]{x^2}}{3}=\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$

b) $f'(x)=1\cdot e^x+x\cdot e^x$

c) $f'(x)=1\cdot sen\ x+x\cdot\cos x$

d) $f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$

e) $f'(x) = \cos x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x \cdot (-\operatorname{sen} x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

f) $f(x) = (x^2+1) \cdot \dfrac{1}{x} \rightarrow f'(x) = 2x \cdot \dfrac{1}{x} + (x^2+1) \cdot \dfrac{-1}{x^2} = 2 - 1 - \dfrac{1}{x^2} = 1 - \dfrac{1}{x^2}$

g) $f'(x) = (2x+2) \cdot \operatorname{sen} x + (x^2+2x) \cdot \cos x$

h) $f'(x) = (e^x - 1) \cdot \ln x + \dfrac{e^x - x}{x}$

16. Calcula la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = 3x^2 \cdot \log_2 x$

b) $f(x) = e^x \cdot \operatorname{sen} x$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \cos x$

d) $f(x) = \cos x \cdot \operatorname{tg} x$

e) $f(x) = 4x \cdot \operatorname{sen} x + x^3 \cdot \cos x$

f) $f(x) = \ln x \cdot \dfrac{1}{x^4} + x^2 \cdot e^x$

g) $f(x) = (\operatorname{sen} x - \cos x) \cdot \operatorname{tg} x$

h) $f(x) = 4x\sqrt{x} + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

a) $f'(x) = 6x \cdot \log_2 x + 3x^2 \cdot \dfrac{1}{x \ln 2} = 6x \log_2 x + \dfrac{3x}{\ln 2}$

b) $f'(x) = e^x \cdot \operatorname{sen} x + e^x \cdot \cos x = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \cdot \cos x - \sqrt[3]{x} \cdot \operatorname{sen} x$

d) $f'(x) = -\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{tg} x + \cos x \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x) = -\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{tg} x + \cos x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{-\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} + \dfrac{1}{\cos x} = \cos x$

e) $f'(x) = 4 \operatorname{sen} x + 4x \cos x + 3x^2 \cos x - x^3 \operatorname{sen} x = (4 - x^3) \operatorname{sen} x + (4x + 3x^2) \cos x$

f) $f'(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{x^4} + \ln x \cdot \dfrac{-4}{x^5} + 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = \dfrac{1}{x^5}(1 - 4 \ln x) + x\, e^x (2 + x)$

g) $f'(x) = (\cos x + \operatorname{sen} x) \operatorname{tg} x + (\operatorname{sen} x - \cos x)(1 + \operatorname{tg}^2 x)$

h) $f'(x) = 4 \cdot \sqrt{x} + 4x \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{\cos x}{x} - \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2} = 6\sqrt{x} + \dfrac{\cos x}{x} - \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}$

17. Calcula la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x+2}{x}$

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{3x+4}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2+x-3}{x+1}$

a) $f'(x) = \dfrac{1 \cdot x - (x+2) \cdot 1}{x^2} = -\dfrac{2}{x^2}$

b) $f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (3x+4) - \sqrt{x} \cdot 3}{(3x+4)^2} = \dfrac{-3x+4}{2\sqrt{x} \cdot (3x+4)^2}$

c) $f'(x) = \dfrac{(2x+1)(x+1) - (x^2+x-3) \cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x+4}{(x+1)^2}$

18. **Calcula la derivada de estas funciones.**

a) $f(x) = \dfrac{\text{sen } x}{x^3}$ b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\cos x}$ c) $f(x) = \dfrac{\text{sen } x + 2x}{x - 3}$

a) $f'(x) = \dfrac{\cos x \cdot x^3 - \text{sen } x \cdot 3x^2}{x^6} = \dfrac{x \cos x - 3 \text{ sen } x}{x^4}$

b) $f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \cos x - \sqrt{x} \cdot (-\text{sen } x)}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos x + 2x \text{ sen } x}{2\sqrt{x} \cos^2 x}$

c) $f'(x) = \dfrac{(\cos x + 2) \cdot (x - 3) - (\text{sen } x + 2x) \cdot 1}{(x-3)^2} = \dfrac{(x-3) \cdot \cos x - 6 - \text{sen } x}{(x-3)^2}$

19. **Calcula la derivada de las funciones que aparecen a continuación.**

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$ b) $f(x) = (\text{arc sen } x)^3$ c) $f(x) = \ln 4x$

a) $f'(x) = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$ b) $f'(x) = \dfrac{3(\text{arc sen } x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$ c) $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

20. **Calcula la derivada de estas funciones.**

a) $f(x) = (\cos x)^2$ b) $f(x) = tg\left(\dfrac{x}{x-5}\right)$ c) $f(x) = e^{x^2+7x-4}$

a) $f'(x) = -2 \cos x \text{ sen } x$ b) $f'(x) = \dfrac{-5}{\cos^2\left(\dfrac{x}{x-5}\right)} \cdot \dfrac{1}{(x-5)^2}$ c) $f'(x) = e^{x^2+7x-4} \cdot (2x+7)$

SABER HACER

21. **Halla el valor de *m* en la función $f(x) = \dfrac{3x + m}{mx^2}$ sabiendo que $f'(-1) = 5$.**

$f'(x) = \dfrac{3 \cdot mx^2 - (3x + m) \cdot 2mx}{m^2x^4}$

$f'(-1) = \dfrac{3m + 2m \cdot (-3 + m)}{m^2} = \dfrac{-3m + 2m^2}{m^2} = -\dfrac{3}{m} + 2 = 5 \rightarrow m = -1$

22. **Di si es derivable $f(x) = \begin{cases} kx + 2 & \text{si } x < -1 \\ x^3 - x + k & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$ en $x = -1$ según los valores de *k*.**

Una función es derivable si también es continua, así que primero analizamos si la función es continua en $x = -1$:

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -k + 2 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = k \end{array}\right\} \rightarrow$ Para que sea continua $-k + 2 = k \rightarrow k = 1$.

$f(x)$ solo es continua para $k = 1$, por tanto, solo puede ser derivable para este valor. Analizamos la derivabilidad para este valor:

$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ 3x^2 - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f'(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f'(x) = 2 \end{array}\right\} \rightarrow f(x)$ no es derivable para ningún valor de *k*.

23. **Determina la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = sen\ 2x - cos\ x$ en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{3}$.**

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\frac{2\pi}{3} + sen\frac{\pi}{3} = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = sen\frac{2\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

La ecuación de la recta tangente en el punto $P\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$ es:

$$y - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = \left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow y = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)x + \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

24. **Determina los puntos de la función $f(x) = x^3 - 3x$ cuya tangente sea horizontal.**

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

$$x = 1 \rightarrow f(1) = -2 \rightarrow A(1, -2)$$

$$x = -1 \rightarrow f(-1) = 2 \rightarrow B(-1, 2)$$

25. **¿Cuál tiene que ser el valor de k en la función $f(x) = (k-1)x^3 + x^2 - kx - 4$ si las rectas tangentes en $x = \frac{1}{3}$ y en $x = -1$ son paralelas?**

$$f'(x) = 3(k-1)x^2 + 2x - k$$

$$f'\left(\frac{1}{3}\right) = f'(-1) \rightarrow 3(k-1)\frac{1}{9} + \frac{2}{3} - k = 3(k-1) - 2 - k \rightarrow k = 2$$

26. **Escribe la ecuación de la recta tangente a la elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ en el punto $x = \frac{12}{5}$.**

$$y = \sqrt{4\left(1 - \frac{x^2}{9}\right)}$$

$$x = \frac{12}{5} \rightarrow y = \frac{6}{5}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4\left(1 - \frac{x^2}{9}\right)}} \cdot \left(\frac{-8x}{9}\right) = -\frac{4x}{9\sqrt{4\left(1 - \frac{x^2}{9}\right)}}$$

$$f'\left(\frac{12}{5}\right) = -\frac{8}{9}$$

La ecuación de la recta tangente en el punto $P\left(\frac{12}{5}, \frac{6}{5}\right)$ es:

$$y - \frac{6}{5} = -\frac{8}{9}\cdot\left(x - \frac{12}{5}\right) \rightarrow y = -\frac{8}{9}x + \frac{96}{45} + \frac{6}{5} \rightarrow y = -\frac{8}{9}x + \frac{10}{3}$$

27. **Calcula las derivadas segunda y tercera para la función $f(x) = e^{2x} + sen\ x$.**

$$f'(x) = 2e^{2x} + \cos x \rightarrow f''(x) = 4e^{2x} - sen\ x \rightarrow f'''(x) = 8e^{2x} - \cos x$$

28. Halla la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = (4x^2 + 5x - 2)^3$

b) $f(x) = \sqrt[5]{sen\, x}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{tg^3\, x}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 7x - 12}}$

a) $f'(x) = 3(4x^2 + 5x - 2)^2(8x + 5)$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{5} sen^{-\frac{4}{5}} x \cdot cos\, x = \dfrac{cos\, x}{5\sqrt[5]{sen^4 x}}$

c) $f'(x) = -\dfrac{3}{tg^4 x}(1 + tg^2 x)$

d) $f'(x) = \dfrac{-1}{3}\left(x^2 - 7x - 12\right)^{-\frac{4}{3}} \cdot (2x - 7) = \dfrac{7 - 2x}{\sqrt[3]{\left(x^2 - 7x - 12\right)^4}}$

29. Calcula la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = 5^{3x^2 - 2x + 1}$

b) $f(x) = 7^{cos\, x^2}$

a) $f'(x) = 5^{3x^2 - 2x + 1} \ln 5 \cdot (6x - 2)$

b) $f'(x) = 7^{cos\, x^2} \ln 7 \cdot 2x \cdot (-sen\, x^2) = -7^{cos\, x^2} \ln 7 \cdot 2x\, sen\, x^2$

30. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \ln\left(\sqrt{2x}\right)$

b) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

a) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2 = \dfrac{1}{2x}$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{x^2}} \cdot \dfrac{-2}{x^3} = \dfrac{-2}{x}$

31. Calcula la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = tg(2x - 5)$

b) $f(x) = cos\sqrt{x}$

a) $f'(x) = 2\left[1 + tg^2(2x - 5)\right]$

b) $f'(x) = -sen\left(\sqrt{x}\right)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

32. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = (x + 1)^x$

b) $f(x) = (x^2 + 1)^{x^3}$

a) $\ln f(x) = \ln\left[(x + 1)^x\right] = x\ln(x + 1)$

$\dfrac{f'(x)}{f(x)} = 1 \cdot \ln(x + 1) + x \cdot \dfrac{1}{x + 1}$

$f'(x) = \left[\ln(x + 1) + \dfrac{x}{x + 1}\right](x + 1)^x$

b) $\ln f(x) = \ln\left[(x^2 + 1)^{x^3}\right] = x^3 \ln(x^2 + 1)$

$\dfrac{f'(x)}{f(x)} = 3x^2 \cdot \ln(x^2 + 1) + x^3 \cdot \dfrac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x = 3x^2 \ln(x^2 + 1) + \dfrac{2x^4}{x^2 + 1}$

$f'(x) = \left[3x^2 \ln(x^2 + 1) + \dfrac{2x^4}{x^2 + 1}\right](x^2 + 1)^{x^3}$

33. **Calcula la derivada de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = arc\ sen(x^3 + x)$ b) $f(x) = arc\ tg\left(\frac{1}{x}\right)$

a) $f'(x) = \dfrac{3x^2+1}{\sqrt{1-(x^3+x)^2}}$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \dfrac{-1}{x^2} = \dfrac{-1}{x^2+1}$

34. **Calcula la derivada de estas funciones.**

a) $f(x) = e^{sen\, x^2}$ b) $f(x) = \sqrt{\ln \sqrt[3]{x}}$

a) $f'(x) = 2x\cos x^2\, e^{sen\, x^2}$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\ln\sqrt[3]{x}}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{1}{6x\sqrt{\ln\sqrt[3]{x}}}$

ACTIVIDADES FINALES

35. **Completa en tu cuaderno esta tabla con las tasas de variación media de la función $f(x) = 2x^2 - x + 1$.**

	[−3, −1]	[−5, 2]	[0, 3]	[1, 4]
T.V.M.				

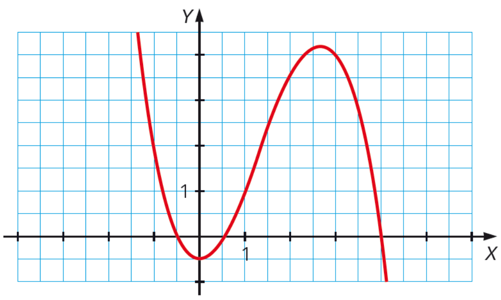
$T.V.M.([-3,-1]) = \dfrac{f(-1)-f(-3)}{-1-(-3)} = \dfrac{4-22}{2} = -9$

$T.V.M.([0,3]) = \dfrac{f(3)-f(0)}{3-0} = \dfrac{16-1}{3} = 5$

$T.V.M.([-5,2]) = \dfrac{f(2)-f(-5)}{2-(-5)} = \dfrac{7-56}{7} = -7$

$T.V.M.([1,4]) = \dfrac{f(4)-f(1)}{4-1} = \dfrac{29-2}{3} = 9$

36. **Determina la tasa de variación media de esta función en cada uno de los intervalos.**



a) [−1, 1] b) [1, 3] c) [−1, 3]

a) $T.V.M.([-1,1]) = \dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} = \dfrac{1-2}{2} = -\dfrac{1}{2}$

b) $T.V.M.([1,3]) = \dfrac{f(3)-f(1)}{3-1} = \dfrac{4-1}{2} = \dfrac{3}{2}$

c) $T.V.M.([-1,3]) = \dfrac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)} = \dfrac{4-2}{4} = \dfrac{1}{2}$

37. **Determina la tasa de variación media de cada función en los intervalos indicados.**

a) $f(x) = x$ en $[-1, 1]$

b) $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 5$ en $[3, 4]$

c) $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

a) $T.V.M.([-1, 1]) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{1 - (-1)}{1 - (-1)} = 1$

b) $T.V.M.([3, 4]) = \frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} = 7 - \frac{7}{4} = \frac{21}{4}$

c) $T.V.M.\left(\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]\right) = \frac{f(\pi) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi - \frac{\pi}{2}} = \frac{0 - 1}{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$

38. **Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = 2x^2 - x$ en el intervalo $[2, 2 + h]$.**
Utiliza el resultado para determinar la tasa de variación media de la función en los intervalos que aparecen a continuación.

a) $[2, 3]$ b) $[2, 5]$ c) $[2, 8]$ d) $[2, 10]$

$$T.V.M.\ ([2, 2+h]) = \frac{f(2+h) - f(2)}{2 + h - 2} = \frac{2(2+h)^2 - (2+h) - 6}{h} =$$
$$= \frac{8 + 8h + 2h^2 - 2 - h - 6}{h} = 7 + 2h$$

a) $T.V.M.\ ([2, 3]) = 7 + 2 \cdot 1 = 9$

b) $T.V.M.\ ([2, 5]) = 7 + 2 \cdot 3 = 13$

c) $T.V.M.([2, 8]) = 7 + 2 \cdot 6 = 19$

d) $T.V.M.([2, 10]) = 7 + 2 \cdot 8 = 23$

39. **Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo $[1, 1 + h]$. Utiliza este resultado para calcular la tasa de variación media de la función en los siguientes intervalos.**

a) $[1, 2]$ b) $[1, 3]$ c) $[1, 5]$ d) $[1, 10]$

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{1 + h - 1} = \frac{\frac{1}{1+h} - \frac{1}{1}}{h} = \frac{1 - (1+h)}{h(1+h)} = \frac{-1}{(1+h)}$$

a) $h = 1 \rightarrow \frac{-1}{(1+1)} = -\frac{1}{2}$

b) $h = 2 \rightarrow \frac{-1}{(1+2)} = -\frac{1}{3}$

c) $h = 4 \rightarrow \frac{-1}{(1+4)} = -\frac{1}{5}$

d) $h = 9 \rightarrow \frac{-1}{(1+9)} = -\frac{1}{10}$

40. **Calcula el valor que debe tener a para que la tasa de variación media de la función $f(x) = 2x^2 + ax - 5$ en el intervalo $[0, 2]$ sea 1.**

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{3 + 2a - (-5)}{2} = 4 + a = 1 \rightarrow a = -3$$

41. **Encuentra dos funciones polinómicas de segundo grado que pasen por los puntos (0, 4) y (3, 10). Comprueba que la tasa de variación media en el intervalo [0, 3] es la misma para las dos funciones.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

La función es de la forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Como la gráfica pasa por el punto (0, 4), se verifica que: $c = 4$

Al pasar también por el punto (3, 10), se cumple que: $9a + 3b + 4 = 10 \rightarrow 3a + b = 2$

Sean $f(x) = x^2 - x + 4$ y $g(x) = 2x^2 - 4x + 4$ las funciones pedidas.

$$T.V.M.\ ([0, 3]) = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{10 - 4}{3} = 2$$

$$T.V.M.\ ([0, 3]) = \frac{g(3) - g(0)}{3 - 0} = \frac{10 - 4}{3} = 2$$

42. **¿Por qué la tasa de variación media de la función $f(x) = 2x - 3$ en cualquier intervalo es siempre 2?**

Porque la gráfica de la función es una recta de pendiente 2, y esta indica su variación en cualquier intervalo.

43. **Aplica la definición de derivada para calcular las derivadas de las funciones en los puntos que se indican.**

a) $f(x) = 3x - 1$ en $x = 2$

b) $f(x) = x^2 + x$ en $x = 3$

c) $f(x) = \dfrac{4x + 3}{2}$ en $x = -1$

d) $f(x) = \dfrac{6}{x}$ en $x = 1$

e) $f(x) = (x - 1)^2$ en $x = -2$

f) $f(x) = x^3 + 5$ en $x = 0$

a) $$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3(2 + h) - 1 - 5}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6 + 3h - 6}{h} = 3$$

b) $$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(3 + h)^2 + 3 + h - 12}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{9 + 6h + h^2 + h - 9}{h} = \lim_{h\to 0} (7 + h) = 7$$

c) $$f'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1 + h) - f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{4(-1 + h) + 3}{2} + \frac{1}{2}}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-4 + 4h + 3 + 1}{2h} = 2$$

d) $$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{6}{1 + h} - 6}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6 - 6 - 6h}{h(1 + h)} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-6}{1 + h} = -6$$

e) $$f'(-2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-2 + h) - f(-2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(-2 + h - 1)^2 - 9}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{9 - 6h + h^2 - 9}{h} = \lim_{h\to 0} (-6 + h) = -6$$

f) $$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3 + 5 - 5}{h} = 0$$

44. **A partir de la definición, calcula las funciones derivadas de las funciones que se indican.**

a) $f(x) = 2x + 3$

b) $f(x) = \frac{2x - 1}{4}$

c) $f(x) = x^3$

d) $f(x) = 2x^2 - 3x$

e) $f(x) = \frac{12}{x}$

f) $f(x) = (3x^2 + 2)^2$

a) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(x+h) + 3 - (2x+3)}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{2x + 2h - 2x}{h} = 2$

b) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2(x+h) - 1}{4} - \frac{2x - 1}{4}}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{2x + 2h - 1 - 2x + 1}{4h} = \frac{1}{2}$

c) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3 - x^3}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3hx + h^2) = 3x^2$

d) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(x+h)^2 - 3(x+h) - (2x^2 - 3x)}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{2x^2 + 4hx + 2h^2 - 3x - 3h - 2x^2 + 3x}{h} = \lim_{h \to 0} (4x + 2h - 3) = 4x - 3$

e) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{12}{x+h} - \frac{12}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{12x - 12x - 12h}{hx(x+h)} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{-12}{x(x+h)} = -\frac{12}{x^2}$

f) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(3(x+h)^2 + 2)^2 - (3x^2 + 2)^2}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{9(x+h)^4 + 12(x+h)^2 + 4 - 9x^4 - 12x^2 - 4}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{9x^4 + 36hx^3 + 54h^2x^2 + 36h^3x + 9h^4 + 12x^2 + 24hx + 12h^2 - 9x^4 - 12x^2}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} (36x^3 + 54hx^2 + 36h^2x + 9h^3 + 24x + 12h) = 36x^3 + 24x$

45. **Calcula la tasa de variación media de la función $f(x) = 2x^2 - 2x + 3$ en el intervalo $[1, 1 + h]$.**

a) Utiliza el resultado para determinar la tasa de variación media en los intervalos [1, 3], [1, 5] y [1, 8].

b) Calcula el límite cuando h tiende a cero de la tasa de variación media en el intervalo $[1, 1 + h]$ y comprueba que equivale a $f'(1)$.

$T.V.M.\ ([1, 1+h]) = \frac{f(1+h) - f(1)}{1 + h - 1} = \frac{2(1+h)^2 - 2(1+h) + 3 - 3}{h} =$

$= \frac{2 + 4h + 2h^2 - 2 - 2h}{h} = 2h + 2$

a) $T.V.M.\ ([1, 3]) = 2 \cdot 2 + 2 = 6$

$T.V.M.\ ([1, 5]) = 2 \cdot 4 + 2 = 10$

$T.V.M.\ ([1, 8]) = 2 \cdot 7 + 2 = 16$

b) $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{1 + h - 1} = \lim_{h \to 0} (2h + 2) = 2 \qquad f'(x) = 4x - 2 \to f'(1) = 2$

46. Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones en el punto indicado.

a) $f(x) = (x + 2)^2 - 1$ en $x = 2$

b) $f(x) = 5 - 2x$ en $x = 0$

c) $f(x) = \dfrac{7}{x - 4}$ en $x = 1$

d) $f(x) = \sqrt{2 - 3x}$ en $x = -1$

e) $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x + 1}}$ en $x = 8$

a) $f'(x) = 2(x+2) \rightarrow f'(2) = 8$

b) $f'(x) = -2 \rightarrow f'(0) = -2$

c) $f'(x) = \dfrac{-7}{(x-4)^2} \rightarrow f'(1) = -\dfrac{7}{9}$

d) $f'(x) = \dfrac{-3}{2\sqrt{2-3x}} \rightarrow f'(-1) = -\dfrac{3}{2\sqrt{5}}$

e) $f'(x) = \dfrac{-5}{2\sqrt{(x+1)^3}} \rightarrow f'(8) = -\dfrac{5}{54}$

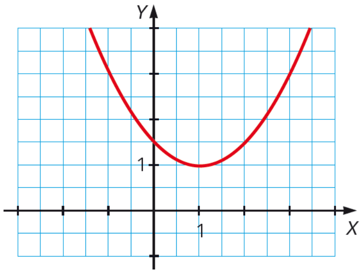
47. Determina la derivada de la función de la gráfica en los puntos indicados.

a) $x = -1$

b) $x = 0$

c) $x = 1$

d) $x = 3$



La parábola pasa por los puntos $\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$, (1, 1), (3, 3). Sustituyendo estos puntos en la ecuación cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, obtenemos la función:

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{3}{2} = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ 1 = a + b + c \\ 3 = 9a + 3b + c \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -1 \\ c = \dfrac{3}{2} \end{array}\right. \qquad f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} \rightarrow f'(x) = x - 1$$

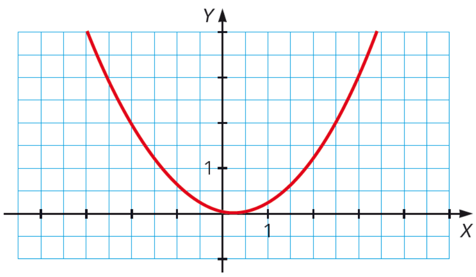
a) $f'(-1) = -2$

b) $f'(0) = -1$

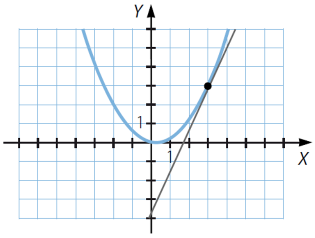
c) $f'(1) = 0$

d) $f'(3) = 2$

48. Demuestra gráficamente que la derivada de esta función en el punto de abscisa 3 tiene un valor comprendido entre 2 y 3.



La derivada de la función en el punto $x = 3$ es la pendiente de la recta tangente, y observando el dibujo de la misma se obtiene que, por cada unidad en horizontal, el avance vertical está comprendido entre 2 y 3 unidades.



49. Calcula la pendiente de la recta tangente a cada función $f(x)$ en el punto que se indica.

a) $f(x) = 3x^2 + 4x - 2$ en $x = -2$
b) $f(x) = x^3 - x^2 + x$ en $x = 3$
c) $f(x) = 4x^2 - x - 5$ en $x = 0$

a) $f'(x) = 6x + 4 \rightarrow f'(-2) = -8$ b) $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 \rightarrow f'(3) = 22$ c) $f'(x) = 8x - 1 \rightarrow f'(0) = -1$

50. Calcula la pendiente de las rectas tangentes a la curva $f(x) = x^2 - 4$ en los puntos de corte con los ejes *X* e *Y*.

$f'(x) = 2x$

La derivada $f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente en el punto $P(a, f(a))$.

Cortes con el eje *X*: (2, 0), (–2, 0).

$f'(2) = 4$ $f'(-2) = -4$

Corte con el eje *Y*: (0, –4).

$f'(0) = 0$

51. Encuentra, en cada caso, los puntos en los que la tangente a la curva $f(x)$ es horizontal.

a) $f(x) = x^3 + 3x^2$ b) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$ c) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x - 1$

La tangente a la curva $f(x)$ es horizontal cuando la pendiente de la recta tangente es cero, es decir, cuando la derivada es cero.

a) $f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2) = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -2$

Es horizontal en los puntos (0, 0) y (–2, 4).

b) $f'(x) = 3x^2 + 6x + 3 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = -1$

Es horizontal en el punto (–1, –1).

c) $f'(x) = 3x^2 + 12x + 9 = 0 \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = -3$

Es horizontal en los puntos (–1, –5) y (–3, –1).

52. Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto indicado.

a) $f(x) = 3x^2 - 1$ en $x = 1$
b) $f(x) = x^3$ en $x = 2$
c) $f(x) = x^2 - 2x$ en $x = 1$
d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $x = -1$

a) $f'(x) = 6x \rightarrow f'(1) = 6$ $f(1) = 2$

$y - 2 = f'(1) \cdot (x - 1) \rightarrow y - 2 = 6 \cdot (x - 1) \rightarrow y = 6x - 4$

b) $f'(x) = 3x^2 \rightarrow f'(2) = 12$ $\quad f(2) = 8$

$y - 8 = f'(2) \cdot (x - 2) \rightarrow y - 8 = 12 \cdot (x - 2) \rightarrow y = 12x - 16$

c) $f'(x) = 2x - 2 \rightarrow f'(1) = 0$ $\quad f(1) = -1$

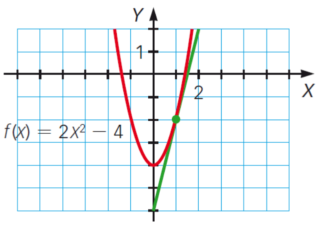
$y - (-1) = f'(1) \cdot (x - 1) \rightarrow y + 1 = 0 \rightarrow y = -1$

d) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \rightarrow f'(-1) = -1$ $\quad f(-1) = -1$

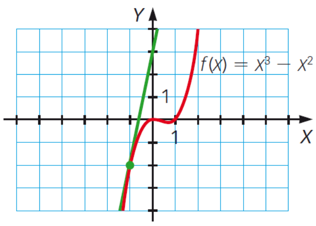
$y - (-1) = f'(-1) \cdot [x - (-1)] \rightarrow y + 1 = -1 \cdot (x + 1) \rightarrow y = -x - 2$

53. Averigua la ecuación de la recta tangente que aparece en cada gráfica.

a)



b)



a) Tenemos que hallar la ecuación de la recta tangente a la curva en $x = 1$.

$f'(x) = 4x \rightarrow f'(1) = 4$ $\quad f(1) = -2$

$y - (-2) = f'(1) \cdot (x - 1) \rightarrow y + 2 = 4 \cdot (x - 1) \rightarrow y = 4x - 6$

b) Tenemos que hallar la ecuación de la recta tangente a la curva en $x = -1$.

$f'(x) = 3x^2 - 2x \rightarrow f'(-1) = 5$ $\quad f(-1) = -2$

$y - (-2) = f'(-1) \cdot [x - (-1)] \rightarrow y + 2 = 5 \cdot (x + 1) \rightarrow y = 5x + 3$

54. Escribe la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 2x - 5$.

a) En el punto de abscisa 2.

b) En el punto de abscisa −1.

c) En el punto de ordenada −2.

d) En el punto de corte con el eje *Y*.

$f'(x) = 2x + 2$

a) $f'(2) = 6$ $\quad f(2) = 3$

$y - 3 = 6 \cdot (x - 2) \rightarrow y = 6x - 9$

b) $f'(-1) = 0$ $\quad f(-1) = -6$

$y - (-6) = 0 \rightarrow y = -6$

c) $-2 = x^2 + 2x - 5 \rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -3$

$f'(1) = 4 \rightarrow y + 2 = 4 \cdot (x - 1) \rightarrow y = 4x - 6$

$f'(-3) = -4 \rightarrow y + 2 = -4 \cdot (x + 3) \rightarrow y = -4x - 14$

d) El punto de corte con el eje *Y* es (0, −5):

$f'(0) = 2 \rightarrow y - (-5) = 2 \cdot x \rightarrow y = 2x - 5$

55. **Escribe la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3 + 3x^2$.**

a) En los puntos de corte con los ejes X e Y.

b) En el punto de abscisa 1.

c) En los puntos de ordenada 4.

$f'(x) = 3x^2 + 6x$

a) Los puntos de corte con el eje X son (0, 0) y (–3, 0).

El punto de corte con el eje Y es (0, 0).

$f'(0) = 0$

La recta tangente en (0, 0) es $y = 0$.

$f'(-3) = 9 \to y - 0 = 9 \cdot [x - (-3)] \to y = 9x + 27$

b) $f'(1) = 9$ $\qquad$ $f(1) = 4$

$y - 4 = 9 \cdot (x - 1) \to y = 9x - 5$

c) $4 = x^3 + 3x^2 \to x_1 = 1, x_2 = x_3 = -2$

El caso $x_1 = 1$ coincide con el apartado b).

$f'(-2) = 0 \to y - 4 = 0 \to y = 4$

56. **Escribe la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 2 + \ln x$ en el punto de abscisa 1.**

$f'(x) = \frac{1}{x} \to f'(1) = 1$ $\qquad$ $f(1) = 2$ $\qquad$ $y - 2 = 1 \cdot (x - 1) \to y = x + 1$

57. **Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3$ paralela a la recta $y = x + 1$.**

Como tiene que ser paralela a la recta $y = x + 1$, la pendiente debe ser 1, es decir, la derivada debe valer 1.

$$f'(x) = 3x^2 = 1 \to x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}},\ x_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}} \to y - \frac{1}{3\sqrt{3}} = x - \frac{1}{\sqrt{3}} \to y = x - \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{3}} \to y - \left(-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right) = x - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \to y = x + \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

58. **Determina, en cada caso, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ que sea paralela a la recta $3x - y + 6 = 0$.**

a) $f(x) = x^2 + 4x - 2$

b) $f(x) = \frac{3x}{1 - x}$

c) $f(x) = x^3 - 4$

d) $f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x}$

Como $y = 3x + 6$, la pendiente de la recta es 3.

a) $f'(x) = 2x + 4 = 3 \to x = -\frac{1}{2}$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{15}{4} \to y - \left(-\frac{15}{4}\right) = 3 \cdot \left[x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] \to y = 3x - \frac{9}{4}$$

b) $f'(x)=\dfrac{3(1-x)-3x\cdot(-1)}{(1-x)^2}=\dfrac{3}{(1-x)^2}=3\rightarrow\begin{cases}x_1=0\rightarrow f(0)=0\rightarrow y=3x\\ x_2=2\rightarrow f(2)=-6\rightarrow y-(-6)=3(x-2)\rightarrow y=3x-12\end{cases}$

c) $f'(x)=3x^2=3\rightarrow\begin{cases}x_1=1\rightarrow f(1)=-3\rightarrow y-(-3)=3(x-1)\rightarrow y=3x-6\\ x_2=-1\rightarrow f(-1)=-5\rightarrow y-(-5)=3[x-(-1)]\rightarrow y=3x-2\end{cases}$

d) $f'(x)=\dfrac{6x\cdot x-3x^2-1}{x^2}=\dfrac{3x^2-1}{x^2}=3\rightarrow 3x^2-1=3x^2\rightarrow -1=0\rightarrow$ No tiene solución.

59. **Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x}{x+3}$ paralela a la recta $y-x=6$.**

Como $y=x+6$, la pendiente de la recta es 1.

$$f'(x)=\frac{x+3-x}{(x+3)^2}=\frac{3}{(x+3)^2}=1\rightarrow\begin{cases}x_1=-3+\sqrt{3}\rightarrow f\left(-3+\sqrt{3}\right)=-\sqrt{3}+1\rightarrow y-\left(-\sqrt{3}+1\right)=x-\left(-3+\sqrt{3}\right)\\ x_2=-3-\sqrt{3}\rightarrow f\left(-3-\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}+1\rightarrow y=x+4+2\sqrt{3}\end{cases}$$

60. **Halla el vértice de las siguientes parábolas sabiendo que este punto de la curva tiene por tangente una recta paralela al eje X.**

a) $f(x)=x^2-4x+6$
b) $f(x)=-x^2+2x-1$
c) $f(x)=-x^2+2x+1$
d) $f(x)=2x^2+4x-3$
e) $f(x)=3x^2-6x+5$
f) $f(x)=(x-1)(2x+5)$

Como la recta tangente al vértice es horizontal, la pendiente tiene que ser cero, es decir, la derivada tiene que ser cero.

a) $f'(x)=2x-4=0\rightarrow x=2, f(2)=2$ $\quad V(2, 2)$

b) $f'(x)=-2x+2=0\rightarrow x=1, f(1)=0$ $\quad V(1, 0)$

c) $f'(x)=-2x+2=0\rightarrow x=1, f(1)=2$ $\quad V(1, 2)$

d) $f'(x)=4x+4=0\rightarrow x=-1, f(-1)=-5$ $\quad V(-1, -5)$

e) $f'(x)=6x-6=0\rightarrow x=1, f(1)=2$ $\quad V(1, 2)$

f) $f(x)=(x-1)(2x+5)=2x^2+3x-5$

$$f'(x)=4x+3=0\rightarrow x=-\frac{3}{4}, f\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{49}{8}\qquad V\left(-\frac{3}{4},-\frac{49}{8}\right)$$

61. **Calcula el punto de corte de las rectas tangentes a la curva $f(x)$ en los puntos de abscisa 2 y 0.**

a) $f(x)=x^2-x$
b) $f(x)=x^2-4x+2$
c) $f(x)=x^2+1$
d) $f(x)=\ln(x+1)$

a) $f'(x)=2x-1$

$\left.\begin{array}{l}f'(2)=3\\ f(2)=2\end{array}\right\}\rightarrow y-2=3(x-2)\rightarrow y=3x-4$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{l}f'(0)=-1\\ f(0)=0\end{array}\right\}\rightarrow y=-x$

El punto de corte de las dos rectas es:

$$\left.\begin{array}{l}y=-x\\ y=3x-4\end{array}\right\}\rightarrow 3x-4=-x\rightarrow x=1, y=-1\rightarrow P(1,-1)$$

b) $f'(x) = 2x - 4$

$$\left.\begin{array}{l} f'(2) = 0 \\ f(2) = -2 \end{array}\right\} \rightarrow y - (-2) = 0 \rightarrow y = -2 \qquad \left.\begin{array}{l} f'(0) = -4 \\ f(0) = 2 \end{array}\right\} \rightarrow y - 2 = -4x \rightarrow y = -4x + 2$$

El punto de corte de las dos rectas es:

$$\left.\begin{array}{l} y = -2 \\ y = -4x + 2 \end{array}\right\} \rightarrow y = -2,\ x = 1 \rightarrow P(1, -2)$$

c) $f'(x) = 2x$

$f'(2) = 4 \qquad f(2) = 5 \qquad y - 5 = 4(x - 2) \rightarrow y = 4x - 3$

$f'(0) = 0 \qquad f(0) = 1 \qquad y - 1 = 0 \rightarrow y = 1$

El punto de corte de las dos rectas es:

$$\left.\begin{array}{l} y = 4x - 3 \\ y = 1 \end{array}\right\} \rightarrow y = 1,\ x = 1 \rightarrow P(1, 1)$$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{x+1}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(2) = \frac{1}{3} \\ f(2) = \ln 3 \end{array}\right\} \rightarrow y - \ln 3 = \frac{1}{3}(x - 2) \rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} + \ln 3 \qquad \left.\begin{array}{l} f'(0) = 1 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow y = x$$

El punto de corte de las dos rectas es:

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} + \ln 3 \\ y = x \end{array}\right\} \rightarrow y = x = -1 + \frac{3}{2}\ln 3 \rightarrow P\left(-1 + \frac{3}{2}\ln 3, -1 + \frac{3}{2}\ln 3\right)$$

62. **¿En qué puntos de la gráfica de la función $f(x) = x^3 - x^2 + x$ la recta tangente tiene pendiente 2?**

La recta tangente tiene pendiente 2 en los puntos en los que la derivada es 2.

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 2 \rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -\frac{1}{3} \qquad A(1, 1),\ B\left(-\frac{1}{3}, -\frac{13}{27}\right)$$

63. **Considera la función $f(x) = \dfrac{x-2}{x+2}$. Halla los valores de la variable x en cada caso e interpreta geométricamente lo que se obtiene.**

a) $f'(x) = 1$

b) $f'(x) = 4$

c) $f'(x) = 0$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{4}$

$$f'(x) = \frac{x + 2 - (x - 2)}{(x+2)^2} = \frac{4}{(x+2)^2}$$

a) $f'(x) = \dfrac{4}{(x+2)^2} = 1 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -4$

La recta tangente a la curva tiene pendiente 1 en los puntos de abscisa 0 y –4.

b) $f'(x) = \dfrac{4}{(x+2)^2} = 4 \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = -3$

La recta tangente a la curva tiene pendiente 4 en los puntos de abscisa –1 y –3.

c) $f'(x)=\dfrac{4}{(x+2)^2}\neq 0$

No existen puntos en los que la recta tangente a la curva sea paralela al eje *X*.

d) $f'(x)=\dfrac{4}{(x+2)^2}=\dfrac{1}{4}\rightarrow x_1=2,\ x_2=-6$

La recta tangente a la curva tiene pendiente $\frac{1}{4}$ en los puntos de abscisa 2 y –6.

64. Halla el valor de *k* para que la función $f(x)=\dfrac{kx-5}{2x+3}$ cumpla que $f'(-1)=19$.

$$f'(x)=\frac{k\cdot(2x+3)-(kx-5)\cdot 2}{(2x+3)^2}=\frac{3k+10}{(2x+3)^2}$$

$$f'(-1)=3k+10=19\rightarrow k=3$$

65. Halla los valores de *a* y *b* para que las funciones *f*(*x*) y *g*(*x*) tengan la misma recta tangente en $x=3$.

$$f(x)=ax^2-1 \qquad g(x)=x^2+3x+b$$

$f'(x)=2ax$ $\qquad$ $g'(x)=2x+3$

Necesitamos que coincidan en el punto $x=3$, es decir, que $f(3)=g(3)$.

También necesitamos que la pendiente sea la misma en ese punto, es decir, que $f'(3)=g'(3)$.

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 9a-1=9+9+b \\ 2\cdot 3a=2\cdot 3+3 \end{array}\right\}\rightarrow a=\frac{3}{2},\ b=-\frac{11}{2}$$

66. Determina la ecuación de la recta normal de cada función *f*(*x*) en el punto indicado.

a) $f(x)=x^2-2x$ en $x=2$

b) $f(x)=2-x^2$ en $x=3$

c) $f(x)=x^3$ en $x=1$

d) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ en $x=-1$

a) $f'(x)=2x-2$ $\qquad$ $f'(2)=2$ $\qquad$ $f(2)=0$

La recta tangente es: $y=2(x-2)$

La recta normal es: $y=-\frac{1}{2}(x-2)$

b) $f'(x)=-2x$ $\qquad$ $f'(3)=-6$ $\qquad$ $f(3)=-7$

La recta tangente es: $y+7=-6(x-3)$

La recta normal es: $y+7=\frac{1}{6}(x-3)\rightarrow y=\frac{1}{6}x-\frac{15}{2}$

c) $f'(x)=3x^2$ $\qquad$ $f'(1)=3$ $\qquad$ $f(1)=1$

La recta tangente es: $y-1=3(x-1)$

La recta normal es: $y-1=-\frac{1}{3}(x-1)\rightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$

d) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ $\qquad f'(-1) = -1$ $\qquad f(-1) = -1$

La recta tangente es: $y + 1 = -(x + 1)$

La recta normal es: $y + 1 = x + 1 \rightarrow y = x$

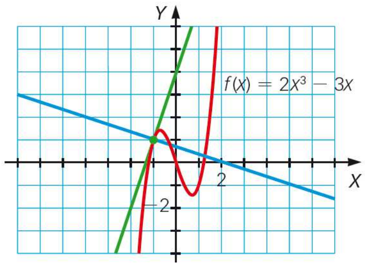
67. Determina la ecuación de la recta normal a la gráfica de $f(x) = x^2$ que sea paralela a la recta $y = 2x - 1$.

Como la pendiente de la recta paralela a la recta normal es 2, la pendiente de la recta tangente deberá ser $-\frac{1}{2}$.

$f'(x) = 2x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = -\frac{1}{4}$ $\qquad f\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}$

La ecuación de la recta normal es: $y - \frac{1}{16} = 2\left(x + \frac{1}{4}\right) \rightarrow y = 2x + \frac{9}{16}$

68. Averigua las ecuaciones de las rectas perpendiculares que aparecen en la gráfica.



$f'(x) = 6x^2 - 3$ $\qquad f'(-1) = 3$ $\qquad f(-1) = 1$

La recta tangente a la curva es: $y - 1 = 3(x + 1) \rightarrow y = 3x + 4$

La recta normal a la curva es: $y - 1 = -\frac{1}{3}(x + 1) \rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

69. Halla la recta tangente y la recta normal a las funciones en los puntos indicados.

a) $f(x) = 2^{3x-8}$ en $x = 3$
b) $f(x) = x^2 \ln(x + 3)$ en $x = -2$
c) $f(x) = (3x - 5)^6$ en $x = 2$

a) $f'(x) = 3 \cdot 2^{3x-8} \cdot \ln 2$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 2 = 6\ln 2(x - 2) \rightarrow y = 6\ln 2(x - 2) + 2$

La ecuación de la recta normal es: $y - 2 = -\frac{1}{6\ln 2}(x - 2) \rightarrow y = -\frac{1}{6\ln 2}(x - 2) + 2$

b) $f'(x) = 2x\ln(x + 3) + x^2 \cdot \frac{1}{x + 3}$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 0 = 4(x + 2) \rightarrow y = 4x + 8$

La ecuación de la recta normal es: $y - 0 = -\frac{1}{4}(x + 2) \rightarrow y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$

c) $f'(x) = 6(3x - 5)^5 \cdot 3 = 18(3x - 5)^5$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 1 = 18(x - 2) \rightarrow y = 18x - 35$

La ecuación de la recta normal es: $y - 1 = -\frac{1}{18}(x - 2) \rightarrow y = -\frac{1}{18}x + \frac{10}{9}$

70. **Determina la recta tangente y la recta normal a las funciones en los puntos indicados.**

a) $f(x) = \sqrt{2x+6}$ en $x = 5$

b) $f(x) = sen\,(2x + \pi)$ en $x = 0$

c) $f(x) = tg\,\dfrac{\pi - x}{2}$ en $x = \pi$

d) $f(x) = \ln\,(x^2 + 1)$ en $x = 0$

a) $f'(x) = \dfrac{1}{2}(2x+6)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = \dfrac{1}{\sqrt{2x+6}}$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 4 = \dfrac{1}{4}(x-5) \rightarrow y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{11}{4}$

La ecuación de la recta normal es: $y - 4 = -4(x-5) \rightarrow y = -4x + 16$

b) $f'(x) = cos\,(2x + \pi) \cdot 2$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 0 = -2(x-0) \rightarrow y = -2x$

La ecuación de la recta normal es: $y - 0 = \dfrac{1}{2}(x-0) \rightarrow y = \dfrac{1}{2}x$

c) $f'(x) = \left(1 + tg^2\,\dfrac{\pi - x}{2}\right) \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 0 = -\dfrac{1}{2}(x-\pi) \rightarrow y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{\pi}{2}$

La ecuación de la recta normal es: $y - 0 = 2(x-\pi) \rightarrow y = 2x - 2\pi$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \dfrac{2x}{x^2+1}$

La ecuación de la recta tangente es: $y = 0$

La ecuación de la recta normal es: $x = 0$

71. **Aplica la derivada de la suma a la función $f(x) = 3x^4 - 2x^2 - 7x + 5$ para calcular lo siguiente.**

a) La función derivada.

b) La derivada en los puntos de abscisa $x = -2$, $x = 0$ y $x = 1$.

a) $f'(x) = 12x^3 - 4x - 7$

b) $f'(-2) = 12 \cdot (-2)^3 - 4 \cdot (-2) - 7 = -95$ $\quad f'(0) = 12 \cdot 0^3 - 4 \cdot 0 - 7 = -7$ $\quad f'(1) = 12 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1 - 7 = 1$

72. **Considerando la función $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + x - 6$, calcula lo siguiente.**

a) $f'(x)$

b) $f'(3)$, $f'(-2)$ y $f'(0)$

c) $f'(4-8)$ y $f'(4) - f'(8)$. ¿Son iguales?

a) $f'(x) = 12x^3 - 15x^2 + 1$

b) $f'(3) = 12 \cdot 3^3 - 15 \cdot 3^2 + 1 = 190$

$f'(-2) = 12 \cdot (-2)^3 - 15 \cdot (-2)^2 + 1 = -155$

$f'(0) = 12 \cdot 0^3 - 15 \cdot 0^2 + 1 = 1$

c) $f'(4-8) = 12 \cdot (-4)^3 - 15 \cdot (-4)^2 + 1 = -1007$

$f'(4) = 12 \cdot 4^3 - 15 \cdot 4^2 + 1 = 529$

$f'(8) = 12 \cdot 8^3 - 15 \cdot 8^2 + 1 = 5\,185$

$f'(4) - f'(8) = -4\,656 \neq -1007 = f'(4-8)$

73. **Calcula la derivada de estas funciones.**

a) $f(x) = -3x^3 + 5x^2 - x + 5$

b) $f(x) = -2(x^4 - 9x^2) + x$

c) $f(x) = x(2 + x^2) + 3$

d) $f(x) = x^6 - 10x^2 - x^{-3}$

a) $f'(x) = -9x^2 + 10x - 1$

b) $f'(x) = -8x^3 + 36x + 1$

c) $f'(x) = 3x^2 + 2$

d) $f'(x) = 6x^5 - 20x + \dfrac{3}{x^4}$

74. **Utiliza las reglas de derivación para calcular la función derivada de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = 5x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 12x - 1$

b) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 5x}{x + 1}$

c) $f(x) = \dfrac{-3x^2 + 8x - 9}{2}$

a) $f'(x) = 20x^3 + 9x^2 - 14x + 12$

b) $f'(x) = \dfrac{(6x-5)(x+1) - (3x^2 - 5x)}{(x+1)^2} = \dfrac{3x^2 + 6x - 5}{(x+1)^2}$

c) $f'(x) = \dfrac{-3 \cdot 2x + 8}{2} = -3x + 4$

75. **Aplica la derivada del producto a la función $f(x) = (5x^2 - 3x) \cdot (x^4 - 2x + 5)$ para calcular lo siguiente.**

a) La función derivada.

b) La derivada en los puntos de abscisa -3, 0 y 2.

a) $f'(x) = (10x - 3)(x^4 - 2x + 5) + (4x^3 - 2)(5x^2 - 3x) = 30x^5 - 15x^4 - 30x^2 + 62x - 15$

b) $f'(-3) = 30 \cdot (-3)^5 - 15 \cdot (-3)^4 - 30 \cdot (-3)^2 + 62 \cdot (-3) - 15 = -8\,976$

$f'(0) = 30 \cdot 0^5 - 15 \cdot 0^4 - 30 \cdot 0^2 + 62 \cdot 0 - 15 = -15$

$f'(2) = 30 \cdot 2^5 - 15 \cdot 2^4 - 30 \cdot 2^2 + 62 \cdot 2 - 15 = 709$

76. **Utiliza las reglas de derivación para calcular la función derivada de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = (3x^2 - 1) \cdot 4x$

b) $f(x) = (-3x^2 + x - 1) \cdot \left(\dfrac{2x - 3}{3}\right)$

c) $f(x) = 2x \cdot (5x - 3) \cdot (x^2 - 3x + 1)$

a) $f'(x) = 6x \cdot 4x + (3x^2 - 1) \cdot 4 = 36x^2 - 4$

b) $f'(x) = (-6x + 1)\left(\dfrac{2x - 3}{3}\right) + (-3x^2 + x - 1)\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{-18x^2 + 22x - 5}{3}$

c) $f'(x) = 2\left[(5x - 3)(x^2 - 3x + 1)\right] + 2x\left[5(x^2 - 3x + 1) + (5x - 3)(2x - 3)\right] = 40x^3 - 108x^2 + 56x - 6$

77. **Aplica la regla del cociente a la función $f(x) = \dfrac{3x-1}{x^2-5x}$ para calcular lo siguiente.**

a) La función derivada.

b) La derivada en los puntos de abscisa −1, 1 y 2.

a) $f'(x) = \dfrac{3(x^2-5x)-(3x-1)(2x-5)}{(x^2-5x)^2} = \dfrac{-3x^2+2x-5}{(x^2-5x)^2}$

b) $f'(-1) = \dfrac{-3\cdot(-1)^2+2\cdot(-1)-5}{\left[(-1)^2-5\cdot(-1)\right]^2} = -\dfrac{10}{36} = -\dfrac{5}{18}$

$f'(1) = \dfrac{-3\cdot 1^2+2\cdot 1-5}{(1^2-5\cdot 1)^2} = -\dfrac{6}{16} = -\dfrac{3}{8}$ $\qquad f'(2) = \dfrac{-3\cdot 2^2+2\cdot 2-5}{(2^2-5\cdot 2)^2} = -\dfrac{13}{36}$

78. **Utiliza las reglas de derivación para calcular la función derivada de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = \dfrac{7x^3-2x+4}{x-2}$

b) $f(x) = \dfrac{6x^4}{7x^2-x+3}$

c) $f(x) = \dfrac{4}{x^2-1}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2+3-x}{2x^2-x}$

a) $f'(x) = \dfrac{(21x^2-2)(x-2)-(7x^3-2x+4)}{(x-2)^2} = \dfrac{14x^3-42x^2}{(x-2)^2}$

b) $f'(x) = \dfrac{24x^3(7x^2-x+3)-6x^4(14x-1)}{(7x^2-x+3)^2} = \dfrac{84x^5-18x^4+72x^3}{(7x^2-x+3)^2}$

c) $f'(x) = \dfrac{-4}{(x^2-1)^2}\cdot 2x = \dfrac{-8x}{(x^2-1)^2}$

d) $f'(x) = \dfrac{(2x-1)(2x^2-x)-(x^2-x+3)(4x-1)}{(2x^2-x)^2} = \dfrac{x^2-12x+3}{(2x^2-x)^2}$

79. **Realiza la derivada de la siguiente función.**

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x-1}$$

$$f'(x) = \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} + \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{2}{(x-1)^2} = -\frac{8x}{(x^2-1)^2}$$

80. **Calcula la derivada de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^7}$

b) $f(x) = \sqrt{x^3} - 3\sqrt[5]{x}$

c) $f(x) = \sqrt[5]{x}\cdot(1-\sqrt{x})$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$

a) $f'(x) = \dfrac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} = \dfrac{7\sqrt[3]{x^4}}{3}$

b) $f'(x) = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - \dfrac{3}{5}x^{-\frac{4}{5}} = \dfrac{3\sqrt{x}}{2} - \dfrac{3}{5\sqrt[5]{x^4}}$

c) $f(x) = \sqrt[5]{x} - \sqrt[10]{x^7} \rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} - \dfrac{7}{10}x^{-\frac{3}{10}} = \dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} - \dfrac{7}{10\sqrt[10]{x^3}}$

d) $f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(1-\sqrt[3]{x}) - \sqrt{x}\cdot\left(-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)}{(1-\sqrt[3]{x})^2} = \dfrac{3\sqrt[3]{x^2}-x}{6\sqrt[6]{x^7}(1-\sqrt[3]{x})^2}$

81. Calcula la derivada de las funciones que aparecen a continuación.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{5x + 2} - \sqrt{x}$

b) $f(x) = \dfrac{x - 3}{x - 1} \cdot \dfrac{x + 5}{x - 2}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 1}{2x^2 - x} + \dfrac{\sqrt{x + 5}}{x}$

a) $f'(x) = \dfrac{(2x-4)(5x+2)-(x^2-4x)5}{(5x+2)^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{5x^2+4x-8}{(5x+2)^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2+2x-15}{x^2-3x+2} \rightarrow f'(x) = \dfrac{(2x+2)(x^2-3x+2)-(x^2+2x-15)(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2} = \dfrac{-5x^2+34x-41}{(x^2-3x+2)^2}$

c) $f'(x) = \dfrac{(2x-3)(2x^2-x)-(x^2-3x-1)(4x-1)}{(2x^2-x)^2} + \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x+5}}x-\sqrt{x+5}}{x^2} = \dfrac{5x^2+4x-1}{(2x^2-x)^2} - \dfrac{x+10}{2x^2\sqrt{x+5}}$

82. Calcula la derivada de esta función.

$$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{\dfrac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 1}} + \left(\dfrac{1}{x}\right)^2}$$

$f(x) = \sqrt{\dfrac{2x^2+x-3}{x^2-1}} + \left(\dfrac{1}{x}\right)^2 = \sqrt{\dfrac{2x+3}{x+1}} + \dfrac{1}{x^2} \rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{2x+3}{x+1}}} \cdot \left(\dfrac{2(x+1)-(2x+3)}{(x+1)^2}\right) - \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{-\sqrt{x+1}}{2\sqrt{2x+3}(x+1)^2} - \dfrac{2}{x^3}$

83. Calcula la derivada de las siguientes funciones exponenciales y logarítmicas.

a) $f(x) = \ln x + e^x$

b) $f(x) = x^2 \log x - 1$

c) $f(x) = (x^2 + 3)\log_2 x$

d) $f(x) = \dfrac{\ln x + 4}{e^x}$

e) $f(x) = \dfrac{\ln x}{e^x} + 4$

f) $f(x) = 5e^x - 3^x$

a) $f'(x) = \dfrac{1}{x} + e^x$

b) $f'(x) = 2x\log x + x^2\dfrac{1}{x\ln 10} = x\left(2\log x + \dfrac{1}{\ln 10}\right)$

c) $f'(x) = 2x\log_2 x + \dfrac{x^2+3}{x\ln 2}$

d) $f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x}\cdot e^x - (\ln x + 4)\cdot e^x}{e^{2x}} = \dfrac{1 - x\ln x - 4x}{xe^x}$

e) $f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x}\cdot e^x - \ln x \cdot e^x}{e^{2x}} = \dfrac{1 - x\ln x}{xe^x}$

f) $f'(x) = 5e^x - 3^x \ln 3$

84. Deriva las siguientes funciones trigonométricas.

a) $f(x) = sen\, x \cos x$

b) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2}$

c) $f(x) = sec\, x\, cosec\, x$

d) $f(x) = x\, tg\, x$

e) $f(x) = x\, arc\cos x$

f) $f(x) = \dfrac{1}{tg\, x}$

a) $f'(x) = \cos^2 x - sen^2 x$

b) $f'(x) = \dfrac{-sen\, x \cdot x^2 - \cos x \cdot 2x}{x^4} = \dfrac{-x\, sen\, x - 2\cos x}{x^3}$

c) $f'(x) = \dfrac{sen\, x}{\cos^2 x} \cdot cosec\, x + sec\, x \cdot \left(-\dfrac{\cos x}{sen^2\, x}\right) = \dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{sen^2\, x}$

d) $f'(x) = 1 \cdot tg\, x + x \cdot (1 + tg^2\, x) = x + tg\, x + x\, tg^2\, x$

e) $f'(x) = 1 \cdot arc\cos x + x \cdot \left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = arc\cos x - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

f) $f'(x) = -\dfrac{1 + tg^2\, x}{tg^2\, x}$

85. Calcula la derivada de las siguientes funciones trigonométricas.

a) $f(x) = 2x + arc\, sen\, x + arc\cos x$

b) $f(x) = (1 + x^2)\, arc\, tg\, x$

c) $f(x) = \ln x \cdot tg\, x$

d) $f(x) = e^x\, sen\, x$

e) $f(x) = \dfrac{\cos x}{2 - x}$

a) $f'(x) = 2 + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2$

b) $f'(x) = 2x \cdot arc\, tg\, x + (1 + x^2) \cdot \dfrac{1}{1+x^2} = 1 + 2x\, arc\, tg\, x$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{x} \cdot tg\, x + \ln x \cdot (1 + tg^2\, x)$

d) $f'(x) = e^x \cdot sen\, x + e^x \cdot \cos x = e^x (sen\, x + \cos x)$

e) $f'(x) = \dfrac{-sen\, x(2-x) - \cos x \cdot (-1)}{(2-x)^2} = \dfrac{(x-2)\, sen\, x + \cos x}{(2-x)^2}$

86. Calcula las seis primeras derivadas de las funciones *f*(*x*) = *sen x* y *g*(*x*) = *cos x*.

$f(x) = sen\, x \rightarrow f'(x) = \cos x \rightarrow f''(x) = -sen\, x \rightarrow f'''(x) = -\cos x \rightarrow f^{IV}(x) = sen\, x$
$\rightarrow f^{V}(x) = \cos x \rightarrow f^{VI}(x) = -sen\, x$

$f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = -sen\, x \rightarrow f''(x) = -\cos x \rightarrow f'''(x) = sen\, x \rightarrow f^{IV}(x) = \cos x$
$\rightarrow f^{V}(x) = -sen\, x \rightarrow f^{VI}(x) = -\cos x$

87. Determina las tres primeras derivadas de cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^4 + 7x^3$

b) $f(x) = \sqrt{x^3 - 4x}$

c) $f(x) = sen\, x^2$

d) $f(x) = e^{2x}$

a) $f'(x) = 4x^3 + 21x^2$ $\quad f''(x) = 12x^2 + 42x$ $\quad f'''(x) = 24x + 42$

b) $f'(x) = \dfrac{3x^2 - 4}{2\sqrt{x^3 - 4x}}$ $\quad f''(x) = \dfrac{3x^4 - 24x^2 - 16}{4(x^3 - 4x)^{\frac{3}{2}}}$ $\quad f'''(x) = \dfrac{-3(x^6 - 20x^4 - 80x^2 + 64)}{8(x^3 - 4x)^{\frac{5}{2}}}$

c) $f'(x) = 2x \cos x^2$ $f''(x) = 2\cos x^2 - 4x^2 \operatorname{sen} x^2$ $f'''(x) = -12x \operatorname{sen} x^2 - 8x^3 \cos x^2$

d) $f'(x) = 2e^{2x}$ $f''(x) = 4e^{2x}$ $f'''(x) = 8e^{2x}$

88. Calcula las derivadas primera, segunda y tercera de estas funciones.

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$

b) $f(x) = \sqrt{x-2}$

c) $f(x) = \ln 2x$

d) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x + \cos x}$

a) $f'(x) = 3x^2 + 4x + 1$ $f''(x) = 6x + 4$ $f'''(x) = 6$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}$ $f''(x) = -\dfrac{1}{4\sqrt{(x-2)^3}}$ $f'''(x) = \dfrac{3}{8\sqrt{(x-2)^5}}$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ $f'''(x) = \dfrac{2}{x^3}$

d) $f'(x) = (\cos x - \operatorname{sen} x)e^{\operatorname{sen} x + \cos x}$

$f''(x) = (\cos x - \operatorname{sen} x)^2 e^{\operatorname{sen} x + \cos x} - e^{\operatorname{sen} x + \cos x}(\operatorname{sen} x + \cos x)$

$f'''(x) = e^{\operatorname{sen} x + \cos x}\left[(\cos x - \operatorname{sen} x)^3 - 3(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) - (\cos x - \operatorname{sen} x)\right]$

89. Encuentra los valores donde se anula la derivada segunda de las siguientes funciones.

a) $f(x) = -3x^3 + 4x^2 - 3x + 1$

b) $f(x) = \ln(x^2 + 2)$

a) $f'(x) = -9x^2 + 8x - 3$ $f''(x) = -18x + 8 = 0 \rightarrow x = \dfrac{4}{9}$

b) $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 2}$ $f''(x) = \dfrac{-2x^2 + 4}{(x^2 + 2)^2} = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

90. Dada $f(x) = \dfrac{x^2}{x+3}$ halla el valor de x en cada caso.

a) $f'(x) = 0$

b) $f''(x) = 0$

a) $f'(x) = \dfrac{2x(x+3) - x^2}{(x+3)^2} = \dfrac{x^2 + 6x}{(x+3)^2} = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = -6$

b) $f''(x) = \dfrac{(2x+6)(x+3)^2 - 2(x^2 + 6x)(x+3)}{(x+3)^4} = \dfrac{18}{(x+3)^3} \neq 0$

No existe ningún valor de x que anule la segunda derivada.

91. Calcula la derivada n-ésima, $f^n(x)$, de esta función.

$$f(x) = \frac{2}{x-1}$$

Calculamos las primeras derivadas:

$f'(x) = -2 \cdot (x-1)^{-2}$ $f''(x) = 4(x-1)^{-3}$ $f'''(x) = -12(x-1)^{-4}$ $f^{IV}(x) = 48(x-1)^{-5}$

La derivada n-ésima es de la forma:

$f^n(x) = (-1)^n 2 \cdot n!(x-1)^{-(n+1)}$

92. **Escribe las funciones elementales que componen estas funciones y halla sus derivadas.**

a) $f(x) = \ln(2x^2)$
b) $f(x) = \log_3(x^2 - 1)$
c) $f(x) = 10^{x+3}$
d) $f(x) = e^{3x}$
e) $f(x) = \cos(3x - 1)$
f) $f(x) = \mathit{sen}\,(x^2 - 3)$

a) $f(x) = g[h(x)]$, donde $g(x) = \ln x$ y $h(x) = 2x^2 \rightarrow f'(x) = \frac{2}{x}$

b) $f(x) = g[h(x)]$, donde $g(x) = \log_3 x$ y $h(x) = x^2 - 1 \rightarrow f'(x) = \frac{2x}{(x^2-1)\ln 3}$

c) $f(x) = g[h(x)]$, donde $g(x) = 10^x$ y $h(x) = x + 3 \rightarrow f'(x) = 10^{x+3}\ln 10$

d) $f(x) = g[h(x)]$, donde $g(x) = e^x$ y $h(x) = 3x \rightarrow f'(x) = 3e^{3x}$

e) $f(x) = g[h(x)]$, donde $g(x) = \cos x$ y $h(x) = 3x - 1 \rightarrow f'(x) = -3\,\mathit{sen}(3x-1)$

f) $f(x) = g[h(x)]$, donde $g(x) = \mathit{sen}\,x$ y $h(x) = x^2 - 3 \rightarrow f'(x) = 2x\cos(x^2-3)$

93. **Escribe las funciones que componen las siguientes funciones y halla sus derivadas.**

a) $f(x) = \log_3(2x + 1)$
b) $f(x) = (3x^2 - 3x + 1)^4$
c) $f(x) = \mathit{sen}\,\sqrt{x}$
d) $f(x) = \mathit{arc\,tg}\,e^x$
e) $f(x) = 2^{3x-4}$
f) $f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 1}$
g) $f(x) = \cos \ln x$
h) $f(x) = 3^{\cos x}$

a) $g(x) = \log_3 x$ y $h(x) = 2x + 1$
$f'(x) = \frac{1}{(2x+1)\ln 3}\cdot 2 = \frac{2}{(2x+1)\ln 3}$

b) $g(x) = x^4$ y $h(x) = 3x^2 - 3x + 1$
$f'(x) = 4(3x^2 - 3x + 1)^3(6x - 3)$

c) $g(x) = \mathit{sen}\,x$ y $h(x) = \sqrt{x}$
$f'(x) = \cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

d) $g(x) = \mathit{arc\,tg}\,x$ y $h(x) = e^x$
$f'(x) = \frac{1}{1+(e^x)^2}\cdot e^x = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$

e) $g(x) = 2^x$ y $h(x) = 3x - 4$
$f'(x) = 2^{3x-4}\cdot\ln 2\cdot 3$

f) $g(x) = \sqrt[4]{x}$ y $h(x) = x^2 - 1$
$f'(x) = \frac{1}{4}(x^2-1)^{-\frac{3}{4}}\cdot 2x = \frac{x}{2\sqrt[4]{(x^2-1)^3}}$

g) $g(x) = \cos x$ y $h(x) = \ln x$
$f'(x) = -\mathit{sen}\ln x\cdot\frac{1}{x} = -\frac{\mathit{sen}\ln x}{x}$

h) $g(x) = 3^x$ y $h(x) = \cos x$
$f'(x) = 3^{\cos x}\cdot\ln 3\cdot(-\mathit{sen}\,x)$

94. **Aplica la regla de la cadena para calcular las derivadas de estas funciones exponenciales y logarítmicas.**

a) $f(x) = \ln\frac{x^3}{2x+1}$
b) $f(x) = e^x \ln x$
c) $f(x) = e^{\frac{3x^2-1}{x}}$
d) $f(x) = \frac{e^{4x+1}}{1+x^4}$
e) $f(x) = \log_2\frac{2x^2}{x-7}$
f) $f(x) = 3^{\ln(x^4+2)}$
g) $f(x) = \frac{\ln x^3}{e^{-x^2-x}}$
h) $f(x) = \ln\frac{e^{3x}+e^x}{e^{\frac{1}{x}}}$

a) $f'(x) = \frac{2x+1}{x^3}\cdot\frac{3x^2(2x+1)-2x^3}{(2x+1)^2} = \frac{4x+3}{x(2x+1)}$

b) $f'(x) = e^x\ln x + \frac{e^x}{x}$

c) $f'(x)=e^{\frac{3x^2-1}{x}}\left(\dfrac{6x\cdot x-(3x^2-1)}{x^2}\right)=e^{\frac{3x^2-1}{x}}\left(\dfrac{3x^2+1}{x^2}\right)$

d) $f'(x)=\dfrac{4e^{4x+1}(1+x^4)-4x^3e^{4x+1}}{(1+x^4)^2}=\dfrac{4e^{4x+1}(1-x^3+x^4)}{(1+x^4)^2}$

e) $f'(x)=\dfrac{x-7}{2x^2}\cdot\dfrac{1}{\ln 2}\cdot\dfrac{4x(x-7)-2x^2}{(x-7)^2}=\dfrac{x-14}{x(x-7)\ln 2}$

f) $f'(x)=3^{\ln(x^4+2)}\ln 3\cdot\dfrac{1}{x^4+2}\cdot 4x^3$

g) $f'(x)=\dfrac{\dfrac{3}{x}e^{-x^2-x}-\ln x^3\cdot e^{-x^2-x}\cdot(-2x-1)}{e^{-2x^2-2x}}=\dfrac{e^{x^2+x}\left[3+(2x^2+x)\ln x^3\right]}{x}$

h) $f'(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{3x}+e^x}\cdot\dfrac{(3e^{3x}+e^x)e^{\frac{1}{x}}-(e^{3x}+e^x)\cdot\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{2}{x}}}=3+\dfrac{1}{x^2}$

95. **Aplica la regla de la cadena para calcular las siguientes derivadas de funciones trigonométricas.**

a) $f(x)=sen\ 3x^2$

b) $f(x)=cos\ (x^2+1)$

c) $f(x)=tg\ (x^2-3x)$

d) $f(x)=sen\sqrt{x^2+3x}$

e) $f(x)=cos\ \dfrac{x-1}{x}$

f) $f(x)=tg\sqrt{x-1}$

g) $f(x)=-sen\ \dfrac{x}{-x^4+x-1}$

h) $f(x)=tg\ \dfrac{2}{\sqrt{1-x}}$

a) $f'(x)=6x\ cos\ 3x^2$

b) $f'(x)=-2x\ sen(x^2+1)$

c) $f'(x)=\left[1+tg^2(x^2-3x)\right]\cdot(2x-3)$

d) $f'(x)=cos\sqrt{x^2+3x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+3x}}\cdot(2x+3)$

e) $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\ sen\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$

f) $f'(x)=\left(1+tg^2\sqrt{x-1}\right)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$

g) $f'(x)=-cos\left(\dfrac{x}{-x^4+x-1}\right)\cdot\dfrac{3x^4-1}{(-x^4+x-1)^2}$

h) $f'(x)=\left(1+tg^2\dfrac{2}{\sqrt{1-x}}\right)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{(1-x)^3}}$

96. **Halla la derivada de estas funciones.**

a) $f(x)=(2x+1)^3\cdot 3^x$

b) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-3}{x^3}}$

c) $f(x)=\dfrac{x^2-3}{\sqrt{x^3}}$

d) $f(x)=\dfrac{2x-3}{e^x}$

e) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{x^3}$

f) $f(x)=x^2-\dfrac{3}{\sqrt{x^3}}$

a) $f'(x) = 3(2x+1)^2 \cdot 2 \cdot 3^x + (2x+1)^3 \cdot 3^x \cdot \ln 3 = [6 + (2x+1)\ln 3] \cdot (2x+1)^2 \cdot 3^x$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{x^2-3}{x^3}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \dfrac{2x \cdot x^3 - (x^2-3) \cdot 3x^2}{x^6} = \dfrac{-x^2+9}{2x^4} \cdot \sqrt{\dfrac{x^3}{x^2-3}}$

c) $f'(x) = \dfrac{2x \cdot \sqrt{x^3} - (x^2-3) \cdot \dfrac{1}{2} \cdot (x^3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3x^2}{x^3} = \dfrac{4x^3 - 3x(x^2-3)}{2x^2\sqrt{x^3}} = \dfrac{x^2+9}{2x^2\sqrt{x}}$

d) $f'(x) = \dfrac{2 \cdot e^x - (2x-3) \cdot e^x}{e^{2x}} = \dfrac{5-2x}{e^x}$

e) $f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{2} \cdot (x^2-3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \cdot x^3 - \sqrt{x^2-3} \cdot 3x^2}{x^6} = \dfrac{x^2 - 3(x^2-3)}{x^4\sqrt{x^2-3}} = \dfrac{-2x^2+9}{x^4\sqrt{x^2-3}}$

f) $f'(x) = 2x + \dfrac{3 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot (x^3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3x^2}{x^3} = 2x + \dfrac{9x^2}{2x^3\sqrt{x^3}} = 2x + \dfrac{9}{2x^2\sqrt{x}}$

97. **Aplica la regla de la cadena para calcular las siguientes derivadas de funciones potenciales.**

a) $f(x) = (3x^4 - 2x + 1)^5$

b) $f(x) = \left(\dfrac{x}{1-x^3}\right)^5$

c) $f(x) = \left(\sqrt[3]{x^3-1}\right)^5$

d) $f(x) = (1 + 2e^x)^4$

e) $f(x) = \ln^4 (x^2-1)^3$

f) $f(x) = (1 - 3e^x)^6$

g) $f(x) = sen^2\, x^2$

h) $f(x) = cos^3\, (x^2 - 7x + 1)$

i) $f(x) = tg^2\, (x^3 - 8)$

j) $f(x) = \left(sen\, \dfrac{1}{x} + cos\, \dfrac{1}{x}\right)^3$

a) $f'(x) = 5(3x^4 - 2x + 1)^4 (12x^3 - 2)$

b) $f'(x) = 5\left(\dfrac{x}{1-x^3}\right)^4 \left(\dfrac{1 - x^3 - x \cdot (-3x^2)}{(1-x^3)^2}\right) = \dfrac{5x^4(1+2x^3)}{(1-x^3)^6}$

c) $f'(x) = 5x^2(x^3-1)^{\frac{2}{3}}$

d) $f'(x) = 8(1+2e^x)^3 e^x$

e) $f'(x) = 4\ln^3(x^2-1)^3 \cdot \dfrac{1}{(x^2-1)^3} \cdot 3(x^2-1)^2 \cdot 2x = \dfrac{24x\ln^3(x^2-1)^3}{x^2-1}$

f) $f'(x) = -18e^x(1-3e^x)^5$

g) $f'(x) = 4x\, sen\, x^2\, cos\, x^2 = 2x\, sen(2x^2)$

h) $f'(x) = -3\, cos^2(x^2 - 7x + 1) \cdot sen(x^2 - 7x + 1) \cdot (2x - 7)$

i) $f'(x) = 6x^2\, tg(x^3 - 8) \cdot [1 + tg^2(x^3 - 8)]$

j) $f'(x) = \dfrac{3}{x^2}\left(sen\, \dfrac{1}{x} + cos\, \dfrac{1}{x}\right)^2 \left(sen\, \dfrac{1}{x} - cos\, \dfrac{1}{x}\right)$

98. Aplica la regla de la cadena para determinar la función derivada de estas funciones.

a) $f(x) = \ln tg\ x$

b) $f(x) = \sqrt{\cos x}$

c) $f(x) = \log_2 x^2$

d) $f(x) = sen\ (\cos x)$

e) $f(x) = arc\ tg\ x^2$

f) $f(x) = tg\ \ln x$

g) $f(x) = \cos \sqrt{x}$

h) $f(x) = \log_2 x^2$

i) $f(x) = \cos\ (sen\ x)$

j) $f(x) = arc\ tg^2\ x$

a) $f'(x) = \dfrac{1}{tg\ x} \cdot (1 + tg^2\ x)$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{2}(\cos\ x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-sen\ x) = -\dfrac{sen\ x}{2\sqrt{\cos\ x}}$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 \cdot \ln 2} \cdot 2x = \dfrac{2}{x \ln 2}$

d) $f'(x) = \cos\ (\cos\ x) \cdot (-sen\ x)$

e) $f'(x) = \dfrac{1}{1 + (x^2)^2} \cdot 2x = \dfrac{2x}{1 + x^4}$

f) $f'(x) = (1 + tg^2 \ln x) \cdot \dfrac{1}{x}$

g) $f'(x) = \left(-sen\ \sqrt{x}\right) \cdot \dfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = -\dfrac{sen\ \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

h) $f'(x) = 2 \log_2 x \cdot \dfrac{1}{x \cdot \ln 2}$

i) $f'(x) = -sen\ (sen\ x) \cdot \cos\ x$

j) $f'(x) = 2\ arc\ tg\ x \cdot \dfrac{1}{1 + x^2}$

99. Deriva las siguientes funciones.

a) $f(x) = e^{(\sqrt{x}+1)^2}$

b) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2 - 1}{e^{2x}}\right)$

c) $f(x) = \sqrt{2e^x + \log_2 3x}$

d) $f(x) = [\ln(\ln x)]^2$

e) $f(x) = 3\ sen\ x^2 + 2\ sen^2\ x$

f) $f(x) = sec\ (x^3 + 1)^2$

g) $f(x) = -\cos(sen(tg\ x^2))$

h) $f(x) = \ln \dfrac{sen\ x^2}{\cos 2x}$

i) $f(x) = e^{2x} \cdot \cos x^2$

j) $f(x) = \sqrt[3]{\cos^2 x^3}$

a) $f'(x) = e^{(\sqrt{x}+1)^2} \dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}}$

b) $f'(x) = \dfrac{2x - 2x^2 + 2}{x^2 - 1}$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2e^x + \log_2 3x}}\left(2e^x + \dfrac{1}{x \ln 2}\right)$

d) $f'(x) = 2[\ln(\ln x)] \cdot \dfrac{1}{\ln x} \cdot \dfrac{1}{x}$

e) $f'(x) = 6x \cos x^2 + 4\ sen\ x \cos x$

f) $f'(x) = \dfrac{6\ sen(x^3+1)^2 \cdot (x^3+1)x^2}{\cos^2(x^3+1)^2}$

g) $f'(x) = 2x\ sen\left[sen\left(tg\ x^2\right)\right]\cos\left(tg\ x^2\right)\left(1 + tg^2 x^2\right)$

h) $f'(x) = \dfrac{2x \cos x^2 \cos 2x + 2\ sen\ x^2 sen\ 2x}{sen\ x^2 \cos 2x}$

i) $f'(x) = 2e^{2x} \cos x^2 - 2xe^{2x}\ sen\ x^2$

j) $f'(x) = \dfrac{-2x^2\ sen\ x^3}{\sqrt[3]{\cos x^3}}$

100. **Aplica la regla de la cadena para calcular la derivada de estas funciones.**

a) $f(x) = \left(\frac{2x^4}{5} - \frac{3x^3}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x}{2} + \frac{2}{3}\right)^5$

b) $f(x) = \sqrt{sen^3 x - cos^2(3x - 1) + tg\,\frac{-3}{x^2 + 2}}$

c) $f(x) = tg^4\left(\frac{\sqrt{4x^2 + 10x - 1}}{x - 16}\right)$

d) $f(x) = \ln\left(\frac{sen^2 x + cos^2 x}{sen^2 x - cos^2 x} + tg^2 x\right)$

e) $f(x) = \left(\frac{\sqrt[3]{-3x^2 + 10x - 1}}{\sqrt{x^4 - 4}}\right)^{x^2+4}$

a) $f'(x) = 5\left(\frac{2x^4}{5} - \frac{3x^3}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x}{2} + \frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{8x^3}{5} - \frac{9x^2}{2} - \frac{2x}{3} + \frac{1}{2}\right)$

b) $f'(x) = \dfrac{\left[3\,sen^2 x\,cos\,x + 6\,cos(3x-1)\,sen(3x-1) + 6x\left(1 + tg^2\left(\frac{-3}{x^2+2}\right)\right)\frac{1}{(x^2+2)^2}\right]}{2\sqrt{sen^3 x - cos^2(3x-1) + tg\,\frac{-3}{x^2+2}}}$

c) $f'(x) = 4\,tg^3\left(\frac{\sqrt{4x^2+10x-1}}{x-16}\right)\left(1 + tg^2\left(\frac{\sqrt{4x^2+10x-1}}{x-16}\right)\right)\cdot\dfrac{\frac{4x+5}{\sqrt{4x^2+10x-1}}(x-16) - \sqrt{4x^2+10x-1}}{(x-16)^2}$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{sen^2 x - cos^2 x} + tg^2 x}\cdot\left(\frac{-2\,sen\,2x}{(sen^2 x - cos^2 x)^2} + 1 + tg^2 x\right)$

e) $\ln f(x) = (x^2+4)\left(\frac{1}{3}\ln(-3x^2+10x-1) - \frac{1}{2}\ln(x^4-4)\right)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2x\ln\left(\frac{\sqrt[3]{-3x^2+10x-1}}{\sqrt{x^4-4}}\right) + (x^2+4)\left[\frac{-6x+10}{3(-3x^2+10x-1)} - \frac{4x^3}{2(x^4-1)}\right]$$

$$f'(x) = \left(2x\ln\left(\frac{\sqrt[3]{-3x^2+10x-1}}{\sqrt{x^4-4}}\right) + (x^2+4)\left[\frac{-6x+10}{3(-3x^2+10x-1)} - \frac{2x^3}{(x^4-1)}\right]\right)\cdot\left(\frac{\sqrt[3]{-3x^2+10x-1}}{\sqrt{x^4-4}}\right)^{x^2+4}$$

101. **Halla los coeficientes y exponentes desconocidos para que se verifique que las funciones y sus derivadas se corresponden.**

a) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 6$
$f'(x) = 3x^2 + 4x - 3$

b) $g(x) = a\ln x + bx$
$g'(x) = \frac{3}{x} - 5$

c) $h(x) = \frac{a^x}{x^b}$
$h'(x) = a^x\left(\frac{\ln 2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$

d) $i(x) = \frac{x}{\sqrt[b]{x}}$
$i'(x) = \frac{2}{3\sqrt[b]{x}}$

a) $a = 2, b = -3$

b) $a = 3, b = -5$

c) $a = 2, b = 1$

d) $b = 3$

102. **Deriva las siguientes funciones trigonométricas inversas.**

a) $f(x) = arc\ sen\ x^2$

b) $f(x) = arc\cos(2x-1)^2$

c) $f(x) = arc\ tg\ \sqrt{x}$

d) $f(x) = arc\ sen\dfrac{2x}{x-1}$

e) $f(x) = arc\cos e^{2x}$

f) $f(x) = arc\ tg \ln x$

a) $f'(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

b) $f'(x) = \dfrac{-4(2x-1)}{\sqrt{1-(2x-1)^4}}$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{1+x}$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{4x^2}{(x-1)^2}}} \cdot \dfrac{-2}{(x-1)^2}$

e) $f'(x) = \dfrac{-2e^{2x}}{\sqrt{1-e^{4x}}}$

f) $f'(x) = \dfrac{1}{x(1+\ln^2 x)}$

103. **Calcula las derivadas de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = (x^2+1)^{3x}$

b) $f(x) = x^{3x^2-7x-1}$

c) $f(x) = (3x^2+1)^{\ln x}$

d) $f(x) = sen^x\ x^2$

e) $f(x) = \cos^{3x} 2x$

f) $f(x) = \left(\sqrt[5]{-x^3-15}\right)^{x^2}$

g) $f(x) = (-x^{10}+3x^5-1)^{sen\ x}$

h) $f(x) = e^{-5x^3+4x-1}$

a) $\ln f(x) = 3x\ln(x^2+1)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 3\ln(x^2+1) + \frac{6x^2}{x^2+1}$$

$$f'(x) = \left(3\ln(x^2+1) + \frac{6x^2}{x^2+1}\right)(x^2+1)^{3x}$$

b) $\ln f(x) = (3x^2-7x-1)\ln x$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (6x-7)\ln x + \frac{3x^2-7x-1}{x}$$

$$f'(x) = \left((6x-7)\ln x + \frac{3x^2-7x-1}{x}\right)x^{3x^2-7x-1}$$

c) $\ln f(x) = \ln x \ln(3x^2+1)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\ln(3x^2+1)}{x} + \ln x \cdot \frac{6x}{3x^2+1}$$

$$f'(x) = \left(\frac{\ln(3x^2+1)}{x} + \frac{6x\ln x}{3x^2+1}\right)(3x^2+1)^{\ln x}$$

d) $\ln f(x) = x\ln(sen\ x^2)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(sen\ x^2) + \frac{2x^2\cos x^2}{sen\ x^2}$$

$$f'(x) = \left[\ln(sen x^2) + \frac{2x^2\cos x^2}{sen x^2}\right]sen^x x^2$$

e) $\ln f(x) = 3x \ln(\cos 2x)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 3\ln(\cos 2x) + 6x\frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x}$$

$$f'(x) = \left[3\ln(\cos 2x) + 6x\frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x}\right]\cos^{3x} 2x$$

f) $\ln f(x) = \frac{x^2}{5}\ln(-x^3 - 15)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2x}{5}\ln(-x^3 - 15) + \frac{3x^4}{5(x^3 + 15)}$$

$$f'(x) = \left(\frac{2x}{5}\ln(-x^3 - 15) + \frac{3x^4}{5(x^3 + 15)}\right)\left(\sqrt[5]{-x^3 - 15}\right)^{x^2}$$

g) $\ln f(x) = \operatorname{sen} x \ln(-x^{10} + 3x^5 - 1)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \ln(-x^{10} + 3x^5 - 1) + \frac{(-10x^9 + 15x^4)\operatorname{sen} x}{-x^{10} + 3x^5 - 1}$$

$$f'(x) = \left(\cos x \ln(-x^{10} + 3x^5 - 1) + \frac{(-10x^9 + 15x^4)\operatorname{sen} x}{-x^{10} + 3x^5 - 1}\right)(-x^{10} + 3x^5 - 1)^{\operatorname{sen} x}$$

h) $\ln f(x) = -5x^3 + 4x - 1$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -15x^2 + 4$$

$$f'(x) = (-15x^2 + 4)e^{-5x^3 + 4x - 1}$$

104. Calcula *a*, *b* y *c* en la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, sabiendo que su gráfica pasa por (0, −3) y (2, 5), y la recta tangente en $x = -1$ es horizontal.

$f(0) = c = -3$ $\qquad f(2) = 4a + 2b + c = 5$

$f'(x) = 2ax + b$ $\qquad f'(-1) = -2a + b$

$$\left.\begin{aligned} c &= -3 \\ 4a + 2b + c &= 5 \\ -2a + b &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow a = 1,\ b = 2,\ c = -3$$

105. ¿Cuál es la ecuación de una parábola que pasa por el punto (0, 9) y en el punto (2, 9) tiene como recta tangente $y - 6x + 3 = 0$?

Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Como la parábola pasa por el punto $(0, 9) \rightarrow c = 9$

Y como también pasa por el punto $(2, 9) \rightarrow 4a + 2b + 9 = 9 \rightarrow 4a + 2b = 0 \rightarrow b = -2a$

Así, resulta que: $f(x) = ax^2 - 2ax + 9 \rightarrow f'(x) = 2ax - 2a$

Si $y = 6x - 3$ es la tangente en el punto $x = 2$, entonces:
$f'(2) = 6 \rightarrow 4a - 2a = 6 \rightarrow a = 3$

La ecuación de la parábola es: $f(x) = 3x^2 - 6x + 9$

106. **Determina los valores de *a*, *b* y *c* para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ pase por el origen de coordenadas, su recta tangente en $x = 1$ tenga pendiente 3 y la segunda derivada en $x = -1$ sea nula.**

$f(0) = c = 0$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ $\qquad$ $f'(1) = 3 + 2a + b = 3$

$f''(x) = 6x + 2a$ $\qquad$ $f''(-1) = -6 + 2a = 0$

$$\left.\begin{array}{r} c=0 \\ 3+2a+b=3 \\ -6+2a=0 \end{array}\right\} \to a=3, b=-6, c=0$$

107. **Determina los valores de *a*, *b* y *c* para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ pase por (3, 0) y las rectas tangentes a su gráfica en $x = 2$ y $x = 4$ sean paralelas al eje *X*.**

$f(3) = 27 + 9a + 3b + c = 0$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ $\qquad$ $f'(2) = 12 + 4a + b = 0$ $\qquad$ $f'(4) = 48 + 8a + b = 0$

$$\left.\begin{array}{r} 27+9a+3b+c=0 \\ 12+4a+b=0 \\ 48+8a+b=0 \end{array}\right\} \to a=-9, b=24, c=-18$$

108. **Calcula *a*, *b* y *c* en la función $f(x) = ax^4 + bx + c$, sabiendo que su gráfica pasa por (1, −1), la recta tangente en $x = 1$ es horizontal y la recta tangente en $x = 0$ es paralela a la recta $y = 4x$.**

$f(1) = a + b + c = -1$

$f'(x) = 4ax^3 + b$ $\qquad$ $f'(1) = 4a + b = 0$

La pendiente de la recta $y = 4x$ es 4, entonces:

$f'(0) = b = 4$

$$\left.\begin{array}{r} a+b+c=-1 \\ 4a+cb=0 \\ b=4 \end{array}\right\} \to a=-1, b=4, c=-4$$

109. **Determina los valores de *a*, *b* y *c* para que la función $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ pase por (1, 6) y las rectas tangentes a la gráfica en $x = 1$ y $x = 2$ sean horizontales.**

$f(1) = 2 + a + b + c = 6$

$f'(x) = 6x^2 + 2ax + b$ $\qquad$ $f'(1) = 6 + 2a + b = 0$ $\qquad$ $f'(2) = 24 + 4a + b = 0$

$$\left.\begin{array}{r} 2+a+b+c=6 \\ 6+2a+b=0 \\ 24+4a+b=0 \end{array}\right\} \to a=-9, b=12, c=1$$

110. **Razona si existe algún punto en el que la tangente a la gráfica de la curva $f(x)$ sea horizontal.**

a) $f(x) = \dfrac{x-2}{x-3}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x-3}$

c) $f(x) = \dfrac{3x}{x-3}$

d) $f(x) = \dfrac{-x}{x^2+1}$

a) $f'(x) = -\dfrac{1}{(x-3)^2} \neq 0$

b) $f'(x) = \dfrac{x^2-6x+2}{(x-3)^2} = 0 \rightarrow x = \dfrac{6 \pm \sqrt{28}}{2} \rightarrow x_1 = 3+\sqrt{7}, x_2 = 3-\sqrt{7}$

c) $f'(x) = -\dfrac{9}{(x-3)^2} \neq 0$

d) $f'(x) = \dfrac{x^2-1}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow x = \pm 1$

111. **Indica si alguna de las rectas tangentes de las siguientes funciones son paralelas a la recta $r: y - 2x + 3 = 0$.**

a) $f(x) = x^3 - x + 7$

b) $f(x) = x^2 + 4x + 3$

c) $f(x) = \ln x^2$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$

La pendiente de la recta r es 2. Por tanto, para que una recta tangente a $f(x)$ sea paralela a r debemos encontrar la solución de la ecuación $f'(x) = 2$.

a) $f'(x) = 3x^2 - 1 = 2 \rightarrow x = \pm 1$

b) $f'(x) = 2x + 4 = 2 \rightarrow x = -1$

c) $f'(x) = \dfrac{2}{x} = 2 \rightarrow x = 1$

d) $f'(x) = \dfrac{-1}{(x+3)^2} = 2 \rightarrow$ Sin solución.

112. **Encuentra, en cada caso, los puntos en los que la tangente a la curva $f(x)$ es paralela a la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.**

a) $f(x) = x^2 - 3x + 1$

b) $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$

c) $f(x) = x^3 - x^2$

d) $f(x) = x \ln x$

La bisectriz del primer y tercer cuadrantes tiene por ecuación $y = x$ y su pendiente es 1, por tanto $f'(x) = 1$.

a) $f'(x) = 2x - 3 = 1 \rightarrow x = 2$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2} = 1 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$

c) $f'(x) = 3x^2 - 2x = 1 \rightarrow x_1 = -\dfrac{1}{3}, x_2 = 1$

d) $f'(x) = \ln x + 1 = 1 \rightarrow x = 1$

113. **Encuentra, en cada caso, los puntos en los que la tangente a la curva $f(x)$ es paralela a la bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes.**

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

b) $f(x) = x^3 + 2x^2$

c) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$

d) $f(x) = -\dfrac{1}{1-2x}$

La bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes tiene por ecuación $y = -x$ y su pendiente es -1, por tanto $f'(x) = -1$.

a) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} = -1 \rightarrow x = \pm 1$

b) $f'(x) = 3x^2 + 4x = -1 \rightarrow x_1 = -\dfrac{1}{3},\ x_2 = -1$

c) $f'(x) = 6x^2 - 6x = -1 \rightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{6}$

d) $f'(x) = \dfrac{-2}{(2x-1)^2} = -1 \rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$

114. **Considera la función $f(x) = \ln x$. Calcula los puntos de la curva en los que la recta tangente tiene la misma pendiente que las siguientes rectas.**

a) r: $y - x = 2$

b) s: $4y = 3 - x$

c) t: $y + x - 1 = 0$

d) u: $2y - x = -4$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

a) $r: y - x = 2 \rightarrow y = x + 2 \rightarrow$ La pendiente de la recta r es 1.

$$\frac{1}{x} = 1 \rightarrow x = 1$$

b) $s: 4y = 3 - x \rightarrow y = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}x \rightarrow$ La pendiente de la recta s es $-\frac{1}{4}$.

$$\frac{1}{x} = -\frac{1}{4} \rightarrow x = -4$$

c) $t: y + x - 1 = 0 \rightarrow y = -x + 1 \rightarrow$ La pendiente de la recta t es -1.

$$\frac{1}{x} = -1 \rightarrow x = -1$$

d) $u: 2y - x = -4 \rightarrow y = -2 + \frac{1}{2}x \rightarrow$ La pendiente de la recta u es $\frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} \rightarrow x = 2$$

115. **Considera la función $f(x) = \dfrac{2}{x+3}$.**

a) Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de la función cuya pendiente sea $\frac{-1}{2}$.

b) ¿Es la gráfica de $f(x)$ tangente en algún punto a la recta $y + 2x + 2 = 0$? ¿Es único este punto?

$$f'(x) = -\frac{2}{(x+3)^2}$$

a) $-\dfrac{2}{(x+3)^2} = -\dfrac{1}{2} \rightarrow x^2 + 6x + 5 = 0 \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = -5$

$f(-1) = 1 \qquad y - 1 = -\frac{1}{2}(x+1) \rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

$f(-5) = -1 \qquad y + 1 = -\frac{1}{2}(x+5) \rightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$

b) $y + 2x + 2 = 0 \rightarrow y = -2x - 2 \rightarrow$ La pendiente de la recta es -2.

$$-\frac{2}{(x+3)^2} = -2 \rightarrow (x+3)^2 = 1 \rightarrow x_1 = -4,\ x_2 = -2$$

Existen dos puntos donde la gráfica es tangente a la recta $y + 2x + 2 = 0$.

116. **La recta cuya ecuación es $y = 9x - 14$ es tangente a la función $y = x^3 - 3x + k$. Determina en qué punto son tangentes y halla el valor de k. ¿Hay una sola solución? La función tiene dos puntos en los que la tangente es horizontal. Hállalos y escribe la ecuación de esas rectas.**

$f'(x) = 3x^2 - 3$

Cuando la recta dada es tangente: $3x^2 - 3 = 9 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

Si $x = 2 \rightarrow y - (2 + k) = 9(x - 2) \rightarrow y = 9x - 16 + k \rightarrow k = 2$

Si $x = -2 \rightarrow y - (-2 + k) = 9(x + 2) \rightarrow y = 9x + 16 + k \rightarrow k = -2$

Luego hay dos soluciones válidas.

Cuando la tangente es horizontal, se cumple que: $3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$

Si $x = 1 \rightarrow y - (-2 + k) = 0 \cdot (x - 1) \rightarrow y = -2 + k$

Si $x = -1 \rightarrow y - (2 + k) = 0 \cdot (x + 1) \rightarrow y = 2 + k$

117. Indica en cuáles de las siguientes parejas de funciones sus gráficas son tangentes en algún punto.

a) $f(x) = x^2 + 3x + 2$
$g(x) = 3x + 2$

b) $f(x) = e^x$
$g(x) = x$

c) $f(x) = \ln x$
$g(x) = x - 1$

d) $f(x) = \cos x$
$g(x) = x^2 + 1$

a) $\left.\begin{matrix} f'(x) = 2x + 3 \\ g'(x) = 3 \end{matrix}\right\} \rightarrow 2x + 3 = 3 \rightarrow x = 0$

Además, $f(0) = g(0) = 2$.

Sus gráficas son tangentes en el punto $x = 0$.

b) $\left.\begin{matrix} f'(x) = e^x \\ g'(x) = 1 \end{matrix}\right\} \rightarrow e^x = 1 \rightarrow x = 0$

Pero $f(0) = 1 \neq g(0) = 0$.

Sus gráficas no son tangentes en ningún punto.

c) $\left.\begin{matrix} f'(x) = \dfrac{1}{x} \\ g'(x) = 1 \end{matrix}\right\} \rightarrow \dfrac{1}{x} = 1 \rightarrow x = 1$

Además, $f(1) = g(1) = 0$.

Sus gráficas son tangentes en el punto $x = 1$.

d) $\left.\begin{matrix} f'(x) = -\mathrm{sen}\, x \\ g'(x) = 2x \end{matrix}\right\} \rightarrow -\mathrm{sen}\, x = 2x \rightarrow x = 0$

Además, $f(0) = g(0) = 1$.

Sus gráficas son tangentes en el punto $x = 0$.

118. Obtén la expresión algebraica de una función que pasa por (2, 5), sabiendo que su derivada es:

$$f'(x) = 2x^2 + 6x - 3$$

Si $f'(x) = 2x^2 + 6x - 3 \rightarrow f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 3x + k$

Como la función pasa por el punto $(2, 5) \rightarrow f(2) = 5$

$\dfrac{2}{3} \cdot 8 + 12 - 6 + k = 5 \rightarrow k = -\dfrac{19}{3}$

$f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 3x - \dfrac{19}{3}$

119. La recta tangente a una función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$ es $y = 5x - 7$. Halla el valor de la función y de su derivada en el punto de abscisa 2.

La de la recta es 5, por tanto $f'(2) = 5$.

Como la recta es tangente a f en $x = 2$ $\rightarrow f(2) = 5 \cdot 2 - 7 = 3$

120. La recta $y = ax + b$ pasa por (1, 6) y (2, 8) y es tangente a la curva $g(x)$ en $x = 0$. Halla el valor de $g(0)$ y $g'(0)$.

$\left.\begin{matrix} 6 = a + b \\ 8 = 2a + b \end{matrix}\right\} \rightarrow a = 2, b = 4$

La ecuación de la recta es $y = 2x + 4$.

$g(0) = y(0) = 4$ $\qquad$ $g'(0) = y'(0) = 2$

121. **La función derivada de una parábola es una recta que pasa por los puntos $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(-1, -\frac{11}{2}\right)$. Halla la abscisa del vértice de esa parábola.**

Como la ecuación de una parábola es $y = ax^2 + bx + c$, su derivada es $y' = 2ax + b$.

La ecuación de la recta que pasa por los puntos es:

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y - \frac{1}{2}}{-6} \rightarrow y = 3x - \frac{5}{2}$$

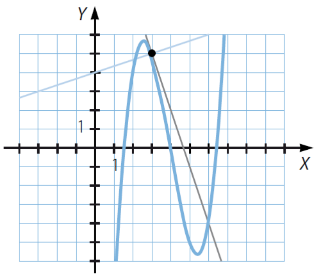
Igualando coeficientes, resulta:

$$2ax = 3x \rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$b = -\frac{5}{2}$$

La abscisa del vértice es: $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-\frac{5}{2}}{2 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{5}{6}$

122. **Si trazamos la recta tangente y la recta normal a la función $f(x) = x^3 - 12x^2 + 42x - 40$, en el punto (3, 5) se forma, con los semiejes positivos de coordenadas, un cuadrilátero. Determina su área.**



$f'(x) = 3x^2 - 24x + 42$

$f'(3) = -3$

La ecuación de la recta tangente en (3, 5) es:

$y - 5 = -3(x - 3) \rightarrow y = -3x + 14$

Y la ecuación de la recta normal es:

$y - 5 = \frac{1}{3}(x - 3) \rightarrow y = \frac{1}{3}x + 4$

El cuadrilátero tiene como vértices: (0, 0), (0, 4), (3, 5) y $\left(\frac{14}{3}, 0\right)$.

Para calcular su área se descompone en tres figuras:

- El rectángulo de vértices (0, 0), (4, 0), (3, 4) y (3, 0) mide 12 u^2.
- El triángulo de vértices (4, 0), (3, 4) y (3, 5) mide $\frac{3}{2}$ u^2.
- El triángulo de vértices (3, 5), (3, 0) y $\left(\frac{14}{3}, 0\right)$ mide $\frac{25}{6}$ u^2.

Luego el área del cuadrilátero es: $12 + \frac{3}{2} + \frac{25}{6} = \frac{53}{3}$ u^2

123. **Considera la curva $f_1(x) = \sqrt{5 - x}$ y la recta de ecuación $f_2(x) = ax$. Calcula el valor de a para que la recta tangente a $f_1(x)$ sea:**

a) Perpendicular a $f_2(x)$ en $x = 1$.

b) Paralela a $f_2(x)$ en $x = -4$.

$f_1'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{5 - x}}$ $\qquad f_2'(x) = a$

a) $f_1'(1) = -\frac{1}{4}$ $\qquad f_1(1) = 2$ $\qquad y - 2 = -\frac{1}{4}(x - 1) \rightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{4} \rightarrow -\frac{1}{4} = -\frac{1}{a} \rightarrow a = 4$

b) $f_1'(-4) = -\frac{1}{6}$ $\qquad f_1(-4) = 3$ $\qquad y - 3 = -\frac{1}{6}(x + 4) \rightarrow y = -\frac{1}{6}x + \frac{7}{3} \rightarrow a = -\frac{1}{6}$

124. **¿Cuánto tiene que valer a para que la función $f(x) = x \ln x - ax$ tenga, en el punto de abscisa e, una recta tangente paralela a la bisectriz del primer cuadrante?**

La bisectriz del primer cuadrante es: $y = x$

Esta recta y la recta tangente son paralelas si sus pendientes son iguales.

La pendiente de la recta tangente a la función, en $x = e$, es:

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - a = \ln x + 1 - a \rightarrow f'(e) = 2 - a$$

Entonces, tenemos que: $2 - a = 1 \rightarrow a = 1$

125. **Considera la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 20$. Escribe la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 4$.**

Consideramos la raíz positiva: $y = \sqrt{20 - x^2}$

$$y'(x) = \frac{-x}{\sqrt{20 - x^2}} \qquad y(4) = 2 \qquad y'(4) = -2$$

$$y - 2 = -2(x - 4) \rightarrow y = -2x + 10$$

126. **Considera la función $f(x) = x^2 - 4x + 6$.**

a) Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a su gráfica paralelas a las bisectrices de los cuadrantes.

b) Halla el punto de corte entre ellas y el de cada una con el eje de coordenadas X.

c) Determina el área del triángulo cuyos vértices son los puntos anteriormente hallados.

a) $f'(x) = 2x - 4$

La bisectriz del primer y tercer cuadrantes es $y = x$ y tiene pendiente 1.

$$2x - 4 = 1 \rightarrow x = \frac{5}{2} \qquad f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{9}{4}$$

Llamando r a la recta paralela a la bisectriz del primer y tercer cuadrantes:

$$r: y - \frac{9}{4} = x - \frac{5}{2} \rightarrow y = x - \frac{1}{4}$$

La bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes es $y = -x$ y tiene pendiente -1.

$$2x - 4 = -1 \rightarrow x = \frac{3}{2} \qquad f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}$$

Llamando s a la recta paralela a la bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes:

$$s: y - \frac{9}{4} = -\left(x - \frac{3}{2}\right) \rightarrow y = -x + \frac{15}{4}$$

b) El punto de corte entre las dos rectas, r y s, es:

$$\left.\begin{array}{l} y = x - \frac{1}{4} \\ y = -x + \frac{15}{4} \end{array}\right\} \rightarrow x = 2,\ y = \frac{7}{4} \rightarrow P\left(2, \frac{7}{4}\right)$$

El punto de corte de la recta r con el eje X es: $y = 0 = x - \frac{1}{4} \rightarrow x = \frac{1}{4} \rightarrow P\left(\frac{1}{4}, 0\right)$

El punto de corte de la recta s con el eje X es: $y = 0 = -x + \frac{15}{4} \rightarrow x = \frac{15}{4} \rightarrow P\left(\frac{15}{4}, 0\right)$

c) La base mide $\frac{15}{4} - \frac{1}{4} = \frac{7}{2}$ y la altura mide 2. $\qquad Área_T = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{7}{2}$ u^2

127. Considera la función $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4$.

a) Calcula los puntos en que la gráfica de la función tiene recta tangente horizontal.
b) Escribe la ecuación de la recta que pasa por esos puntos.
c) Halla los puntos de la curva que tienen por recta tangente una paralela a esa recta.

a) $f'(x) = 3x^2 + 6x = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -2$ $\qquad f(0) = 4$ $\qquad f(-2) = 8$

Los puntos son (0, 4) y (−2, 8).

b) Si la ecuación de la recta es de la forma $y = mx + n$, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} 4 = n \\ 8 = -2m + n \end{array}\right\} \rightarrow m = -2, n = 4$$

La ecuación de la recta es: $y = -2x + 4$

c) La pendiente de la recta es −2: $f'(x) = 3x^2 + 6x = -2 \rightarrow x_1 = -1 + \frac{\sqrt{3}}{3}, x_2 = -1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$

128. Considera la función $f(x) = \dfrac{2x - 9}{x - 3}$.

a) Calcula los puntos de corte de esta función con los ejes de coordenadas.
b) Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva en cada uno de esos puntos.
c) Halla el área de los triángulos que determinan esas rectas con los ejes de coordenadas.

$$f'(x) = \frac{3}{(x-3)^2}$$

a) Corte con el eje X: $\frac{2x - 9}{x - 3} = 0 \rightarrow x = \frac{9}{2}$ $\qquad$ Corte con el eje Y: $\frac{2 \cdot 0 - 9}{0 - 3} = 3$

b) $f'\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{4}{3}$ $\qquad y = \frac{4}{3}x - 6$ $\qquad f'(0) = \frac{1}{3}$ $\qquad y = \frac{1}{3}x + 3$

c) Calculamos los puntos de corte con los ejes de la recta $y = \frac{4}{3}x - 6$:

Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = -6$ $\qquad$ Corte con el eje X: $y = 0 \rightarrow x = \frac{9}{2}$

Área del triángulo que forman: $A_T = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{9 \cdot 6}{4} = \frac{27}{2}$ u²

Calculamos los puntos de corte con los ejes de la recta $y = \frac{1}{3}x + 3$:

Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 3$ $\qquad$ Corte con el eje X: $y = 0 \rightarrow x = -9$

Área del triángulo que forman: $A_T = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{3 \cdot 9}{2} = \frac{27}{2}$ u²

129. Se lanza verticalmente una pelota hacia arriba con una velocidad inicial de 49 m/s desde la parte superior de un edificio de 39 m de altura. Su altura $h(t)$ sobre el suelo después de t segundos está dada por $h(t) = 39 + 49t - 4{,}9t^2$. Determina la velocidad media de la pelota en cada uno de los siguientes intervalos.

a) [0, 1] $\qquad$ b) [4, 6] $\qquad$ c) [11, 13]

¿Qué se puede concluir acerca del movimiento de la pelota?

a) $\frac{h(1)-h(0)}{1-0}=\frac{83,1-39}{1}=44,1$ m/s b) $\frac{h(6)-h(4)}{6-4}=\frac{156,6-156,6}{2}=0$ m/s c) $\frac{h(13)-h(11)}{13-11}=\frac{0-0}{2}=0$ m/s

En el primer intervalo la pelota está subiendo, y por tanto la velocidad media es positiva; en el segundo intervalo la pelota recorre el mismo tramo hacia arriba y hacia abajo; en el último intervalo la pelota ya está en el suelo y no se mueve, por lo que la velocidad media es cero.

130. El espacio recorrido por un objeto, en metros, en un tiempo, *t*, se expresa con esta fórmula.

$$e(t) = 4t^2 + 2t + 1$$

a) ¿Qué espacio ha recorrido a los 4 segundos? ¿Y a los 7 segundos?

b) ¿Cuál es la velocidad media que ha mantenido entre los 4 y los 7 segundos?

a) A los 4 segundos: $e = 73$ m A los 7 segundos: $e = 211$ m

b) *T.V.M.* ([4, 7]) $= \frac{211-73}{7-4} = 46$ m/s

131. El espacio, en metros, que recorre un móvil en función del tiempo, en segundos, viene descrito por la expresión:

$$e(t) = \frac{2}{3}t^2 + t$$

Calcula la velocidad instantánea del móvil a los 3 segundos.

$f'(t) = \frac{4}{3}t + 1 \rightarrow f'(3) = 5$

La velocidad instantánea del móvil a los 3 segundos es de 5 m/s.

PARA PROFUNDIZAR

132. Elige la respuesta adecuada. (Concurso de Primavera)

La mayor inclinación de la función $f(x) = sen\ x$ en uno de sus puntos es:	1	2	3	4	$\frac{\pi}{2}$
La recta tangente a $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ en (1, 0), además de tocar a la curva en (1, 0), la corta también en:	(0, 1)	(−1, −4)	(2, 1)	(3, 10)	(−2, −11)
¿Cuál de las siguientes rectas es tangente a $f(x) = x^2 - 3x + 1$?	$y = x + 1$	$y = 2x + 3$	$y = 3x - 8$	$y = -3x$	$y = 3x - 1$
Si $f(x) = \frac{1}{x}$ entonces la derivada *n*-ésima de la función es:	$\frac{n!}{x^{n+1}}$	$\frac{n!}{x^{n+1}}$	$(-1)^n \cdot \frac{n!}{x^{n+1}}$	$-\frac{n!}{x^{n+1}}$	$\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}$

□ $f'(x) = \cos x$ Toma valores entre –1 y 1, por tanto la mayor inclinación de la función es 1.

□ $f'(x) = 3x^2 - 4x$ $f'(1) = -1$ La recta tangente es: $y = -(x-1) = -x+1$

$x^3 - 2x^2 + 1 = -x + 1 \rightarrow x^3 - 2x^2 + x = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = x_3 = 1$ Corta también en el (0, 1).

□ $f'(x) = 2x - 3 = 3 \rightarrow x = 3 \rightarrow y = 1$ $y - 1 = 3(x-3) \rightarrow y = 3x - 8$

La recta tangente es $y = 3x - 8$.

□ $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ $f'''(x) = -\frac{6}{x^4}$ $f^{iv}(x) = \frac{24}{x^5}$

Por tanto: $f^n(x) = (-1)^n \cdot \frac{n!}{x^{n+1}}$

133. Obtén la expresión algebraica de una función que pasa por (2, 5), sabiendo que su derivada es:

$$f'(x) = 2x^2 + 6x - 3$$

Si $f'(x) = 2x^2 + 6x - 3 \rightarrow f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 3x + k$

Como la función pasa por el punto $(2, 5) \rightarrow f(2) = 5$

$\frac{2}{3} \cdot 8 + 12 - 6 + k = 5 \rightarrow k = -\frac{19}{3}$

$f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 3x - \frac{19}{3}$

134. Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones inversas, es decir, $(g \circ f)(x) = x$, ¿se verifica que $(g' \circ f')(x) = x$?

No se verifica. Si se consideran las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = \sqrt[3]{x}$, se tiene que son inversas ya que cumplen que: $(g \circ f)(x) = x$

Sin embargo, resulta que: $(g' \circ f')(x) = g'(f'(x)) = g'(3x^2) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(3x^2)^2}} = \frac{1}{3x\sqrt[3]{9x}} \neq x$

Luego $f'(x)$ y $g'(x)$ no son funciones inversas.

135. Sea $f(x) = \text{arc tg}\,\frac{\text{sen } x}{1 + \cos x}$. Estudia si $f(x)$ y $f'(x)$ son constantes.

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\text{sen } x}{1 + \cos x}\right)^2} \cdot \frac{\cos x(1 + \cos x) + \text{sen}^2 x}{(1 + \cos x)^2} = \frac{\cos x + 1}{(1 + \cos x)^2 + \text{sen}^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x + 1}{1 + 2\cos x + \cos^2 x + \text{sen}^2 x} = \frac{\cos x + 1}{2\cos x + 2} = \frac{1}{2}$$

Al ser $f'(x)$ constante y no nula, la función $f(x)$ no es constante.

136. Verifica que si un polinomio tiene una raíz doble, también lo es de su derivada.
Resuelve la ecuación $12x^3 - 16x^2 + 7x - 1 = 0$ sabiendo que una de sus raíces es doble.

Si un polinomio tiene una raíz doble a, entonces: $f(x) = (x - a)^2 \cdot p(x)$

$$f'(x) = 2(x - a) \cdot p(x) + (x - a)^2 \cdot p'(x) = (x - a)[2p(x) + (x - a) \cdot p'(x)]$$

Por tanto, a es también una raíz de la derivada.

Sea $f(x) = 12x^3 - 16x^2 + 7x - 1$.

Como $f'(x) = 36x^2 - 32x + 7$, resulta que: $36x^2 - 32x + 7 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{7}{18} \end{cases}$

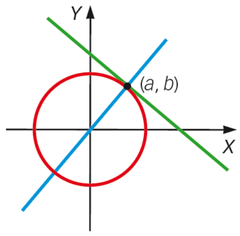
Y como una de las raíces es doble coincide con una de las anteriores:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \rightarrow 12x^3 - 16x^2 + 7x - 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (12x^2 - 10x + 2)$$

$$12x^2 - 10x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Las soluciones de la ecuación son: $\frac{1}{2}$ (doble) y $\frac{1}{3}$

137. Demuestra que la recta tangente a una circunferencia en un punto es perpendicular al radio de dicha circunferencia en ese punto.



Sea una circunferencia centrada en el origen de coordenadas de radio r: $x^2 + y^2 = r^2$

Si $y = \sqrt{r^2 - x^2} \rightarrow y' = \dfrac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} = -\dfrac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

Entonces la ecuación de la recta tangente en un punto (a, b) es: $y - b = -\dfrac{a}{b}(x - a)$

La recta determinada por el radio de la circunferencia que pasa por este punto es:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} \rightarrow y = \frac{b}{a}x$$

Las rectas son perpendiculares ya que: $\dfrac{b}{a} = -\dfrac{1}{-\dfrac{a}{b}}$

138. Demuestra que una función que no es continua en un punto no puede ser derivable en ese punto.

Sea una función $f(x)$ que no es continua en $x = x_0$. $\rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

Si la función es derivable en $x = x_0$, entonces existe el límite:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l \rightarrow \lim_{h\to 0}\left(f(x_0+h)-f(x_0)\right) = l\cdot\lim_{h\to 0} h \rightarrow \lim_{h\to 0}\left(f(x_0+h)-f(x_0)\right) = 0 \rightarrow \lim_{h\to 0} f(x_0+h) = \lim_{h\to 0} f(x_0)$$

Esto no es cierto porque la función no es continua en $x = x_0$, y la función no puede ser derivable en ese punto.

139. Para hallar la derivada de la función implícita tienes que suponer que *y* es una función derivable con respecto a *x* y aplicar la regla de la cadena.

Utiliza esta técnica para calcular la derivada de las funciones implícitas que aparecen a continuación.

a) $y^3 - 2xy^2 = 3x^3y$

b) $3xy + y^3 = 2x$

a) $3y^2y' - 2y^2 - 2x2yy' = 9x^2y + 3x^3y'$

$y'(3y^2 - 4xy - 3x^3) = 9x^2y + 2y^2$

$$y' = \frac{9x^2y + 2y^2}{3y^2 - 4xy - 3x^3}$$

b) $3y + 3xy' + 3y^2y' = 2$

$y'(3x + 3y^2) = 2 - 3y$

$$y' = \frac{2 - 3y}{3x + 3y^2}$$

140. Demuestra que la ecuación de la recta tangente a la curva $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$, siendo *a* un número real positivo, en el punto $P(x_0, y_0)$, se puede escribir de la siguiente forma:

$$\frac{x}{x_0^{\frac{1}{2}}} + \frac{y}{y_0^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{1}{2}}$$

(Premio extraordinario de Bachillerato)

Derivamos implícitamente:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}}y' = 0 \rightarrow y' = -\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot 2\sqrt{y} \qquad y'(x_0) = -\frac{\sqrt{y_0}}{\sqrt{x_0}}$$

Calculamos la recta tangente que pasa por el punto $P(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = -\frac{\sqrt{y_0}}{\sqrt{x_0}}(x - x_0) \rightarrow \frac{y - y_0}{\sqrt{y_0}} + \frac{x - x_0}{\sqrt{x_0}} = 0 \rightarrow \frac{x}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{y}{y^{\frac{1}{2}}} = \frac{y_0}{\sqrt{y_0}} + \frac{x_0}{\sqrt{x_0}}$$

Comprobamos que $\frac{y_0}{\sqrt{y_0}}+\frac{x_0}{\sqrt{x_0}}=a^{\frac{1}{2}}$:

$$\frac{y_0}{\sqrt{y_0}}+\frac{x_0}{\sqrt{x_0}}=\frac{y_0\sqrt{x_0}+x_0\sqrt{y_0}}{\sqrt{x_0y_0}}=\frac{\left(y_0\sqrt{x_0}+x_0\sqrt{y_0}\right)\sqrt{x_0y_0}}{x_0y_0}=\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}=a^{\frac{1}{2}}$$

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. **¿Qué es el costo marginal de la producción del que se habla en el texto?**

   El costo marginal es la derivada del costo total de producción con respecto a la producción.

2. **Explica qué es el término insumo que también aparece en el texto anterior.**

   Los insumos son todos los elementos necesarios para producir un bien.

3. **¿Por qué se puede considerar el costo marginal de producción como una derivada?**

   Porque mide la tasa de variación del coste entre la variación de la producción.

4. **Teniendo en cuenta la función de costo, ¿qué signo crees que tendrá el parámetro a?**

   Positivo.

5. **Halla la función del costo marginal en el ejemplo de la manufactura de medicamentos si *a* y *b* son números reales.**

   Función costo: $f(x)=3ax^2+2bx$

6. **¿Qué tipo de función es el costo marginal?**

   Es una función cuadrática cuya representación es una parábola cóncava; en el eje de abscisas se representa la producción y en el eje de ordenadas los costes.