Lugares geométricos. Cónicas

7

ACTIVIDADES

1. **Si en vez de una superficie cónica se utiliza un cilindro, ¿qué cónicas se pueden obtener?**

Si el plano es perpendicular a la generatriz del cilindro, la sección es una circunferencia.

Si no es perpendicular, la sección es una elipse.

2. **Razona por qué la parábola es una sección cónica que no tiene dos ramas.**

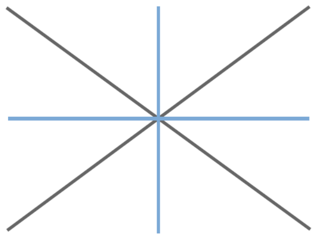
Porque el plano solo corta a uno de los conos de la superficie cónica.

3. **Dibuja el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos rectas:**

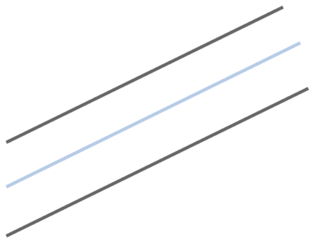
a) Que se cortan en un punto.

b) Que son paralelas.

a) El lugar geométrico está formado por las dos bisectrices de los ángulos que forman las rectas al cortarse.



b) El lugar geométrico es otra recta paralela a ambas.



4. **Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de coordenadas cartesianas es 10.**

¿Y si la condición del lugar geométrico es que su producto sea 10?

Los puntos que verifican la primera condición forman una recta de ecuación: $x + y = 10$

Los puntos que verifican la segunda condición forman una hipérbola equilátera de ecuación: $xy = 10$

5. **La distancia que existe entre los focos de una elipse es de 6 cm. Halla la medida del eje menor teniendo en cuenta que el eje mayor mide 10 cm.**

$2c = 6$ cm $\rightarrow c = 3$ cm

$2a = 10$ cm $\rightarrow a = 5$ cm

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b = 4$ cm

Así, la medida del eje menor es de 8 cm.

6. **Un punto de una elipse dista de cada uno de los focos 6 y 7 cm, respectivamente, y el eje menor mide 6,6 cm. Halla la medida del eje mayor y la distancia entre los focos.**

$2a = d(P, F) + d(P, F') = 6 + 7 = 13$ cm

El eje mayor mide 13 cm.

$2a = 13 \text{ cm} \rightarrow a = 6{,}5 \text{ cm}$ $\qquad$ $2b = 6{,}6 \text{ cm} \rightarrow b = 3{,}3 \text{ cm}$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = 5{,}6$ cm

Así, la distancia entre los focos mide $2c = 11{,}2$ cm.

7. **Calcula la ecuación de una elipse cuyos focos son los puntos $F(5, 0)$ y $F'(-5, 0)$ y dos de sus vértices se sitúan en los puntos $A(8, 0)$ y $A'(-8, 0)$.**

$$\left.\begin{array}{l} c = 5 \\ a = 8 \end{array}\right\} \rightarrow b = \sqrt{39} \rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{39} = 1$$

8. **Halla la ecuación de la elipse cuyos vértices son los siguientes puntos.**

$(-4, 0)$ $\quad$ $(0, -2)$ $\quad$ $(4, 0)$ $\quad$ $(0, 2)$

$$\left.\begin{array}{l} a = 4 \\ b = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

9. **Calcula las excentricidades de estas elipses.**

a) $\dfrac{x^2}{144} + \dfrac{y^2}{121} = 1$ $\qquad$ b) $\dfrac{x^2}{225} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

a) $\dfrac{x^2}{144} + \dfrac{y^2}{121} = 1 \rightarrow \begin{cases} a = 12 \\ b = 11 \end{cases}$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = \sqrt{23} \rightarrow e = \dfrac{\sqrt{23}}{12} = 0{,}39$

b) $\dfrac{x^2}{225} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \rightarrow \begin{cases} a = 15 \\ b = 3 \end{cases}$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = \sqrt{216} = 6\sqrt{6} \rightarrow e = \dfrac{6\sqrt{6}}{15} = \dfrac{2\sqrt{6}}{5} = 0{,}97$

10. **De una elipse sabemos que su excentricidad es 0,6 y dos de sus vértices se sitúan en los puntos $F(6, 0)$ y $F'(-6, 0)$. Halla los vértices.**

$a = 6$ $\qquad$ $e = 0{,}6 = \dfrac{c}{a} \rightarrow c = 3{,}6$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b^2 = 23{,}04 \rightarrow B(0; 4{,}8)$ y $B'(0; -4{,}8)$

11. **En una hipérbola la distancia entre los vértices es de 8 cm, si $B(0, 3)$ y su punto simétrico es $B'(0, -3)$. Calcula los focos de la hipérbola.**

$2a = 8 \rightarrow a = 4$ $\qquad$ $b = 3$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c = 5 \rightarrow F(5, 0)\ F'(-5, 0)$

12. **En una hipérbola la distancia entre sus focos es de 25 unidades y la distancia entre sus vértices es de 16 unidades. Halla B y B'.**

$2c = 25 \rightarrow c = 12{,}5$ $\qquad$ $2a = 16 \rightarrow a = 8$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow b = 9{,}6 \rightarrow B(0; 9{,}6)$ y $B'(0; -9{,}6)$

13. **Halla la ecuación de la hipérbola que tiene sus focos en los puntos $(-2, 0)$ y $(2, 0)$ y sus vértices en $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.**

$$\left.\begin{array}{l} c = 2 \\ a = 1 \end{array}\right\} \to b = \sqrt{3} \to \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1$$

14. **Calcula la ecuación de la hipérbola que tiene sus focos en los puntos $(5, 0)$ y $(-5, 0)$ y que pasa por el punto $\left(6, \frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$.**

$c = 5$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \to 25 = a^2 + b^2 \to b^2 = 25 - a^2$

Así, la ecuación de la hipérbola es de la forma: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \to \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{25 - a^2} = 1$

Como el punto $\left(6, \frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$ pertenece a la hipérbola: $\frac{36}{a^2} - \frac{45}{100 - 4a^2} = 1 \to 4a^4 - 289a^2 + 3\,600 = 0$

Tenemos dos soluciones para a^2: $\frac{225}{4}$ y 16

Como $b^2 = 25 - a^2 > 0 \to a^2 = 16 \to b^2 = 9$

La ecuación de la hipérbola es: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

15. **Determina los focos y los vértices de la hipérbola cuya ecuación aparece a continuación.**

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{225} = 1$$

$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{225} = 1$

$a^2 = 64 \to a = 8 \to A(8, 0)$ y $A'(-8, 0)$

$b^2 = 225 \to b = 15 \to B(0, 15)$ y $B'(0, -15)$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \to c^2 = 289 \to c = 17 \to F(17, 0)$ y $F'(-17, 0)$

16. **Calcula la excentricidad de las hipérbolas que vienen dadas por estas ecuaciones.**

a) $\frac{x^2}{576} - \frac{y^2}{49} = 1$

b) $\frac{x^2}{121} - \frac{y^2}{36} = 1$

a) $a^2 = 576 \to a = 24$ $\quad b^2 = 49 \to b = 7$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \to c = 25$

$e = \frac{c}{a} = \frac{25}{24} = 1{,}04$

b) $\frac{x^2}{121} - \frac{y^2}{36} = 1 \to \begin{cases} a = 11 \\ b = 6 \end{cases}$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \to c = \sqrt{157} \to e = \frac{\sqrt{157}}{11} = 1{,}13$

17. **Halla la ecuación de la parábola con vértice en el origen de coordenadas y foco $F(0, 2)$.**

$p = 4 \to x^2 = 8y$

18. **Calcula la ecuación de la parábola que tiene el vértice en el origen de coordenadas y foco $F(2, 0)$.**

$p = 4 \rightarrow y^2 = 8x$

19. **Determina la ecuación de la circunferencia con centro $C(-3, 1)$ que pasa por el origen de coordenadas.**

$r = d(P, C) = \sqrt{(-3-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{10}$

La ecuación de la circunferencia es: $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 10 \rightarrow x^2 + y^2 + 6x - 2y = 0$

20. **Comprueba si esta ecuación corresponde a una circunferencia $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 11 = 0$.**

$A = -6 \rightarrow a = 3$ $\quad\quad$ $B = 2 \rightarrow b = -1$

$C = 11 = a^2 + b^2 - r^2 = 10 - r^2 \rightarrow r^2 = -1 \rightarrow$ No tiene solución.

Por tanto, esta ecuación no corresponde a una circunferencia.

21. **Estudia la posición relativa de las circunferencias que aparecen a continuación.**

$$x^2 + y^2 - 9 = 0 \qquad x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$$

$x^2 + y^2 - 9 = 0 \rightarrow \begin{cases} C_1(0, 0) \\ r_1 = 3 \end{cases}$

$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} C_2(1, 1) \\ r_2 = 1 \end{cases}$

$d(C_1, C_2) = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2} < r_1 - r_2 = 2$

Las circunferencias son interiores.

22. **Encuentra una circunferencia tangente interior a la circunferencia cuya ecuación es la siguiente.**

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$$

Respuesta abierta.

Una de las circunferencias tangentes interiores es: $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 1$

23. **Discute la posición relativa de la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$ y los ejes de coordenadas.**

$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} C(3, -2) \\ r = 3 \end{cases}$

La distancia del centro al eje de abscisas es: $d(C, r) = \dfrac{|-2|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = 2$

Al ser menor que el radio, el eje es secante a la circunferencia.

La distancia del centro al eje de ordenadas es: $d(C, s) = \dfrac{|3|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = 3$

Al coincidir con el radio, el eje es tangente a la circunferencia.

24. **Encuentra tres rectas no paralelas que sean secante, tangente y exterior a la circunferencia $x^2 + (y - 3)^2 = 36$.**

Respuesta abierta.

Una recta secante es: $x - y = 0$

Una recta tangente es: $y + 3 = 0$

Una recta exterior es: $x - 7 = 0$

SABER HACER

25. Determina el lugar geométrico de los puntos que equidistan de la recta $y = 5x - 2$ y del eje Y.

Se toma $P(x, y)$ un punto genérico del lugar geométrico

$$d(P, r) = \frac{|5x - y - 2|}{\sqrt{5^2 + (-1)^2}} = \frac{|5x - y - 2|}{\sqrt{26}} \qquad d(P, OY) = |x|$$

Como $d(P, r) = d(P, OY) \rightarrow \frac{|5x - y - 2|}{\sqrt{26}} = |x| \rightarrow 5x - y - 2 = \sqrt{26}x \rightarrow \left(5 - \sqrt{26}\right)x - y - 2 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow 5x - y - 2 = -\sqrt{26}x \rightarrow \left(5 + \sqrt{26}\right)x - y - 2 = 0$$

El lugar geométrico son las dos ecuaciones obtenidas que, al ser de grado 1, equivalen a dos rectas que son las bisectrices de los ángulos que forman la recta dada y el eje Y.

26. Determina el lugar geométrico de los puntos que equidistan de la recta $3y = x + 1$ y del eje X.

Se toma $P(x, y)$ un punto genérico del lugar geométrico.

$$d(P, r) = \frac{|x - 3y + 1|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{|x - 3y + 1|}{\sqrt{10}} \qquad d(P, OX) = |y|$$

Como $d(P, r) = d(P, OX) \rightarrow \frac{|x - 3y + 1|}{\sqrt{10}} = |y| \rightarrow x - 3y + 1 = \sqrt{10}y \rightarrow x - \left(3 + \sqrt{10}\right)y + 1 = 0$

$$x - 3y + 1 = -\sqrt{10}y \rightarrow x - \left(3 - \sqrt{10}\right)y + 1 = 0$$

El lugar geométrico son las dos ecuaciones obtenidas que, al ser de grado 1, equivalen a dos rectas que son las bisectrices de los ángulos que forman la recta dada y el eje X.

27. Halla la ecuación de la elipse cuya excentricidad es 0,8 y cuya distancia focal es 8.

$2c = 8 \rightarrow c = 4 \qquad e = \frac{c}{a} = \frac{4}{a} = 0{,}8 \rightarrow a = 5$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b^2 = 9$

La ecuación de la elipse es de la forma: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

28. Halla la ecuación de una elipse, con ejes paralelos a los ejes X e Y, de centro $C(4, 1)$ y vértices $A'(1, 1)$ y $B'(4, -1)$.

Se traslada el centro $C(4, 1)$ al origen de coordenadas:

$A'(1, 1) \rightarrow A''(1 - 4, 1 - 1) = (-3, 0) \rightarrow a = 3$

$B'(4, -1) \rightarrow B''(4 - 4, -1 - 1) = (0, -2) \rightarrow b = 2$

La ecuación de la elipse es de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{(x - 4)^2}{9} + \frac{(y - 1)^2}{4} = 1$$

29. **Halla la ecuación de la hipérbola con ejes paralelos a los ejes *X* e *Y*, sabiendo que su centro es *C* (−1, 2), uno de sus focos es *F* (3, 2) y su excentricidad es 1,5.**

Se traslada el centro $C(-1, 2)$ al origen de coordenadas:

$F(3, 2) \to F''(3-(-1), 2-2) = (4, 0) \to c = 4$

$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{a} = 1{,}5 \to a = \frac{8}{3}$ $\qquad c^2 = a^2 + b^2 \to b^2 = \frac{80}{9}$

La ecuación de la hipérbola es de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \to \frac{9(x+1)^2}{64} - \frac{9(y-2)^2}{80} = 1$$

30. **Halla la ecuación de la hipérbola con ejes paralelos a los ejes *X* e *Y*, sabiendo que su centro es *C* (4, 0), uno de sus focos es *F* (1, −3) y su excentricidad es 2.**

Se traslada el centro $C(4, 0)$ al origen de coordenadas:

$F(1, 0) \to F''(1-4, 0) = (-3, 0) \to c = 3$

$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{a} = 2 \to a = \frac{3}{2}$ $\qquad c^2 = a^2 + b^2 \to b^2 = \frac{27}{4}$

La ecuación de la hipérbola es de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \to \frac{4(x-4)^2}{9} - \frac{4y^2}{27} = 1$$

31. **Halla la ecuación de una parábola cuyo vértice es *V* (−2, 1) y cuya directriz es la recta *y* = −1.**

Se traslada el vértice $V(-2, 1)$ al origen de coordenadas.

$y = -1 \to y' = -1 - 1 = -2 = -\frac{p}{2} \to p = 4$

La ecuación de la parábola es de la forma:

$(x+2)^2 = 2p(y-1) \to (x+2)^2 = 8(y-1) \to x^2 + 4x - 8y + 12 = 0$

32. **Halla la ecuación de una parábola cuyo vértice es *V* (3, 5) y cuya directriz es la recta *y* = 1.**

Se traslada el vértice $V(3, 5)$ al origen de coordenadas.

$y = 1 \to y' = 1 - 5 = -4 = -\frac{p}{2} \to p = 8$

La ecuación de la parábola es de la forma:

$(x-3)^2 = 2p(y-5) \to (x-3)^2 = 16(y-5) \to x^2 - 6x - 16y + 89 = 0$

33. **Halla la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos *P* (1, 4), *Q* (1, 0) y *R* (3, 2).**

Como $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} P(1,4) \to A + 4B + C = -17 \\ Q(1,0) \to A + C = -1 \\ R(1,4) \to 3A + 2B + C = -13 \end{array}\right\} \to A = -2B = -4C = 1 \to x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$$

34. Calcula el centro y el radio de la circunferencia que pasa por los puntos $P(-4, 4)$, $Q(-5, 1)$ y $R(-1, 3)$.

Como $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$:

$$\left.\begin{array}{l} P(-4,4) \to (-4-a)^2+(4-b)^2=r^2 \\ Q(1,0) \to (1-a)^2+b^2=r^2 \\ R(1,4) \to (1-a)^2+(4-b)^2=r^2 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 16+a^2+8a+16+b^2-8b=r^2 \\ 1+a^2-2a+b^2=r^2 \\ 1+a^2-2a+16+b^2-8b=r^2 \end{array}\right\} \to \begin{cases} a=-\dfrac{15}{10} \\ b=2 \\ r^2=\dfrac{41}{4} \end{cases}$$

$$C(a, b) \to C\left(-\frac{15}{10}, 2\right) \qquad r=\frac{\sqrt{41}}{2}$$

35. Halla la ecuación de una circunferéncia que pasa por los puntos $A(1, -2)$ y $B(-3, 0)$ y cuyo centro está en la recta de ecuación $y = 5 - 2x$.

Se calcula el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ que equidistan de A y B:

$$d(A, P) = d(B, P) \to \sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=\sqrt{(x+3)^2+y^2} \to$$

$$\to x^2-2x+1+y^2+4y+4=x^2+6x+9+y^2 \to 8x-4y=-4 \to 2x-y=-1$$

El centro será la intersección de este lugar geométrico y la recta dada:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-y=-1 \\ 2x+y=5 \end{array}\right\} \to \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \to C(1, 3) \qquad d(C, A)=\sqrt{(1-1)^2+(-2-3)^2}=5 \to r=5$$

La ecuación de la circunferencia: $(x-1)^2+(y-3)^2=25 \to x^2+y^2-2x-6y-15=0$

36. Calcula el centro y el radio de la circunferencia que pasa por los puntos $A(1, 1)$ y $B(2, 4)$ y su centro está en la recta de ecuación $3x + y - 11 = 0$.

Se calcula el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$que equidistan de A y B:

$$d(A, P) = d(B, P) \to \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2} \to x^2-2x+1+y^2-2y+1=x^2-4x+4+y^2-8y+16 \to$$

$$\to 2x+6y=18 \to x+3y=9$$

El centro será la intersección de este lugar geométrico y la recta dada:

$$\left.\begin{array}{r} x+3y=9 \\ 3x+y=11 \end{array}\right\} \to \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \to C(3, 2) \qquad d(C, A)=\sqrt{(1-3)^2+(1-2)^2}=\sqrt{5} \to r=5$$

La ecuación de la circunferencia: $(x-3)^2+(y-2)^2=5 \to x^2+y^2-6x-4y+8=0$

37. Identifica qué cónicas son las que tienen estas ecuaciones.

a) $x^2+y^2+11=4y-8x$ c) $x^2-2x-10y=19$ e) $\dfrac{x^2}{225}=1+\dfrac{y^2}{81}$

b) $\dfrac{x^2}{16}+9y^2=1$ d) $x^2-4y=0$ f) $x^2+y^2+6y=7$

a) Aparecen las dos variables al cuadrado con coeficiente +1; por tanto, es una circunferencia:

$x^2+y^2+8x-4y+11=0 \to A=8$, $B=-4$ y $C=11$

$A=-2a \to a=-4$ $B=-2b \to b=2$ $C=a^2+b^2-r^2 \to r^2=9$

La cónica es una circunferencia de centro $C(-4, 2)$ y $r=3$.

b) Aparecen las dos variables al cuadrado con mismo signo y distinto coeficiente, por tanto es una elipse:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{\frac{1}{9}}=1 \rightarrow a=4, b=\frac{1}{3} \qquad c^2=\frac{143}{9}\rightarrow c=\frac{\sqrt{143}}{3}$$

La cónica es una elipse de focos $F\left(\frac{\sqrt{143}}{3},0\right)$ y $F'\left(-\frac{\sqrt{143}}{3},0\right)$.

c) Aparece una variable al cuadrado y la otra con grado 1; por tanto, es una parábola:

$x^2 - 2x + 1 = 10y + 19 + 1 \rightarrow (x - 1)^2 = 10(y + 2)$

La cónica es una parábola de vértice $V(1, -2)$ y directriz paralela al eje Y.

d) Aparece una variable al cuadrado y la otra con grado 1; por tanto, es una parábola:

$x^2 = 4y$

La cónica es una parábola de vértice el origen de coordenadas y directriz paralela al eje Y.

e) Aparecen las dos variables al cuadrado con distinto signo, por tanto es una hipérbola:

$$\frac{x^2}{15^2}-\frac{y^2}{9^2}=1 \rightarrow a = 15, b = 9$$

Como $a^2 + b^2 = c^2 \rightarrow c^2=306=3\sqrt{54}$

La cónica es una hipérbola de focos $F\left(3\sqrt{54},0\right)$ y $F'\left(-3\sqrt{54},0\right)$.

f) Aparecen las dos variables al cuadrado con coeficiente + 1; por tanto, es una circunferencia:

$x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0 \rightarrow A = 0, B = 6$ y $C = -7$

$A = -2a \rightarrow a = 0B = -2b \rightarrow b = -3C = a^2 + b^2 - r^2 \rightarrow r^2 = 16$

La cónica es una circunferencia de centro $C(0, -3)$ y $r = 4$.

38. Estudia la posición de los puntos $A(0, 2)$ y $B(4, 1)$ respecto a la circunferencia $x^2 + (y - m)^2 = 16$, según el valor de m.

Centro y radio de la circunferencia: $C(0, m)$ y $r = 4$.

Posición de $A(0, 2)$ con respecto a la circunferencia dada:

$$d(C, A) = \sqrt{(0-0)^2+(2-m)^2} = \sqrt{m^2-4m+4}$$

$\sqrt{m^2-4m+4}=4 \rightarrow m^2 - 4m - 12 = 0 \rightarrow m_1 = 6$ y $m_2 = -2$

$\sqrt{m^2-4m+4}>4 \rightarrow m^2 - 4m - 12 > 0 \rightarrow m < -2$ y $m > 6$

$\sqrt{m^2-4m+4}<4 \rightarrow m^2 - 4m - 12 < 0 \rightarrow -2 < m < 6$

Si $m < -2$ o $m > 6 \rightarrow$ El punto A es exterior.

Si $m = 6$ o $m = -2 \rightarrow$ El punto A pertenece a la circunferencia.

Si $-2 < m < 6 \rightarrow$ El punto A es interior.

Posición de $B(4, 1)$ con respecto a la circunferencia dada:

$d(C, B) = \sqrt{(4-0)^2 + (1-m)^2} = \sqrt{m^2 - 2m + 17}$

$\sqrt{m^2 - 2m + 17} = 4 \rightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \rightarrow m = 1$

$\sqrt{m^2 - 2m + 17} > 4 \rightarrow m^2 - 2m + 1 > 0 \rightarrow m \neq 1$

$\sqrt{m^2 - 2m + 17} < 4 \rightarrow m^2 - 2m + 1 < 0 \rightarrow$ No tiene solución.

Si $m = 1 \rightarrow$ El punto B pertenece a la circunferencia.

Si $m \neq 1 \rightarrow$ El punto B es exterior.

39. Dada la circunferencia $(x - m)^2 + (y - 1)^2 = 9$, estudia la posición de los puntos $A(0, -2)$ y $B(-5, 1)$ con respecto a ella en función del valor de m.

Centro y radio de la circunferencia: $C(m, 1)$ y $r = 3$.

Posición de $A(0, -2)$ con respecto a la circunferencia dada:

$d(C, A) = \sqrt{(0-m)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{m^2 + 9}$

$\sqrt{m^2 + 9} = 3 \rightarrow m^2 = 0 \rightarrow m = 0$

$\sqrt{m^2 + 9} > 3 \rightarrow m^2 > 0 \rightarrow m \neq 0$

$\sqrt{m^2 + 9} < 3 \rightarrow m^2 < 0 \rightarrow$ No tiene solución.

Si $m = 0 \rightarrow$ El punto A pertenece a la circunferencia.

Si $m \neq 0 \rightarrow$ El punto A es exterior.

Posición de $B(-5, 1)$con respecto a la circunferencia dada:

$d(C, B) = \sqrt{(-5-m)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{m^2 + 10m + 25}$

$\sqrt{m^2 + 10m + 25} = 3 \rightarrow m^2 + 10m + 16 = 0 \rightarrow m_1 = -8$ y $m_2 = -2$

$\sqrt{m^2 + 10m + 25} > 3 \rightarrow m^2 + 10m + 16 > 0 \rightarrow m < -8$ y $m > -2$

$\sqrt{m^2 + 10m + 25} < 3 \rightarrow m^2 + 10m + 16 < 0 \rightarrow -8 < m < -2$

Si $m < -8$ o $m > -2 \rightarrow$ El punto B es exterior.

Si $m = -8$ o $m = -2 \rightarrow$ El punto B pertenece a la circunferencia.

Si $-8 < m < -2 \rightarrow$ El punto B es interior.

ACTIVIDADES FINALES

40. Determina el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los puntos A y B.

a) $A(-6, 0)$ y $B(-1, 0)$

b) $A(-2, -1)$ y $B(4, 1)$

c) $A(3, -5)$ y $B(7, 1)$

d) $A(0, -2)$ y $B(0, 7)$

a) Sea $P(x, y)$ un punto equidistante de A y B, entonces $d(A, P) = d(B, P)$.

$d(A, P) = \sqrt{(x-(-6))^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 12x + 36}$ $\quad d(B, P) = \sqrt{(x-(-1))^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 1}$

$\sqrt{x^2 + y^2 + 12x + 36} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 1} \rightarrow 12x + 36 = 2x + 1 \rightarrow x = -\frac{7}{2}$

El lugar geométrico es la recta, mediatriz del segmento AB, paralela al eje Y con ecuación $x = -\frac{7}{2}$.

b) Sea $P(x, y)$ un punto equidistante de A y B, entonces $d(A, P) = d(B, P)$.

$$d(A, P) = \sqrt{(x-(-2))^2 + (y-(-1))^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 4x + 2y + 5}$$

$$d(B, P) = \sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 8x - 2y + 17}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 4x + 2y + 5} = \sqrt{x^2 + y^2 - 8x - 2y + 17} \rightarrow 4x + 2y + 5 = -8x - 2y + 17 \rightarrow 3x + y - 3 = 0$$

El lugar geométrico es la recta, mediatriz del segmente AB, con ecuación $3x + y - 3 = 0$.

c) Sea $P(x, y)$ un punto equidistante de A y B, entonces $d(A, P) = d(B, P)$.

$$d(A, P) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-(-5))^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 6x + 10y + 34}$$

$$d(B, P) = \sqrt{(x-7)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 14x - 2y + 50}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 6x + 10y + 34} = \sqrt{x^2 + y^2 - 14x - 2y + 50} \rightarrow -6x + 10y + 34 = -14x - 2y + 50 \rightarrow 2x + 3y - 4 = 0$$

El lugar geométrico es la recta, mediatriz del segmente AB, con ecuación $2x + 3y - 4 = 0$.

d) Sea $P(x, y)$ un punto equidistante de A y B, entonces $d(A, P) = d(B, P)$:

$$d(A, P) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-(-2))^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4}$$

$$d(B, P) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-7)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 14y + 49}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4} = \sqrt{x^2 + y^2 - 14y + 49} \rightarrow 4y + 4 = -14y + 49 \rightarrow y = \frac{5}{2}$$

El lugar geométrico es la recta, mediatriz del segmente AB, paralela al eje X con ecuación $y = \frac{5}{2}$.

41. Calcula la mediatriz del segmento cuyos extremos son $A(5, -2)$ y $B(4, 3)$.

Sea $P(x, y)$ un punto de la mediatriz, entonces $d(P, A) = d(P, B)$:

$$d(A, P) = \sqrt{(x-5)^2 + (y-(-2))^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 10x + 4y + 29}$$

$$d(B, P) = \sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 8x - 6y + 25}$$

$$d(A, P) = d(B, P) \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 - 10x + 4y + 29} = \sqrt{x^2 + y^2 - 8x - 6y + 25} \rightarrow -10x + 4y + 29 = -8x - 6y + 25 \rightarrow$$

$$\rightarrow x - 5y - 2 = 0$$

La mediatriz es la recta $x - 5y - 2 = 0$.

42. Halla el lugar geométrico de los puntos, P, del plano cuya distancia a $A(-3, 0)$ sea el doble de la distancia a $B(1, 0)$. Identifica la figura resultante.

Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico, entonces $d(A, P) = 2d(B, P)$.

$$d(A, P) = \sqrt{(x-(-3))^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 6x + 9}$$

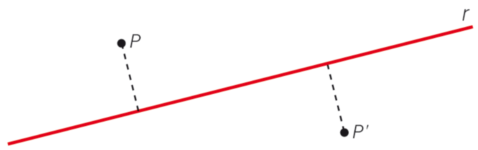
$$d(B, P) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 6x + 9} = 2\sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1} \rightarrow x^2 + y^2 + 6x + 9 = 4(x^2 + y^2 - 2x + 1) \rightarrow 3x^2 + 3y^2 - 14x - 5 = 0$$

La figura resultante es la circunferencia de ecuación:

$$x^2 + y^2 - \frac{14}{3}x - \frac{5}{3} = 0$$

43. Calcula el lugar geométrico de los puntos que distan 4 unidades de la recta r: $4x - 2y + 5 = 0$.



Sea (x, y) un punto del lugar geométrico, entonces: $\dfrac{|4x-2y+5|}{\sqrt{4^2+(-2)^2}} = 4$

$$\rightarrow |4x-2y+5| = 4\sqrt{20} \rightarrow |4x-2y+5| = 8\sqrt{5} \rightarrow \begin{cases} 4x-2y+5-8\sqrt{5}=0 \\ -4x+2y-5-8\sqrt{5}=0 \end{cases}$$

44. Calcula el lugar geométrico de los puntos que distan 2 unidades de la recta r: $x - 3y + 1 = 0$.

Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico, entonces $d(r, P) = 2$.

$$\frac{|x-3y+1|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}} = 2 \rightarrow |x-3y+1| = 2\sqrt{10} \rightarrow \begin{cases} x-3y+1-2\sqrt{10}=0 \\ -x+3y-1-2\sqrt{10}=0 \end{cases}$$

45. Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los siguientes pares de rectas.

a) $3x - 4y - 26 = 0$
$12x + 5y + 1 = 0$

b) $-2x + 7y + 9 = 0$
$4x - 14y + 11 = 0$

c) $2x - 3y + 3 = 0$
$3x - 2 = 0$

d) $2y - 5 = 0$
$2x - 3y + 5 = 0$

a) $$\frac{|3x-4y-26|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{|12x+5y+1|}{\sqrt{12^2+5^2}} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{3x-4y-26}{5} = \dfrac{12x+5y+1}{13} \\ \dfrac{3x-4y-26}{5} = \dfrac{-12x-5y-1}{13} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 39x-52y-338 = 60x+25y+5 \\ 39x-52y-338 = -60x-25y-5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x-11y+49=0 \\ 11x-3y-37=0 \end{cases}$$

El lugar geométrico está formado por las dos bisectrices de las rectas.

b) $$\frac{|-2x+7y+9|}{\sqrt{(-2)^2+7^2}} = \frac{|4x-14y+11|}{\sqrt{4^2+(-14)^2}} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{-2x+7y+9}{\sqrt{53}} = \dfrac{4x-14y+11}{2\sqrt{53}} \\ \dfrac{-2x+7y+9}{\sqrt{53}} = \dfrac{-4x+14y-11}{2\sqrt{53}} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -4x+14y+18 = 4x-14y+11 \\ -4x+14y+18 = -4x+14y-11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8x-28y-7=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

Como las rectas son paralelas, el lugar geométrico es otra recta paralela a ambas.

c) $$\frac{|2x-3y+3|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}} = \frac{|3x-2|}{\sqrt{3^2+0^2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{2x-3y+3}{\sqrt{13}} = \dfrac{3x-2}{3} \\ \dfrac{2x-3y+3}{\sqrt{13}} = \dfrac{-3x+2}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6x-9y+9 = 3\sqrt{13}x-2\sqrt{13} \\ 6x-9y+9 = -3\sqrt{13}x+2\sqrt{13} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \left(6-3\sqrt{13}\right)x-9y+9+2\sqrt{13}=0 \\ \left(6+3\sqrt{13}\right)x-9y+9-2\sqrt{13}=0 \end{cases}$$

El lugar geométrico está formado por las dos bisectrices de las rectas.

d) $\dfrac{|2y-5|}{\sqrt{2^2+0^2}}=\dfrac{|2x-3y+5|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}\rightarrow$

$$\rightarrow\begin{cases}\dfrac{2y-5}{2}=\dfrac{2x-3y+5}{\sqrt{13}}\\ \dfrac{2y-5}{2}=\dfrac{-2x+3y-5}{\sqrt{13}}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}2\sqrt{13}y-5\sqrt{13}=4x-6y+10\\ 2\sqrt{13}y-5\sqrt{13}=-4x+6y110\end{cases}\rightarrow\begin{cases}-4x+\left(6+2\sqrt{13}\right)y-10-5\sqrt{13}=0\\ 4x+\left(-6+2\sqrt{13}\right)y+10-5\sqrt{13}=0\end{cases}$$

El lugar geométrico está formado por las dos bisectrices de las rectas.

46. **Determina las bisectrices de las siguientes rectas.**

$$\mathbf{3x-2y-1=0 \qquad 4x+2y-6=0}$$

$$\frac{|3x-2y-1|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\frac{|4x+2y-6|}{\sqrt{4^2+2^2}}\rightarrow\begin{cases}\dfrac{3x-2y-1}{\sqrt{13}}=\dfrac{2x+y-3}{\sqrt{5}}\\ \dfrac{3x-2y-1}{\sqrt{13}}=\dfrac{-2x-y+3}{\sqrt{5}}\end{cases}\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{cases}3\sqrt{5}x-2\sqrt{5}y-\sqrt{5}=2\sqrt{13}x+\sqrt{13}y-3\sqrt{13}\\ 3\sqrt{5}x-2\sqrt{5}y-\sqrt{5}=-2\sqrt{13}x-\sqrt{13}y+3\sqrt{13}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\left(3\sqrt{5}-2\sqrt{13}\right)x-\left(2\sqrt{5}+\sqrt{13}\right)y-\sqrt{5}+3\sqrt{13}=0\\ \left(3\sqrt{5}+2\sqrt{13}\right)x-\left(2\sqrt{5}-\sqrt{13}\right)y-\sqrt{5}-3\sqrt{13}=0\end{cases}$$

47. **Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia del eje *X* sea la misma que al punto *A*(3, 2).**

Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico, entonces $d(OX, P)=d(A, P)$.

$d(OX, P)=|y|$

$d(A, P)=\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}\rightarrow\sqrt{x^2+y^2-6x-4y+13}=|y|\rightarrow x^2-6x-4y+13=0$

El lugar geométrico es una parábola cuya directriz es paralela al eje *X*.

48. **Halla el lugar geométrico de los puntos del plano tales que el triángulo *ABP* sea rectángulo en *P*, siendo *A*(−3, 1) y *B*(4, 3). ¿De qué figura se trata?**

ABP es triángulo rectángulo en $P(x, y)$ si sus lados *AP* y *BP* son perpendiculares:

$AP=(x+3, y-1)$ $\qquad\qquad$ $BP=(x-4, y-3)$

Para que sean perpendiculares su producto escalar debe ser 0, así:

$AP\cdot BP=(x+3)(x-4)+(y-1)(y-3)=0\rightarrow x^2+y^2-x-4y-9=0$

El lugar geométrico es una circunferencia con ecuación $x^2+y^2-x-4y-9=0$ cuyo centro es el punto medio del segmento *AB* y su radio la mitad de su módulo.

49. **Halla el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto *A*(2, −3) es la misma que el cuadrado de su distancia al origen de coordenadas.**

Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico, entonces $d(A, P)=d(O, P)^2$.

$d(A, P)=\sqrt{(x-2)^2+(y-(-3))^2}=\sqrt{x^2+y^2-4x+6y+13}$

$d(O, P)=\sqrt{x^2+y^2}$

$\sqrt{x^2+y^2-4x+6y+13}=x^2+y^2\rightarrow x^2+y^2-4x+6y+13=x^4+2x^2y^2+y^4\rightarrow$

$\rightarrow x^4+y^4-x^2-y^2+2x^2y^2+4x-6y-13=0$

50. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano Q tales que el punto medio del segmento PQ es un punto de la recta que tiene por ecuación $2x + 4y - 5 = 0$, con $P(2, 6)$.

Sea $Q(x, y)$ un punto del lugar geométrico. El punto medio de PQ es $\left(\frac{x+2}{2}, \frac{y+6}{2}\right)$.

Este punto pertenece a la recta $\rightarrow 2\left(\frac{x+2}{2}\right) + 4\left(\frac{y+6}{2}\right) - 5 = 0 \rightarrow x + 2y + 9 = 0$

El lugar geométrico es una recta paralela a la $2x + 4y - 5 = 0$ con ecuación $x + 2y + 9 = 0$.

51. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos $A(3, 1)$ y $B(5, 1)$ sea igual a 8.

Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico, entonces $d(A, P)^2 + d(P, B)^2 = 8$.

$d(A, P) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 6x - 2y + 10}$

$d(B, P) = \sqrt{(x-5)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 10x - 2y + 26}$

$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 10 + x^2 + y^2 - 10x - 2y + 26 = 8 \rightarrow x^2 + y^2 - 8x - 2y + 14 = 0$

El lugar geométrico es una circunferencia con ecuación $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 14 = 0$.

52. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano P cuya diferencia de cuadrados de las distancias a los puntos $A(-1, 0)$ y $B(3, 2)$ es 4. ¿De qué figura se trata?

Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico, entonces $d(A, P)^2 - d(P, B)^2 = 4$.

$d(A, P) = \sqrt{(x-(-1))^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 1}$

$d(B, P) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13}$

$x^2 + y^2 + 2x + 1 - (x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13) = 4 \rightarrow 2x + y - 4 = 0$

El lugar geométrico es una recta de ecuación $2x + 4 - y = 0$.

53. Halla los vértices, los focos y las excentricidades de las siguientes elipses.

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

b) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

c) $25x^2 + 16y^2 = 1600$

d) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \rightarrow \begin{cases} a = 5 \rightarrow A(5, 0) \quad A'(-5, 0) \\ b = 3 \rightarrow B(0, 3) \quad B'(0, -3) \end{cases}$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = 4 \rightarrow F(4, 0) \qquad F'(-4, 0)$

La excentricidad es: $e = \frac{4}{5} = 0{,}8$

b) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1 \rightarrow \begin{cases} b = 4 \rightarrow B(4, 0) \quad B'(-4, 0) \\ a = 5 \rightarrow A(0, 5) \quad A'(0, -5) \end{cases}$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = 3 \rightarrow F(0, 4) \qquad F'(0, -4)$

La excentricidad es: $e = \frac{3}{5} = 0{,}6$

c) $25x^2 + 16y^2 = 1\,600 \rightarrow \dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{100} = 1 \rightarrow \begin{cases} b = 8 \rightarrow A(8, 0) \quad A'(-8, 0) \\ a = 10 \rightarrow B(0, 10) \quad B'(0, -10) \end{cases}$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = 6 \rightarrow F(0, 6) \qquad F'(0, -6)$

La excentricidad es: $e = \dfrac{6}{10} = 0{,}6$

d) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1 \rightarrow \begin{cases} a = 5 \rightarrow A(5, 0) \quad A'(-5, 0) \\ b = 4 \rightarrow B(0, 4) \quad B'(0, -4) \end{cases}$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = 3 \rightarrow F(3, 0) \qquad F'(-3, 0)$

La excentricidad es: $e = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$

54. Encuentra los vértices, los focos y calcula las excentricidades de las siguientes elipses.

a) $\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{54} = 6$

b) $\dfrac{x^2}{5} + 5y^2 = 245$

c) $9x^2 + 25y^2 = 900$

d) $x^2 + 2y^2 = 16$

a) $\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{54} = 6$

$a = 3\sqrt{6} \rightarrow A\left(3\sqrt{6}, 0\right),\ A'\left(-3\sqrt{6}, 0\right)$

$b = \sqrt{6} \rightarrow B\left(0, \sqrt{6}\right),\ B'\left(0, -\sqrt{6}\right)$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c^2 = 48 \rightarrow c = 4\sqrt{3} \rightarrow F\left(4\sqrt{3}, 0\right), F'\left(-4\sqrt{3}, 0\right)$

La excentricidad es: $e = \dfrac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{6}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} = 0{,}94$

b) $\dfrac{x^2}{5} + 5y^2 = 245$

$a = 35 \rightarrow A(35, 0), A'(-35, 0)$

$b = 7 \rightarrow B(0, 7), B'(0, -7)$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c^2 = 1\,176 \rightarrow c = 14\sqrt{6} \rightarrow F\left(14\sqrt{6}, 0\right),\ F'\left(-14\sqrt{6}, 0\right)$

La excentricidad es: $e = \dfrac{14\sqrt{6}}{35} = 0{,}98$

c) $9x^2 + 25y^2 = 900 \rightarrow \dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1 \rightarrow \begin{cases} a = 10 \rightarrow A(10, 0) \quad A'(-10, 0) \\ b = 6 \rightarrow B(0, 6) \quad B'(0, -6) \end{cases}$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = 8 \rightarrow F(8, 0) \qquad F'(-8, 0)$

La excentricidad es: $e = \dfrac{8}{10} = 0{,}8$

d) $x^2 + 2y^2 = 16 \rightarrow \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{8} = 1 \rightarrow \begin{cases} a = 4 \longrightarrow A(4, 0) \quad A'(-4, 0) \\ b = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \rightarrow B\left(0, 2\sqrt{2}\right) \quad B'\left(0, -2\sqrt{2}\right) \end{cases}$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = 2\sqrt{2} \rightarrow F\left(2\sqrt{2}, 0\right) \quad F'\left(-2\sqrt{2}, 0\right)$

La excentricidad es: $e = \dfrac{2\sqrt{2}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707$

55. Halla la ecuación de la elipse que cumple las condiciones en cada uno de los casos.

a) La distancia focal es 4 y el semieje menor es 3.

b) La semidistancia focal es 3 y el eje mayor es 10.

c) Pasa por el punto (8, 3) y su excentricidad es $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

d) Pasa por el punto (−4, 1) y el eje menor es 6.

a) $c = 2$ y $b = 3$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 = 13$

Ecuación de la elipse: $\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$

b) $c = 3$ y $a = 5$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b^2 = 16$

Ecuación de la elipse: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

c) $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow c = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b^2 = \frac{a^2}{4} \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\frac{a^2}{4}} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{4y^2}{a^2} = 1$

Como (8, 3) es un punto de la elipse: $\frac{8^2}{a^2} + \frac{4 \cdot 3^2}{a^2} = 1 \rightarrow a^2 = 100 \rightarrow b^2 = \frac{a^2}{4} = 25$

Ecuación de la elipse: $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$

d) Como (−4, 1) es un punto de la elipse y $b = 3$: $\frac{(-4)^2}{a^2} + \frac{1^2}{3^2} = 1 \rightarrow a^2 = 18$

Ecuación de la elipse: $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$

56. Encuentra las ecuaciones de las elipses que cumplen las siguientes condiciones.

a) La excentricidad es 0,6 y su eje mayor mide 20.

b) Los focos son (6, 0) y (−6, 0) y su excentricidad es $\frac{1}{3}$.

c) Pasa por el punto (3, 2) y su eje mayor mide 10.

d) Sus focos están en (4, 0) y (−4, 0) y dos de sus vértices son (5, 0) y (−5, 0).

a) $2a = 20 \rightarrow a = 10$

Si $e = 0{,}6 \rightarrow c = 6$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b = 8 \rightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$

b) $c = 6$

Si $e = \frac{1}{3} \rightarrow a = 18$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b = 12\sqrt{2} \rightarrow \frac{x^2}{324} + \frac{y^2}{288} = 1$

c) $2a = 10 \rightarrow a = 5$

Por ser el punto (3, 2) un punto de la elipse:

$$\frac{9}{25} + \frac{4}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{4}{b^2} = \frac{16}{25} \rightarrow b^2 = \frac{25}{4} \rightarrow b = \frac{5}{2}$$

Así, la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{\frac{25}{4}} = 1 \rightarrow x^2 + 4y^2 = 25$$

d) $\left.\begin{array}{l} c = 4 \\ a = 5 \end{array}\right\}$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b = 3 \rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

57. Halla la ecuación que responde a los siguientes lugares geométricos.

a) Puntos cuya suma de distancias a $P(-4, 0)$ y $Q(4, 0)$ es 10.

b) Puntos cuya suma de distancias a $P(-5, 0)$ y $Q(5, 0)$ es 21.

a) Sea $R(x, y)$ un punto del lugar geométrico, entonces $d(P, R) + d(Q, R) = 10$.

$$d(P, R) = \sqrt{(x-(-4))^2 + (y-0)^2}$$

$$d(Q, R) = \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2}$$

$$\sqrt{(x+4)^2 + y^2} + \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 10 \rightarrow \sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 10 - \sqrt{(x-4)^2 + y^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow (x+4)^2 + y^2 = 100 + (x-4)^2 + y^2 - 20\sqrt{(x-4)^2 + y^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow 20\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 100 - 16x \rightarrow 400(x^2 + y^2 - 8x + 16) = 10\,000 - 3\,200x + 256x^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 144x^2 + 400y^2 = 3\,600$$

La ecuación del lugar geométrico es una elipse de ecuación: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

b) Sea $R(x, y)$ punto del lugar geométrico, entonces, $d(P, R) + d(Q, R) = 21$

$$d(P, R) = \sqrt{(x-(-5))^2 + (y-0)^2}$$

$$d(Q, R) = \sqrt{(x-5)^2 + (y-0)^2}$$

$$\sqrt{(x+5)^2 + y^2} + \sqrt{(x-5)^2 + y^2} = 21 \rightarrow \sqrt{(x+5)^2 + y^2} = 21 - \sqrt{(x-5)^2 + y^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow (x+5)^2 + y^2 = 21^2 + (x-5)^2 + y^2 - 42\sqrt{(x-5)^2 + y^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow 42\sqrt{(x-5)^2 + y^2} = 441 - 20x \rightarrow 1\,764(x^2 + y^2 - 10x + 25) = 194\,481 - 17\,640x + 400x^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 1\,364x^2 + 1\,764y^2 = 150\,381$$

La ecuación del lugar geométrico es una elipse de ecuación: $\frac{4x^2}{441} + \frac{4y^2}{341} = 1$

58. **Escribe la ecuación de la elipse con centro en el origen de coordenadas, los focos sobre el eje X y pasa por los puntos $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.**

La ecuación de la elipse es de la forma $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Como $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ es un punto de la elipse: $\frac{1^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{b^2}=1 \to \frac{1}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1 \to 4b^2+3a^2=4a^2b^2$

Como $\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ es un punto de la elipse: $\frac{\sqrt{2}^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{b^2}=1 \to \frac{2}{a^2}+\frac{2}{4b^2}=1 \to 8b^2+2a^2=4a^2b^2$

Igualamos las dos ecuaciones: $4b^2+3a^2=8b^2+2a^2 \to a^2=4b^2$

Sustituyendo en la primera ecuación: $\frac{1}{a^2}+\frac{3}{a^2}=1 \to a^2=4,\ b^2=\frac{a^2}{4} \to b^2=1$

Ecuación de la elipse: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$

59. **Determina la ecuación reducida de una elipse cuya distancia focal es 8 y el área del rectángulo construido sobre sus ejes es de $48\sqrt{5}$ unidades cuadradas.**

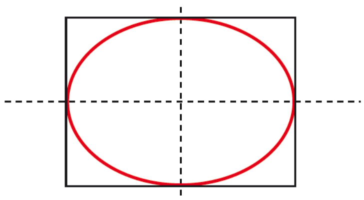
$c=4 \to 2a\cdot 2b=48\sqrt{5} \to b=\frac{12\sqrt{5}}{a}$

Como $a^2=b^2+c^2 \to a^2=\left(\frac{12\sqrt{5}}{a}\right)^2+16 \to a^4-16a^2-720=0 \to a^2=36$

Como $b^2=\left(\frac{12\sqrt{5}}{a}\right)^2 \to b^2=20$

Ecuación de la elipse: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$

60. **Una elipse es tangente a los lados del rectángulo definido por las rectas $y=8$, $y=-8$, $x=10$ y $x=-10$. Halla su ecuación y las coordenadas de cinco puntos.**



$\left.\begin{array}{l} a=10 \\ b=8 \end{array}\right\} \to \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$

Cinco puntos de la elipse son: $A(10, 0)$, $A'(-10, 0)$, $B(0, 8)$, $B'(0, -8)$ y $C\left(5, 4\sqrt{3}\right)$

61. **Halla la posición relativa de la elipse de ecuación $x^2+2y^2=3$ con la recta de ecuación $x+2y-1=0$.**

$x+2y-1=0 \to x=1-2y$

Sustituyendo en la ecuación de la elipse: $x^2+2y^2=3 \to (1-2y)^2+2y^2=3 \to 3y^2-2y-1=0$

$\Delta=16>0 \to$ La ecuación tiene dos soluciones; por tanto, la elipse y la recta son secantes

62. **Escribe la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a (0, −12) y a (0, 12) es 26.**

$$\sqrt{(x-0)^2+(y+12)^2}+\sqrt{(x-0)^2+(y-12)^2}=26$$
$$\to \sqrt{x^2+(y+12)^2}=26-\sqrt{x^2+(y-12)^2}$$
$$\to x^2+(y+12)^2=26^2+x^2+(y-12)^2-52\sqrt{x^2+(y-12)^2}$$
$$\to y^2+144+24y=676+y^2+144-24y-52\sqrt{x^2+y^2+144-24y}$$
$$\to 52\sqrt{x^2+y^2+144-24y}=676-48y$$
$$\to 13\sqrt{x^2+y^2+144-24y}=169-12y$$
$$\to 169x^2+169y^2+24\,336-4\,056y=28\,561+144y^2-4\,056y$$
$$\to 169x^2+25y^2=4\,225\to \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{169}=1$$

63. **Escribe en forma general la ecuación de la elipse $4x^2+9y^2-8x+36y+4=0$.**
Halla también sus focos y su excentricidad.

$4(x^2-2x)+9(y^2+4y)+4=0$

$4(x^2-2x+1)+9(y^2+4y+4)+4=4+36\to 4(x-1)^2+9(y+2)^2=36$

En forma general:

$\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y+2)^2}{4}=1\to a=3,\ b=2$

Como $a^2=b^2+c^2\to c^2=5\to c=\sqrt{5}$

Excentricidad: $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

Como $C(1,-2)$ y $c=\sqrt{5}\to F\left(1+\sqrt{5},-2\right)$ y $F'\left(1-\sqrt{5},-2\right)$.

64. **Escribe en forma general la ecuación de la siguiente elipse, encuentra sus focos y calcula su excentricidad.**

$$x^2+400y^2=6x-800y-309$$

$(x^2-6x)+400(y^2+2y)+309=0$

$(x^2-6x+9)+400(y^2+2y+1)+309=9+400\to(x-3)^2+400(y+1)^2=100$

Forma general:

$\dfrac{(x-3)^2}{100}+\dfrac{(y+1)^2}{\frac{1}{4}}=1\to a=10,\ b=\dfrac{1}{2}$

Como $a^2=b^2+c^2\to c^2=\dfrac{399}{4}\to c=\dfrac{\sqrt{399}}{2}$

Excentricidad: $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{399}}{20}$

Como $C(3,-1)$ y $c=\dfrac{\sqrt{399}}{2}\to F\left(3+\dfrac{\sqrt{399}}{2},-1\right)$ y $F'\left(3-\dfrac{\sqrt{399}}{2},-1\right)\to F\left(\dfrac{6+\sqrt{399}}{2},-1\right)$ y $F'\left(\dfrac{6-\sqrt{399}}{2},-1\right)$

65. **Determina los focos, los vértices, las asíntotas y las excentricidades de las siguientes hipérbolas.**

a) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$

b) $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{16} = 1$

c) $16y^2 - 25x^2 = 1600$

d) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$

e) $9x^2 - 25y^2 = 900$

f) $x^2 - 2y^2 = 16$

a) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1 \rightarrow \begin{cases} a = 5 \rightarrow A(5, 0) \quad A'(-5, 0) \\ b = 3 \rightarrow B(0, 3) \quad B'(0, -3) \end{cases}$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c = \sqrt{34} \rightarrow F\left(\sqrt{34}, 0\right) \quad F'\left(-\sqrt{34}, 0\right)$

La excentricidad es: $e = \frac{\sqrt{34}}{5} = 1{,}16$

Las asíntotas son $y = \pm\frac{b}{a}x \rightarrow \begin{cases} r: y = \frac{3}{5}x \\ r': y = -\frac{3}{5}x \end{cases}$

b) $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{16} = 1 \rightarrow \begin{cases} a = 5 \rightarrow A(0, 5) \quad A'(0, -5) \\ b = 4 \rightarrow B(4, 0) \quad B'(-4, 0) \end{cases}$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c = \sqrt{41} \rightarrow F\left(0, \sqrt{41}\right) \quad F'\left(0, -\sqrt{41}\right)$

La excentricidad es: $e = \frac{\sqrt{41}}{5} = 1{,}28$

Las asíntotas son $y = \pm\frac{b}{a}x \rightarrow \begin{cases} r: y = \frac{4}{5}x \\ r': y = -\frac{4}{5}x \end{cases}$

c) $16y^2 - 25x^2 = 1\,600 \rightarrow \frac{y^2}{100} - \frac{x^2}{64} = 1 \rightarrow \begin{cases} a = 10 \rightarrow A(0, 10) \quad A'(0, -10) \\ b = 8 \rightarrow B(8, 0) \quad B'(-8, 0) \end{cases}$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c = 2\sqrt{41} \rightarrow F\left(0, 2\sqrt{41}\right) \quad F'\left(0, -2\sqrt{41}\right)$

La excentricidad es: $e = \frac{2\sqrt{41}}{10} = 1{,}28$

Las asíntotas son $y = \pm\frac{b}{a}x \rightarrow \begin{cases} r: y = \frac{4}{5}x \\ r': y = -\frac{4}{5}x \end{cases}$

d) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1 \rightarrow \begin{cases} a = 5 \rightarrow A(5, 0) \quad A'(-5, 0) \\ b = 4 \rightarrow B(0, 4) \quad B'(0, -4) \end{cases}$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c = \sqrt{41} \rightarrow F\left(\sqrt{41}, 0\right) \quad F'\left(-\sqrt{41}, 0\right)$

La excentricidad es: $e = \frac{\sqrt{41}}{5} = 1{,}28$

Las asíntotas son $y = \pm\frac{b}{a}x \rightarrow \begin{cases} r: y = \frac{4}{5}x \\ r': y = -\frac{4}{5}x \end{cases}$

e) $9x^2 - 25y^2 = 900 \rightarrow \frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{36} = 1 \rightarrow \begin{cases} a = 10 \rightarrow A(10, 0) \quad A'(-10, 0) \\ b = 6 \rightarrow B(0, 6) \quad B'(0, -6) \end{cases}$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c = 2\sqrt{34} \rightarrow F\left(2\sqrt{34}, 0\right) \quad F'\left(-2\sqrt{34}, 0\right)$

La excentricidad es: $e = \frac{2\sqrt{34}}{10} = 1{,}16$

Las asíntotas son $y = \pm \frac{b}{a}x \to \begin{cases} r: y = \frac{3}{5}x \\ r': y = -\frac{3}{5}x \end{cases}$

f) $x^2 - 2y^2 = 16 \to \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{8} = 1 \to \begin{cases} a = 4 \longrightarrow A(4, 0) \quad A'(-4, 0) \\ b = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \to B\left(0, 2\sqrt{2}\right) \quad B'\left(0, -2\sqrt{2}\right) \end{cases}$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \to c = 2\sqrt{6} \to F\left(2\sqrt{6}, 0\right) \quad F'\left(-2\sqrt{6}, 0\right)$

La excentricidad es: $e = \frac{2\sqrt{6}}{4} = 1{,}22$

Las asíntotas son $y = \pm \frac{b}{a}x \to \begin{cases} r: y = \frac{\sqrt{2}}{2}x \\ r': y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x \end{cases}$

66. Halla la ecuación de la hipérbola que cumple las condiciones en cada caso.

a) La distancia entre los focos es 12 y la curva pasa por el punto $P(8, 14)$.

b) La distancia focal es 34 y la distancia de un foco al vértice más próximo es 2.

c) Pasa por los puntos $\left(4, \sqrt{8}\right)$ y $\left(2\sqrt{3}, 2\right)$.

a) $c = 6$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \longrightarrow b^2 = 36 - a^2 \longrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{36 - a^2} = 1$

Como $P(8, 14)$ pertenece a la hipérbola: $\frac{8^2}{a^2} - \frac{14^2}{36 - a^2} = 1 \longrightarrow a^4 - 296a^2 + 2\,304 = 0 \longrightarrow a_1{}^2 = 8$ y $a_2{}^2 = 288$

Como $b^2 > 0$, $a^2 = 8 \longrightarrow b^2 = 28$

Ecuación de la hipérbola: $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{28} = 1$

b) $c = 17$

$a = 17 - 2 = 15$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \longrightarrow b^2 = 64$

Ecuación de la hipérbola: $\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{64} = 1$

c) $\frac{4^2}{a^2} - \frac{\sqrt{8}^2}{b^2} = 1 \longrightarrow \frac{16}{a^2} - \frac{8}{b^2} = 1 \longrightarrow 16b^2 - 8a^2 = a^2b^2 \longrightarrow b^2 = \frac{8a^2}{16 - a^2}$

$\frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2}{a^2} - \frac{2^2}{b^2} = 1 \longrightarrow \frac{12}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1$

Se sustituye en la segunda ecuación: $\frac{12}{a^2} - \frac{4(16 - a^2)}{8a^2} = 1 \longrightarrow a^2 = 8 \longrightarrow b^2 = 8$

Ecuación de la hipérbola: $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$

67. **Encuentra las ecuaciones de las hipérbolas que cumplen las siguientes condiciones.**

a) Sus asíntotas son $y = 2x$ e $y = -2x$ y un foco tiene por coordenadas $\left(3\sqrt{5}, 0\right)$.

b) Los focos son $(-5, 0)$ y $(5, 0)$ y la distancia entre sus vértices es 8.

c) Las asíntotas son $y = \frac{1}{3}x$ e $y = -\frac{1}{3}x$ y pasa por el punto $\left(3\sqrt{29}, 5\right)$.

d) Un foco es $(6, 0)$ y su excentricidad es 1,2.

a) $\frac{b}{a} = 2 \rightarrow b = 2a \qquad c = 3\sqrt{5}$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow 45 = a^2 + 4a^2 \rightarrow a^2 = 9 \rightarrow a = 3 \rightarrow b = 6 \rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$

b) $c = 5 \qquad 2a = 8 \rightarrow a = 4$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow 25 = 16 + b^2 \rightarrow b^2 = 9 \rightarrow b = 3 \rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

c) $\frac{b}{a} = \frac{1}{3} \rightarrow a = 3b$

Por ser el punto $\left(3\sqrt{29}, 5\right)$ un punto de la hipérbola:

$\frac{261}{9b^2} - \frac{25}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{36}{9b^2} = 1 \rightarrow b^2 = 4 \rightarrow b = 2 \rightarrow a = 6$

Así, la ecuación de la hipérbola es: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1$

d) $c = 6 \qquad e = \frac{c}{a} = 1{,}2 \rightarrow a = 5$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow b = \sqrt{11} \rightarrow \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{11} = 1$

68. **Determina los focos, los vértices, las asíntotas y la excentricidad de las siguientes hipérbolas no centradas en el origen.**

a) $\frac{(x+5)^2}{10} - \frac{(y-4)^2}{9} = 1$

b) $\frac{(y+3)^2}{25} - \frac{x^2}{7} = 1$

c) $\frac{y^2}{11} - \frac{(x+4)^2}{9} = 1$

d) $\frac{(x-4)^2}{14} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$

a) $C(-5, 4)$

$a^2 = 10 \rightarrow a = \sqrt{10} \rightarrow$ Vértices: $A(-5 + \sqrt{10}, 4)$, $A'(-5 - \sqrt{10}, 4)$

$b^2 = 9 \rightarrow$ Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c^2 = 19 \rightarrow c = \sqrt{19} \rightarrow$ Focos: $F(-5 + \sqrt{19}, 4)$, $F'(-5 - \sqrt{19}, 4)$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{19}{10}}$

$\frac{b}{a} = \frac{3\sqrt{10}}{10} \rightarrow$ Asíntotas: $r: y = \frac{3\sqrt{10}x}{10}$, $r': y = \frac{-3\sqrt{10}x}{10}$

b) $C(0, -3)$

$a^2 = 25 \rightarrow a = 5 \rightarrow$ Vértices: $A(0, -3 + 5)$, $A'(0, -3 - 5) \rightarrow A(0, 2)$, $A'(0, -8)$

$b^2 = 7 \rightarrow$ Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c^2 = 32 \rightarrow c = 4\sqrt{2} \rightarrow$ Focos: $F(0, -3 + 4\sqrt{2})$, $F'(0, -3 - 4\sqrt{2})$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{4\sqrt{2}}{5}$

$\frac{a}{b} = \frac{5\sqrt{7}}{7} \rightarrow$ Asíntotas: $r: y = \frac{5\sqrt{7}}{7}x$, $r': y = -\frac{5\sqrt{7}}{7}x$

c) $C(-4, 0)$

$a^2 = 11 \rightarrow a = \sqrt{11} \rightarrow$ Vértices: $A(-4, \sqrt{11})$, $A'(-4, -\sqrt{11})$

$b^2 = 9 \rightarrow$ Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c^2 = 20 \rightarrow c = 2\sqrt{5} \rightarrow$ Focos: $F(-4, 2\sqrt{5})$, $F'(-4, -2\sqrt{5})$

Excentricidad: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2\sqrt{55}}{11}$

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sqrt{11}}{3} \rightarrow$ Asíntotas: $r: y = \dfrac{\sqrt{11}}{3}x$, $r': y = -\dfrac{\sqrt{11}}{3}x$

d) $C(4, -1)$

$a^2 = 14 \rightarrow a = \sqrt{14} \rightarrow$ Vértices: $A(4 + \sqrt{14}, -1)$, $A'(4 - \sqrt{14}, -1)$

$b^2 = 9 \rightarrow$ Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c^2 = 23 \rightarrow c = \sqrt{23} \rightarrow$ Focos: $F(4 + \sqrt{23}, -1)$, $F'(4 - \sqrt{23}, -1)$

Excentricidad: $e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{\dfrac{23}{14}}$

$\dfrac{b}{a} = \dfrac{3\sqrt{14}}{14} \rightarrow$ Asíntotas: $r: y = \dfrac{3\sqrt{14}}{14}x$, $r': y = -\dfrac{3\sqrt{14}}{14}x$

69. Halla la ecuación de la hipérbola no centrada en el origen que cumple las condiciones en cada caso.

a) El centro es $C(1, 0)$, la excentricidad es $\dfrac{4}{3}$ y pasa por el punto $P(4, 3)$.

b) El centro es $C(2, 3)$, un vértice es $(-3, 3)$ y un foco es $(9, 3)$.

c) El centro es $C(-5, 2)$, un vértice es $(0, 2)$ y su excentricidad es 2.

a) $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{3} \rightarrow c = \dfrac{4a}{3}$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow b^2 = \dfrac{7a^2}{9}$

La ecuación de la hipérbola es de la forma: $\dfrac{(x-1)^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{\frac{7a^2}{9}} = 1 \rightarrow \dfrac{(x-1)^2}{a^2} - \dfrac{9y^2}{7a^2} = 1$

Como $P(4, 3)$ pertenece a la hipérbola: $\dfrac{(4-1)^2}{a^2} - \dfrac{9 \cdot 3^2}{7a^2} = 1 \rightarrow a^2 < 0 \rightarrow$ Imposible, no existe la hipérbola.

b) $C(2, 3)$

$A(-3, 3) \rightarrow A(2 - 5, 3) \rightarrow a = 5$

$F(9, 3) \rightarrow F(2 + 7, 3) \rightarrow c = 7$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow b^2 = 24$

Ecuación de la hipérbola: $\dfrac{(x-2)^2}{25} - \dfrac{(y-3)^2}{24} = 1$

c) $C(-5, 2)$

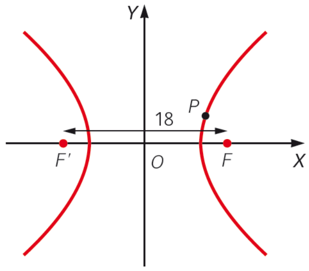
$A(0, 2) \rightarrow A(0 - 5, 2) \rightarrow a = 5$

$e = 2 \qquad c = e \cdot a \rightarrow c = 10$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow b^2 = 75$

Ecuación de la hipérbola: $\dfrac{(x+5)^2}{25} - \dfrac{(y-2)^2}{75} = 1$

70. **Encuentra la ecuación de una hipérbola cuyo eje focal mide 18 y pasa por el punto *P*(15, 4).**



$2c = 18 \rightarrow c = 9$

$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow 81 - a^2 = b^2$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{81-a^2} = 1 \rightarrow \frac{225}{a^2} - \frac{16}{81-a^2} = 1 \rightarrow a^2 = 161 - 4\sqrt{481}$$

Por tanto, la ecuación de la hipérbola pedida es:

$$\frac{x^2}{161 - 4\sqrt{481}} - \frac{y^2}{4\sqrt{481} - 80} = 1$$

71. **Escribe la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de las distancias a (0, −12) y a (0, 12) es 10.**

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y+12)^2} - \sqrt{(x-0)^2 + (y-12)^2} = 10$$
$$\rightarrow \sqrt{x^2 + (y+12)^2} = 10 + \sqrt{x^2 + (y-12)^2} \rightarrow$$
$$\rightarrow x^2 + (y+12)^2 = 10^2 + x^2 + (y-12)^2 + 20\sqrt{x^2 + (y-12)^2} \rightarrow$$
$$\rightarrow y^2 + 144 + 24y = 100 + y^2 + 144 - 24y + 20\sqrt{x^2 + y^2 + 144 - 24y} \rightarrow$$
$$\rightarrow 48y - 100 = 20\sqrt{x^2 + y^2 + 144 - 24y} \rightarrow$$
$$\rightarrow 12y - 25 = 5\sqrt{x^2 + y^2 + 144 - 24y}$$
$$\rightarrow 144y^2 - 600y + 625 = 25x^2 + 25y^2 + 3\,600 - 600y \rightarrow$$
$$\rightarrow 119y^2 - 25x^2 = 2\,975 \rightarrow \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{119} = 1$$

72. **Sean los puntos *A*(−5, −1) y *A'*(−5, −11). ¿Qué ecuación tiene el lugar geométrico formado por los puntos cuya diferencia de distancias a *A* y *A'* es 8?**

Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico, entonces $d(A, P) - d(A', P) = 8$.

$$\sqrt{(x+5)^2 + (y+1)^2} - \sqrt{(x+5)^2 + (y+11)^2} = 8$$
$$\rightarrow \sqrt{(x+5)^2 + (y+1)^2} = 8 + \sqrt{(x+5)^2 + (y+11)^2} \rightarrow$$
$$\rightarrow (x+5)^2 + (y+1)^2 = 8^2 + (x+5)^2 + (y+11)^2 + 16\sqrt{(x+5)^2 + (y+11)^2} \rightarrow$$
$$\rightarrow -5y - 46 = 4\sqrt{(x+5)^2 + (y+11)^2} \rightarrow (-5y-46)^2 = 16(x+5)^2 + 16(y+11)^2 \rightarrow$$
$$\rightarrow 25y^2 + 460y + 2\,116 = 16x^2 + 160x + 400 + 16y^2 + 352y + 1\,936 \rightarrow$$
$$\rightarrow 9(y^2 + 12y) - 16(x^2 + 10x) - 220 = 0 \rightarrow 9(y^2 + 12y + 36) - 16(x^2 + 10x + 25) - 220 = 324 - 400 \rightarrow$$
$$\rightarrow 9(y+6)^2 - 16(x+5)^2 = 144 \rightarrow \frac{9(y+6)^2}{144} - \frac{16(x+5)^2}{144} = 1$$

El lugar geométrico es una hipérbola con eje paralelo a *OY* y ecuación: $\frac{(y+6)^2}{16} - \frac{(x+5)^2}{19} = 1$

73. **Halla la ecuación de la parábola con vértice el origen de coordenadas, que pasa por el punto (3, −6) y cuyo eje coincide con el eje de abscisas.**

La ecuación de la parábola con $V(0, 0)$ y eje en el eje X es de la forma: $y^2 = 2px$

Como (3, −6) pertenece a la parábola:

$(-6)^2 = 2p3 \rightarrow p = 6$

Ecuación de la parábola: $y^2 = 12x$

74. **Encuentra el foco y la directriz de las siguientes parábolas, y represéntalas gráficamente.**

a) $y^2 = 10x$

b) $y^2 = 7x$

c) $x^2 = 6y$

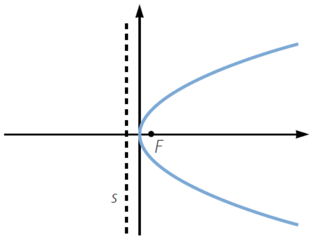
d) $x^2 = y$

e) $y^2 = -10x$

f) $x^2 = -6y$

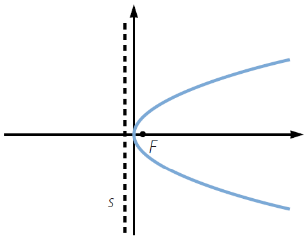
a) $2p = 10 \rightarrow p = 5 \rightarrow F\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

Directriz: $x = -\frac{5}{2}$



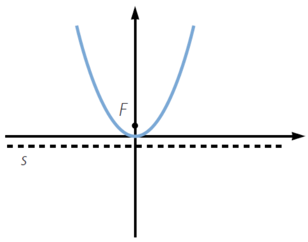
b) $2p = 7 \rightarrow p = \frac{7}{2} \rightarrow F\left(\frac{7}{4}, 0\right)$

Directriz: $x = -\frac{7}{2}$



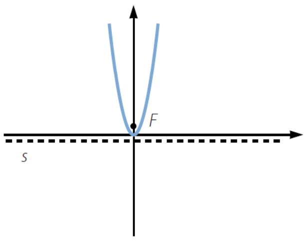
c) $2p = 6 \rightarrow p = 3 \rightarrow F\left(0, \frac{3}{2}\right)$

Directriz: $y = -\frac{3}{2}$



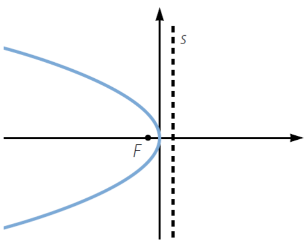
d) $2p = 1 \rightarrow p = \frac{1}{2} \rightarrow F\left(0, \frac{1}{4}\right)$

Directriz: $y = -\frac{1}{4}$



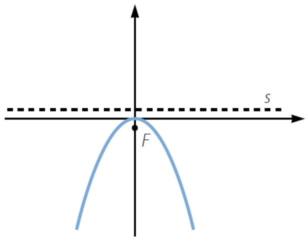
e) $2p = -10 \rightarrow p = -5 \rightarrow F\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$

Directriz: $x = \frac{5}{2}$



f) $2p = -6 \rightarrow p = -3 \rightarrow F\left(0, -\frac{3}{2}\right)$

Directriz: $y = \frac{3}{2}$



75. Obtén la ecuación de la parábola en cada uno de los siguientes casos.

a) Foco en (5, 0) y su directriz es $x = -5$.
b) Foco en (0, 2) y su directriz es $y = -2$.

a) $P(x, y)$ punto de la parábola $\rightarrow d(P, F) = d(P, s) \rightarrow \sqrt{(x-5)^2 + y^2} = |x+5| \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 = x^2 + 10x + 25 \rightarrow y^2 = 20x$

b) $P(x, y)$ punto de la parábola $\rightarrow d(P, F) = d(P, s) \rightarrow \sqrt{x^2 + (y-2)^2} = |y+2| \rightarrow$

$\rightarrow x^2 + y^2 - 4y + 4 = y^2 + 4y + 4 \rightarrow x^2 = 8y$

76. Halla la ecuación reducida de la parábola con vértice el origen de coordenadas que cumple las condiciones de cada caso.

a) Pasa por el punto $(-3, 8)$ y su directriz es horizontal.
b) Pasa por el punto $(5, -4)$ y su directriz es vertical.

a) La ecuación de la parábola es de la forma: $x^2 = 2py$

Como pasa por el punto $(-3, 8)$: $9 = 2p \cdot 8 \rightarrow p = \frac{9}{16} \rightarrow x^2 = \frac{9}{8}y$

b) La ecuación de la parábola es de la forma: $y^2 = 2px$

Como pasa por el punto $(5, -4)$: $16 = 2p \cdot 5 \rightarrow p = \frac{8}{5} \rightarrow y^2 = \frac{16}{5}x$

77. Encuentra la ecuación de la parábola que tiene su vértice en el punto $V(-1, 3)$, pasa por el punto $(2, -2)$ y su eje es paralelo al eje Y.

La ecuación es de la forma:

$(x+1)^2 = 2p(y-3)$

Como $(2, -2)$ está en la parábola:

$(2+1)^2 = 2p(-2-3) \rightarrow p = -\frac{9}{10}$

Ecuación de la parábola:

$(x+1)^2 = -\frac{9}{5}(y-3) \rightarrow 5x^2 + 10x + 9y = 22$

78. Obtén los vértices, los focos y las directrices de las siguientes parábolas.

a) $y^2 = 2(x-3)$
b) $(y-1)^2 = 4(x-4)$
c) $x^2 = 6(y-2)$
d) $(x-3)^2 = 8(y+1)$
e) $x^2 = -4(y+1)$
f) $(y+3)^2 = -8(x-1)$

a) $V(3, 0)$ $\quad 2p = 2 \rightarrow p = 1 \rightarrow F\left(\frac{7}{2}, 0\right)$ $\quad$ Directriz: $x = \frac{5}{2}$

b) $V(4, 1)$ $\quad 2p = 4 \rightarrow p = 2 \rightarrow F(5, 1)$ $\quad$ Directriz: $x = 3$

c) $V(0, 2)$ $\quad 2p = 6 \rightarrow p = 3 \rightarrow F\left(0, \frac{7}{2}\right)$ $\quad$ Directriz: $y = \frac{1}{2}$

d) $V(3, -1)$ $\quad 2p = 8 \rightarrow p = 4 \rightarrow F(3, 1)$ $\quad$ Directriz: $y = -3$

e) $V(0, -1)$ $\quad 2p = -4 \rightarrow p = -2 \rightarrow F(0, -2)$ $\quad$ Directriz: $y = 0$

f) $V(1, -3)$ $\quad 2p = -8 \rightarrow p = -4 \rightarrow F(-1, -3)$ $\quad$ Directriz: $x = 3$

79. Obtén los vértices, los focos y las directrices de las siguientes parábolas.

a) $(x - 5)^2 = 14(y - 3)$
b) $(y + 6)^2 = 24(x - 1)$
c) $(y + 4)^2 = -8(x - 6)$
d) $(x + 4)^2 = -4(y + 7)$
e) $(y - 2)^2 = -18x$
f) $x^2 = -9(y + 1)$

a) $V(5, 3)$ $\quad 2p = 14 \rightarrow p = 7 \rightarrow$ Foco: $F\left(5, 3 + \frac{7}{2}\right) \rightarrow F\left(5, \frac{13}{2}\right)$ $\quad$ Directriz: $y = 3 - \frac{7}{2} \rightarrow y = -\frac{1}{2}$

b) $V(1, -6)$ $\quad 2p = 24 \rightarrow p = 12 \rightarrow$ Foco: $F\left(1 + \frac{12}{2}, -6\right) \rightarrow F(7, -6)$ $\quad$ Directriz: $x = 1 - \frac{12}{2} \rightarrow x = -5$

c) $V(6, -4)$ $\quad 2p = -8 \rightarrow p = -4 \rightarrow$ Foco: $F\left(6 + \frac{-4}{2}, -4\right) \rightarrow F(4, -4)$ $\quad$ Directriz: $x = 6 - \frac{-4}{2} \rightarrow x = 8$

d) $V(-4, -7)$ $\quad 2p = -4 \rightarrow p = -2 \rightarrow$ Foco: $F\left(-4, -7 + \frac{-2}{2}\right) \rightarrow F(-4, -8)$ $\quad$ Directriz: $y = -7 - \frac{-2}{2} \rightarrow y = -6$

e) $V(0, 2)$ $\quad 2p = -18 \rightarrow p = -9 \rightarrow$ Foco: $F\left(0 + \frac{-9}{2}, 2\right) \rightarrow F\left(-\frac{9}{2}, 2\right)$ $\quad$ Directriz: $x = 0 - \frac{-9}{2} \rightarrow x = \frac{9}{2}$

f) $V(0, -1)$ $\quad 2p = -4 \rightarrow p = -2 \rightarrow$ Foco: $F\left(0, -1 + \frac{-2}{2}\right) \rightarrow F(0, -2)$ $\quad$ Directriz: $y = -1 - \frac{-2}{2} \rightarrow y = 0$

80. Halla la ecuación de la parábola en cada caso.

a) Vértice en $(-5, 8)$ y foco en $(-5, 2)$.
b) Vértice en $(3, 7)$ y foco en $(0, 7)$.
c) Foco en $(3, 5)$ y su directriz es $x = 10$.
d) Vertice en $(2, 3)$ y su directriz es $x = -3$.

a) Ecuación de la forma: $(x + 5)^2 = 2p(y - 8)$

$$F\left(-5, 8 + \frac{p}{2}\right) \rightarrow 2 = 8 + \frac{p}{2} \rightarrow p = -12$$

Ecuación de la parábola:

$$(x + 5)^2 = 2(-12)(y - 8) \rightarrow (x + 5)^2 = -24(y - 8) \rightarrow x^2 + 10x + 24y - 167 = 0$$

b) Ecuación de la forma: $(y - 7)^2 = 2p(x - 3)$

$$F\left(3 + \frac{p}{2}, 7\right) \rightarrow 0 = 3 + \frac{p}{2} \rightarrow p = -6$$

Ecuación de la parábola:

$$(y - 7)^2 = 2(-6)(x - 3) \rightarrow y^2 - 14y + 12x + 13 = 0$$

c) Sea $P(x, y)$ un punto de la parábola, entonces $d(P, F) = d(P, s)$:

$$\sqrt{(x - 3)^2 + (y - 5)^2} = |x - 10| \rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 = x^2 - 20x + 100$$

Ecuación de la parábola:

$$y^2 - 10y + 14x - 66 = 0$$

d) s: $x = -3 \rightarrow$ Ecuación de la forma: $(y-3)^2 = 2p(x-2)$ y s: $x - 2 = -\frac{9}{2}$

$-3 - 2 = -\frac{p}{2} \rightarrow p = 10$

Ecuación de la parábola:

$(y-3)^2 = 2 \cdot 10(x-2) \rightarrow (y-3)^2 = 20(x-2) \rightarrow y^2 - 6y - 20x + 49 = 0$

81. **Obtén la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje *Y*, que pasa por los puntos *A*(2, −4), *B*(−2, 4) y *C*(−3, 2).**

La parábola es de la forma $(x-h)^2 = 2p(y-k)$, siendo $V(h, k)$

Como A, B y C pertenecen a la parábola:

$$\left.\begin{array}{l}(2-h)^2 = 2p(-4-k) \rightarrow h^2 - 4h + 8p + 2pk + 4 = 0\\ (-2-h)^2 = 2p(4-k) \rightarrow h^2 + 4h - 8p + 2pk + 4 = 0\\ (-3-h)^2 = 2p(2-k) \rightarrow h^2 + 6h - 4p + 2pk + 9 = 0\end{array}\right\}$$

Se resta la primera ecuación a las otras dos:

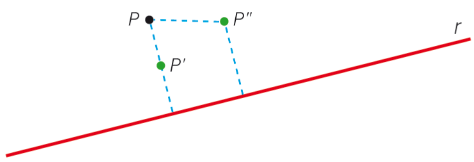
$$\left.\begin{array}{l}8h - 16p = 0\\ 10h - 12p + 5 = 0\end{array}\right\} \rightarrow h = 2p \rightarrow 10 \cdot 2p - 12p + 5 = 0 \rightarrow p = -\frac{5}{8} h = -\frac{5}{4}$$

Se sustituye p y h en la primera ecuación:

$$\left(\frac{-5}{4}\right)^2 - 4\left(\frac{-5}{4}\right) + 8\left(\frac{-5}{8}\right) + 2\left(\frac{-5}{8}\right)\left(\frac{-5}{4}\right) + 4 = 0 \rightarrow k = \frac{89}{20}$$

Ecuación de la parábola: $\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 = -\frac{5}{4}\left(y - \frac{89}{20}\right)$

82. **Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos que equidistan del punto *P*(3, 1) y de la recta *r*: 3*x* − 4*y* + 5 = 0.**



Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico.

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = \frac{|3x - 4y + 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}$$

$$\rightarrow \sqrt{x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1} = \frac{|3x - 4y + 5|}{5} \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = \frac{9x^2 + 16y^2 + 25 + 30x - 40y - 24xy}{25} \rightarrow$$

$$\rightarrow 25x^2 - 150x + 225 + 25y^2 - 50y + 25 = 9x^2 + 16y^2 + 25 + 30x - 40y - 24xy \rightarrow$$

$$\rightarrow 16x^2 + 9y^2 + 24xy - 180x - 10y + 225 = 0$$

83. **En cada uno de los siguientes casos escribe la ecuación de la circunferencia correspondiente.**

a) $C(0, 0); r = \frac{3}{5}$

b) $C(0, 7); r = 14$

c) $C(5, 0); r = 7$

d) $C(7, -1); r = 5$

e) $C(2, -1); r = \frac{\sqrt{2}}{3}$

f) $C(6, 8); r = \sqrt{2}$

g) $C(12, 4); r = \frac{1}{2}$

h) $C(-4, -3); r = 8$

a) $x^2 + y^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \rightarrow$ Ecuación de la circunferencia: $25x^2 + 25y^2 = 9$

b) $x^2 + (y - 7)^2 = 14^2 \rightarrow$ Ecuación de la circunferencia: $x^2 + y^2 - 14y - 147 = 0$

c) $(x - 5)^2 + y^2 = 7^2 \rightarrow$ Ecuación de la circunferencia: $x^2 + y^2 - 10x - 24 = 0$

d) $(x - 7)^2 + (y + 1)^2 = 5^2 \rightarrow$ Ecuación de la circunferencia: $x^2 + y^2 - 14x + 2y + 25 = 0$

e) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 \rightarrow$ Ecuación de la circunferencia: $9x^2 + 9y^2 - 36x + 18y + 43 = 0$

f) $(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \rightarrow$ Ecuación de la circunferencia: $x^2 + y^2 - 12x - 16y + 98 = 0$

g) $(x - 12)^2 + (y - 4)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow$ Ecuación de la circunferencia: $4x^2 + 4y^2 - 96x - 32y + 639 = 0$

h) $(x + 4)^2 + (y + 3)^2 = 8^2 \rightarrow$ Ecuación de la circunferencia: $x^2 + y^2 + 8x + 6y - 39 = 0$

84. **Obtén la ecuación de la circunferencia en cada uno de los siguientes casos.**

a) Centro en $(-2, -5)$ y pasa por $(6, 1)$.

b) Centro en $(7, 2)$ y pasa por $(0, 0)$.

c) Tangente al eje Y y con centro en $(4, -2)$.

d) Tangente al eje X y con centro en $(0, -3)$.

e) Los extremos de un diámetro son $(5, -4)$ y $(-5, 1)$.

f) Los puntos $(7, -6)$ y $(1, 3)$ son diametralmente opuestos.

a) La ecuación es de la forma: $(x + 2)^2 + (y + 5)^2 = r^2$

Como $(6, 1)$ está en la circunferencia: $(6 + 2)^2 + (1 + 5)^2 = r^2 \rightarrow r = 10$

Ecuación de la circunferencia: $(x + 2)^2 + (y + 5)^2 = 10^2 \rightarrow x^2 + y^2 + 4x + 10y - 71 = 0$

b) La ecuación es de la forma: $(x - 7)^2 + (y - 2)^2 = r^2$

Como $(0, 0)$ está en la circunferencia: $(-7)^2 + (-2)^2 = r^2 \rightarrow r = \sqrt{53}$

Ecuación de la circunferencia: $(x - 7)^2 + (y - 2)^2 = \left(\sqrt{53}\right)^2 \rightarrow x^2 + y^2 - 14x - 4y = 0$

c) La ecuación es de la forma: $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = r^2$

$d(C, OY) = 4 = r \rightarrow$ Ecuación de la circunferencia: $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 4^2 \rightarrow x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 = 0$

d) La ecuación es de la forma: $x^2 + (y + 3)^2 = r^2$

$d(C, OX) = 3 = r \rightarrow$ Ecuación de la circunferencia: $x^2 + (y + 3)^2 = 3^2 \rightarrow x^2 + y^2 + 6y = 0$

e) Longitud del diámetro: $d((5,-4),(-5,1)) = \sqrt{(-5-5)^2+(1+4)^2} = 5\sqrt{5} \rightarrow r = \frac{5\sqrt{5}}{2}$

$$\left(\frac{5+(-5)}{2}, \frac{-4+1}{2}\right) = \left(0, -\frac{3}{2}\right) \rightarrow C\left(0, -\frac{3}{2}\right)$$

Ecuación de la circunferencia: $x^2 + \left(y+\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{5\sqrt{5}}{2}\right)^2 \rightarrow 4x^2 + 4y^2 + 12y - 116 = 0$

f) Longitud del diámetro: $d((7,-6),(1,3)) = \sqrt{(1-7)^2+(3+6)^2} = 3\sqrt{13} \rightarrow r = \frac{3\sqrt{13}}{2}$

$$\left(\frac{7+1}{2}, \frac{-6+3}{2}\right) = \left(4, -\frac{3}{2}\right) \rightarrow C\left(4, -\frac{3}{2}\right)$$

Ecuación de la circunferencia: $(x-4)^2 + \left(y+\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3\sqrt{13}}{2}\right)^2 \rightarrow 4x^2 + 4y^2 - 32x + 12y - 44 = 0$

85. Determina la ecuación de una circunferencia con centro en $(-1, 6)$ y que pasa por el punto $(3, -3)$. ¿Está el punto $(-2, -8)$ situado en esa circunferencia?

La ecuación de la circunferencia es de la forma: $(x+1)^2 + (y-6)^2 = r^2$

Si pasa por el punto $(3, -3)$: $(3+1)^2 + (-3-6)^2 = 97 \rightarrow r = \sqrt{97}$

La ecuación simplificada es: $x^2 + y^2 + 2x - 12y - 60 = 0$

Sustituimos: $(-2)^2 + (-8)^2 + 2(-2) - 12(-8) - 60 = 100 \neq 0$
$(-2, -8)$ No pertenece a la circunferencia.

86. Halla, en cada caso, la ecuación de la circunferencia que cumple estas condiciones.

a) Pasa por los puntos $(-3, 7)$ y $(11, 3)$ y tiene radio de 2 unidades.
b) Pasa por los puntos $(5, 4)$ y $(-2, 3)$ y tiene radio de 5 unidades.

a) La distancia entre los dos puntos es mayor que 4, con lo que no pueden estar los dos en una circunferencia de diámetro 4.

b) La ecuación es de la forma: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 25$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Pasa por } (5,4) \rightarrow (5-a)^2 + (4-b)^2 = 25 \rightarrow a^2 + b^2 - 10a - 8b + 16 = 0 \\ \text{Pasa por } (-2,3) \rightarrow (-2-a)^2 + (3-b)^2 = 25 \rightarrow a^2 + b^2 + 4a - 6b - 12 = 0 \end{array}\right\}$$

Restamos la segunda ecuación a la primera:

$-14a - 2b + 28 = 0 \rightarrow b = 14 - 7a$

Sustituimos en la primera ecuación:

$a^2 + (14-7a)^2 - 10a - 8(14-7a) + 16 = 0 \rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \rightarrow a_1 = 1$ y $a_2 = 2$

Si $a = 1 \rightarrow b = 7$ y la ecuación de la circunferencia es $(x-1)^2 + (y-7)^2 = 25 \rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 14y + 25 = 0$

Si $a = 2 \rightarrow b = 0$ y la ecuación de la circunferencia es $(x-2)^2 + y^2 = 25 \rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 21 = 0$

87. **Estudia si las siguientes ecuaciones corresponden a circunferencias. En caso afirmativo, calcula su centro y su radio.**

a) $x^2 + y^2 - 9x + 6y + 41 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 3 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 10x + 12y + 33 = 0$
d) $x^2 + y^2 - x + 12y + 41 = 0$
e) $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 10 = 0$
f) $x^2 + y^2 + 8x + 10y + 41 = 0$

a) $\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + (y+3)^2 = -\frac{47}{4}$ → No es una circunferencia.

b) $(x+4)^2 + (y-5)^2 = 38$ → Corresponde a una circunferencia con $C(-4, 5)$ y $r = \sqrt{38}$.

c) $(x+5)^2 + (y+6)^2 = 28$ → Corresponde a una circunferencia con $C(-5, -6)$ y $r = 2\sqrt{7}$.

d) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y+6)^2 = -\frac{19}{4}$ → No es una circunferencia.

e) $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 0$ → No es una circunferencia.

f) $(x+4)^2 + (y+5)^2 = 0$ → No es una circunferencia.

88. **Halla en cada caso la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos *A*, *B* y *C*.**

a) $A(2, 8)$, $B(2, -5)$ y $C(0, 0)$
b) $A(4, 0)$, $B(-1, -2)$ y $C(1, 4)$
c) $A(0, 2)$, $B(1, 7)$ y $C(-3, -4)$

a) La ecuación es de la forma: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Como D, E, F están en la circunferencia:

$2^2 + 8^2 + D2 + E8 + F = 0 \rightarrow 2D + 8E + F + 68 = 0$

$2^2 + (-5)^2 + D2 + E(-5) + F = 0 \rightarrow 2D - 5E + F + 29 = 0$

$F = 0$

$$\left.\begin{array}{r} 2D + 8E + 68 = 0 \\ 2D - 5E + 29 = 0 \end{array}\right\}$$

Restamos la segunda ecuación a la primera: $13E + 39 = 0 \rightarrow E = -3$

Sustituimos en la primera: $2D + 8 \cdot (-3) + 68 = 0 \rightarrow D = -22$

Ecuación de la circunferencia: $x^2 + y^2 - 22x - 3y = 0$

b) La ecuación es de la forma: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Como D, E, F están en la circunferencia:

$4^2 + 0 + 4D + 0 + F = 0 \rightarrow 4D + F + 16 = 0 \rightarrow F = -4D - 16$

$(-1)^2 + (-2)^2 + D(-1) + E(-2) + F = 0 \rightarrow -D - 2E + F + 5 = 0$

$1 + 4^2 + D + E4 + F = 0 \rightarrow D + 4E + F + 17 = 0$

Sustituimos en las dos ecuaciones:

$D - 2E - 4D - 16 + 5 = 0 \rightarrow -5D - 2E - 11 = 0$

$D + 4E - 4D - 16 + 17 = 0 \rightarrow -3D + 4E + 1 = 0$

$D = -\frac{21}{13}$ $\quad F = \frac{124}{13}$ $\quad E = -\frac{19}{13}$

Ecuación de la circunferencia: $x^2 + y^2 - \frac{21x}{13} - \frac{19y}{13} - \frac{124}{13} = 0 \rightarrow 13x^2 + 13y^2 - 21x - 19y - 124 = 0$

c) La ecuación es de la forma: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Como D, E, F están en la circunferencia:

$0 + 2^2 + 0 + E2 + F = 0 \to 2E + F + 4 = 0 \to F = -2E - 4$

$1 + 7^2 + D + E7 + F = 0 \to D + 7E + F + 50 = 0$

$(-3)^2 + (-4)^2 + D(-3) + E(-4) + F = 0 \to -3D - 4E + F + 25 = 0$

Sustituimos en las dos ecuaciones:

$D + 7E - 2E - 4 + 50 = 0 \to D + 5E + 46 = 0$ $\qquad E = -\dfrac{53}{3} \to F = \dfrac{94}{3}$

$-3D - 4E - 2E - 4 + 25 = 0 \to -3D - 6E + 21 = 0$ $\qquad D = \dfrac{127}{3}$

Ecuación de la circunferencia: $x^2 + y^2 + \dfrac{127x}{3} - \dfrac{53y}{3} + \dfrac{94}{3} = 0 \to 3x^2 + 3y^2 + 127x - 53y + 94 = 0$

89. Determina el punto de la circunferencia de centro (2, 8) y radio 5 que esté más próximo a cada uno de los siguientes puntos.

a) $P(7, 18)$ b) $Q(-1, 6)$ c) $R(5, 4)$

La ecuación de la circunferencia es: $(x-2)^2 + (y-8)^2 = 25 \to x^2 + y^2 - 4x - 16y + 43 = 0$

a) La recta que pasa por P y el centro de la circunferencia es: $2x - y + 4 = 0$

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4x - 16y + 43 &= 0 \\ y &= 2x + 4 \end{aligned}\right\} \to x^2 - 4x - 1 = 0 \to x = 2 \pm \sqrt{5}$$

Las coordenadas del punto más próximo son: $A\left(2 + \sqrt{5}, 8 + 2\sqrt{5}\right)$

b) La recta que pasa por Q y el centro de la circunferencia es: $2x - 3y + 20 = 0$

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4x - 16y + 43 &= 0 \\ y &= \frac{2x + 20}{3} \end{aligned}\right\} \to 13x^2 - 52x - 173 = 0 \to x = \frac{26 \pm 15\sqrt{13}}{13}$$

Las coordenadas del punto más próximo son: $M\left(\dfrac{26 - 15\sqrt{13}}{13}, 24 - 10\sqrt{13}\right)$

c) $5^2 + 4^2 - 4 \cdot 5 - 16 \cdot 4 + 43 = 0 \to R$ pertenece a la circunferencia y coincide con el punto pedido.

90. Dada la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 20 = 0$ halla la ecuación de las rectas tangente y normal en el punto (2, 2).

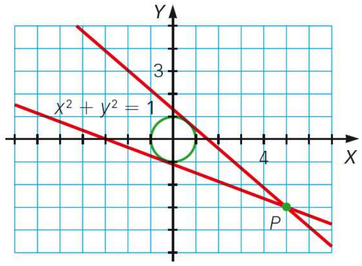
$A = 4 \to a = -2$ $\qquad B = 2 \to b = -1$ $\qquad$ Centro $= (-2, -1)$

$C = -20 \to$ Como $C = a^2 + b^2 - r^2 \to r = 5$

La recta normal pasa por el punto (2, 2) y el centro $(-2, -1) \to 3x - 4y + 2 = 0$

La recta tangente pasa por el punto (2, 2) y es perpendicular a la normal $\to 4x + 3y - 14 = 0$

91. **Obtén la ecuación de las rectas que pasan por $P(5, -3)$ y que son tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.**



La ecuación de la tangente es de la forma: $y = Ax + B$

Como es tangente a la circunferencia, la intersección entre la recta y la circunferencia es un único punto:

$x^2 + (Ax + B)^2 = 1 \rightarrow (1 + A^2)x^2 + 2ABx + B^2 - 1 = 0$

Discriminante: $(2AB)^2 - 4(1 + A^2)(B^2 - 1) = 0 \rightarrow -B^2 + A^2 + 1 = 0$

Como $P(5, -3)$ pertenece a la tangente: $-3 = A5 + B \rightarrow B = -3 - 5A$

Sustituyendo B en la ecuación del discriminante se tiene $12A^2 + 15A + 4 = 0$, y resolviendo esta ecuación:

$$A = \frac{-15 + \sqrt{33}}{24} \rightarrow B = \frac{3 - 5\sqrt{33}}{24} \qquad A = \frac{-15 - \sqrt{33}}{24} \rightarrow B = \frac{3 + 5\sqrt{33}}{24}$$

Rectas tangentes: $y = \dfrac{-15 + \sqrt{33}}{24}x + \dfrac{3 - 5\sqrt{33}}{24} \rightarrow 24y = \left(-15 + \sqrt{33}\right)x + \left(3 - 5\sqrt{33}\right)$

Rectas tangentes: $y = \dfrac{-15 - \sqrt{33}}{24}x + \dfrac{3 + 5\sqrt{33}}{24} \rightarrow 24y = \left(-15 - \sqrt{33}\right)x + \left(3 + 5\sqrt{33}\right)$

92. **Determina la ecuación de la recta tangente a la circunferencia de radio 3 y centro $(5, -2)$, que es paralela a la recta $2x + y - 11 = 0$.**

Las rectas paralelas a la recta dada son de la forma: $2x + y + k = 0$

$$\left.\begin{aligned}(x-5)^2 + (y+2)^2 &= 9\\ 2x + y + k &= 0\end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned}x^2 + y^2 - 10x + 4y + 20 &= 0\\ y &= -2x - k\end{aligned}\right\}$$

$$\rightarrow 5x^2 + (4k - 18)x + k^2 - 4k + 20 = 0$$

Si la recta es tangente, entonces la intersección con la circunferencia es un solo punto, luego la ecuación de segundo grado debe tener una única solución.

$(4k - 18)^2 - 20(k^2 - 4k + 20) = 0 \rightarrow k^2 + 16k + 19 = 0 \rightarrow k = -8 \pm 3\sqrt{5}$

Las dos rectas que cumplen las condiciones son: $\begin{cases} 2x + y - 8 + 3\sqrt{5} = 0 \\ 2x + y - 8 - 3\sqrt{5} = 0 \end{cases}$

93. **Determina la ecuación de la circunferencia de centro $(1, -3)$ que es tangente a la recta $3x + y - 2 = 0$.**

$$r = d(C, t) = \frac{|3 - 3 - 2|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

La ecuación de la circunferencia es de la forma: $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = \dfrac{2}{5} \rightarrow 5x^2 + 5y^2 - 10x + 30y + 48 = 0$

94. **Determina la ecuación de la circunferencia de centro $(3, -4)$ que es tangente a la siguiente recta.**

$$3x + 4y - 18 = 0$$

$$r = d(C, t) = \frac{|9 - 16 - 18|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 5$$

La ecuación de la circunferencia es de la forma: $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25 \rightarrow x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$

95. Determina la ecuación de la circunferencia de centro (4, −2) que es tangente a la recta $x - 3y = -5$.

$$r = d(C, t) = \frac{|4+6+5|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{15}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$$

La ecuación de la circunferencia es de la forma: $(x-4)^2 + (y+2)^2 = \frac{45}{2} \to 2x^2 + 2y^2 - 16x + 8y - 5 = 0$

96. Determina la ecuación de la circunferencia tangente a la recta $x + y + 5 = 0$ en $(-3, -2)$ y cuyo centro está sobre el eje Y.

$$C(0,k) \to r = d(C,t) = \frac{|0+k+5|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|k+5|}{\sqrt{2}} = \frac{|k+5|\sqrt{2}}{2}$$

La ecuación de la circunferencia es de la forma: $x^2 + (y-k)^2 = \frac{2(k+5)^2}{4} \to x^2 + (y-k)^2 = \frac{(k+5)^2}{2}$

Como $(-3, -2)$ está en la circunferencia: $(-3)^2 + (-2-k)^2 = \frac{(k+5)^2}{2} \to k = 1$

Ecuación de la circunferencia: $x^2 + (y-1)^2 = 18 \to x^2 + y^2 - 2y - 17 = 0$

97. Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(3, 9)$ y $B(8, 4)$ y tiene su centro en la recta cuya ecuación es $2x - 5y + 14 = 0$.

El centro equidista de los puntos A y B, entonces, se encuentra en la mediatriz del segmento AB. Sea $P(x, y)$ un punto de esa mediatriz, entonces $d(A, P) = d(B, P)$.

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-9)^2} = \sqrt{(x-8)^2+(y-4)^2} \to x^2 - 6x + y^2 - 18y + 90 = x^2 - 16x + y^2 - 8y + 80 \to x - y + 1 = 0$$

El centro es la intersección de esa recta y la recta dada:

$$\left.\begin{array}{r} x-y+1=0 \\ 2x-5y+14=0 \end{array}\right\} \to C(3, 4) \to r^2 = (3-3)^2 + (4-9)^2 = 25$$

Ecuación de la circunferencia: $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25 \to x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$

98. Determina la ecuación de la circunferencia tangente a la recta $2x - 5y + 1 = 0$ en el punto (2, 1) cuyo centro está en la recta de ecuación $x + y = 0$.

El centro está en la recta $x + y = 0$, por tanto, sus coordenadas serán de la forma $C(h, -h)$.

$$C(h, -h) \to r = d(C, t) = \frac{|2h+5h+1|}{\sqrt{2^2+5^2}} = \frac{|7h+1|}{\sqrt{29}}$$

La ecuación de la circunferencia es de la forma: $(x-h)^2 + (y+h)^2 = \frac{(7h+1)^2}{29}$

Como (2, 1) está en la circunferencia: $(2-h)^2 + (1+h)^2 = \frac{(7h+1)^2}{29} \to h^2 - 8h + 16 = 0 \to h = 4$

Ecuación de la circunferencia: $(x-4)^2 + (y+4)^2 = 29 \to x^2 + y^2 - 8x + 8y + 3 = 0$

99. **Determina la ecuación de la circunferencia tangente a la recta $x + y + 4 = 0$ en el punto $(-3, -1)$ cuyo centro está en la recta $3x - 4y + 2 = 0$.**

El centro está en la recta $3x - 4y + 2 = 0$, por tanto, sus coordenadas serán de la forma $C\left(h, \frac{3h+2}{4}\right)$.

$$C\left(h, \frac{3h+2}{4}\right) \to r = d(C, t) = \frac{\left|h + \frac{3h+2}{4} + 4\right|}{\sqrt{1^2+1^2}} =$$

$$\frac{|7h+18|}{4\sqrt{2}}$$

La ecuación de la circunferencia es de la forma: $(x-h)^2 + \left(y - \frac{3h+2}{4}\right)^2 = \frac{(7h+18)^2}{32}$

Como $(-3, -1)$ está en la circunferencia: $(-3-h)^2 + \left(-1 - \frac{3h+2}{4}\right)^2 = \frac{(7h+18)^2}{32} \to h^2 + 12h + 36 = 0 \to h = -6$

Ecuación de la circunferencia: $(x+6)^2 + (y+4)^2 = 18 \to x^2 + y^2 + 12x + 8y + 34 = 0$

100. **Determina la ecuación de la circunferencia tangente a la recta $3x - 2y + 4 = 0$ en $(2, 5)$ cuyo centro está sobre el eje X.**

$$C(h, 0) \to r = d(C, t) = \frac{|3h+4|}{\sqrt{3^2+2^2}} = \frac{|3h+4|}{\sqrt{13}}$$

La ecuación de la circunferencia es de la forma: $(x-h)^2 + y^2 = \frac{(3h+4)^2}{13}$

Como $(2, 5)$ está en la circunferencia: $(2-h)^2 + 5^2 = \frac{(3h+4)^2}{13} \to h = \frac{19}{2}$

Ecuación de la circunferencia: $\left(x - \frac{19}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{4225}{52} \to 52x^2 + 52y^2 - 988x + 468 = 0$

101. **Halla la ecuación de la circunferencia tangente a la recta $4x + 3y - 4 = 0$ en el punto $(4, -4)$ cuyo centro está en la recta $x - y - 7 = 0$.**

El centro está en la recta $x + y - 7 = 0$, por tanto, sus coordenadas serán de la forma $C(h, h-7)$.

$$C(h, h-7) \to r = d(C, t) = \frac{|4h + 3(h-7) - 4|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{|7h-25|}{5}$$

La ecuación de la circunferencia es de la forma: $(x-h)^2 + (y - \mathrm{h} + 7)^2 = \frac{(7h-25)^2}{25}$

Como $(4, -4)$ está en la circunferencia: $(4-h)^2 + (-4 - \mathrm{h} + 7)^2 = \frac{(7h-25)^2}{25} \to h = 0$

Ecuación de la circunferencia: $x^2 + (y+7)^2 = 25$

102. **Halla los puntos de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 28 = 0$ con estas rectas.**

a) $r: x + 9y - 16 = 0$
b) $s: x + y + 2 = 0$
c) $t: 4x - 5y - 23 = 0$

a) $\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 4x + 6y - 28 = 0 \\ x + 9y - 16 = 0 \end{array}\right\} \to y^2 - 3y + 2 = 0$

Los puntos de intersección son: $(7, 1)$ y $(-2, 2)$

b) $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2-4x+6y-28=0 \\ x+y+2=0 \end{array}\right\} \rightarrow x^2-3x-18=0$

Los puntos de intersección son: (6, −8) y (−3, 1)

c) $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2-4x+6y-28=0 \\ 4x-5y-23=0 \end{array}\right\} \rightarrow x^2-4x-21=0$

Los puntos de intersección son: (7, 1) y (−3, −7)

103. Estudia, según el valor de *m*, la posición relativa de la recta $y = mx + 2$ con respecto a la circunferencia $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$.

$(x-3)^2 + (mx+2-2)^2 = 4 \rightarrow (1+m^2)x^2 - 6x + 5 = 0$

Discriminante: $36 - 4 \cdot (1+m^2) \cdot 5 = 16 + 20m^2$

$16 - 20m^2 = 0 \rightarrow m^2 = \frac{4}{5} \rightarrow m = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5} \rightarrow$ Tangente.

$16 - 20m^2 < 0 \rightarrow m < -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ y $m > \frac{2\sqrt{5}}{5} \rightarrow$ Exterior.

$16 - 20m^2 > 0 \rightarrow -\frac{2\sqrt{5}}{5} < m < \frac{2\sqrt{5}}{5} \rightarrow$ Secante.

104. En función del valor que tome *m*, estudia la posición relativa de la recta $y = mx + 2$ respecto a la circunferencia $x^2 + 4x + y^2 - 6y - 12 = 0$.

$x^2 + 4x + (mx+2)^2 - 6(mx+2) - 12 = 0 \rightarrow (1+m^2)x^2 - (4-2m)x - 20 = 0$

Discriminante: $(4-2m)^2 - 4 \cdot (-20) \cdot (1+m^2) = 84m^2 - 16m + 96$

$84m^2 - 16m + 96 = 0 \rightarrow$ No tiene solución.

$84m^2 - 16m + 96 < 0 \rightarrow$ No tiene solución.

$84m^2 - 16m + 96 > 0 \rightarrow$ Siempre $\rightarrow$ La recta es secante para cualquier valor de m.

105. Calcula el valor que debe tener *k* para que la recta *r* y la circunferencia *C* sean tangentes.

a) $r: 3x + 2y + k = 0 \qquad C: x^2 + y^2 - 6x + 8y - 6 = 0$

b) $r: 4x + 2y + k = 0 \qquad C: x^2 + y^2 + 6x + 10y - 1 = 0$

a) $x = -\frac{2y+k}{3}$

$$\left(\frac{2y+k}{3}\right)^2 + y^2 + 6\left(\frac{2y+k}{3}\right) + 8y - 6 = 0 \rightarrow 13y^2 + (108+4k)y + k^2 + 18k - 54 = 0$$

Para que la recta sea tangente a la circunferencia, la solución debe ser única:

Discriminante: $(108+4k)^2 - 4 \cdot 13 \cdot (k^2 + 18k - 54) = 0 \rightarrow k = -1 \pm \sqrt{403}$

b) $x = -\frac{2y+k}{4}$

$$\left(-\frac{2y+k}{4}\right)^2 + y^2 + 6\left(-\frac{2y+k}{4}\right) + 10y - 1 = 0 \rightarrow 20y^2 + (112+4k)y + k^2 - 24k - 16 = 0$$

Para que la recta sea tangente a la circunferencia, la solución debe ser única:

Discriminante: $(112+4k)^2 - 4 \cdot 20 \cdot (k^2 - 24k - 16) = 0 \rightarrow k = 22 \pm 10\sqrt{7}$

106. **Obtén el valor del coeficiente C en la circunferencia $x^2 + y^2 + 10x + 2y + C = 0$ para que sea tangente a la recta $2x + 3y = 0$.**

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 + 10x + 2y + C = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow 13x^2 + 78x + 9C = 0$$

Si la recta es tangente, entonces la intersección con la circunferencia es un solo punto, luego la ecuación de segundo grado debe tener una única solución.

$6\,084 - 468C = 0 \rightarrow C = 13$

107. **Estudia la posición relativa de los siguientes pares de circunferencias.**

a) $C_1: x^2 + y^2 - 8x + 5y - 7 = 0$
$C_2: x^2 + y^2 - 8x + 5y - 15 = 0$

b) $C_1: x^2 + y^2 - 7x - 11y - 3 = 0$
$C_2: x^2 + y^2 - 7x - 10y + 2 = 0$

c) $C_1: x^2 + y^2 + 8x + 4y - 11 = 0$
$C_2: x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$

d) $C_1: x^2 + y^2 + 4x + 2y + 4 = 0$
$C_2: x^2 + y^2 - 2x - 8y - 32 = 0$

e) $C_1: x^2 + y^2 + 4x - 2y - 15 = 0$
$C_2: x^2 + y^2 - 12x - 10y + 45 = 0$

f) $C_1: x^2 + y^2 + 8x - 4y + 18 = 0$
$C_2: x^2 + y^2 - 2x + 6y - 22 = 0$

a) $C_1: (x-4)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{117}{4} \rightarrow$ Centro $\left(4, -\frac{5}{2}\right)$ y $r_1 = \frac{\sqrt{117}}{2}$

$C_2: (x-4)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{149}{4} \rightarrow$ Centro $\left(4, -\frac{5}{2}\right)$ y $r_2 = \frac{\sqrt{149}}{2}$

El centro es el mismo y $r_2 > r_1 \rightarrow$ Son concéntricas.

b) $C_1: \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{11}{2}\right)^2 = \frac{182}{4} \rightarrow$ Centro $\left(\frac{7}{2}, \frac{11}{2}\right)$ y $r_1 = \frac{\sqrt{182}}{2}$

$C_2: \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + (y-5)^2 = \frac{141}{4} \rightarrow$ Centro $\left(\frac{7}{2}, 5\right)$ y $r_2 = \frac{\sqrt{141}}{2}$

$d(C_1, C_2) = \sqrt{0 + \left(5 - \frac{11}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} < r_1 - r_2 \rightarrow$ Son interiores.

c) $C_1: (x+4)^2 + (y+2)^2 = 31 \rightarrow$ Centro $(-4, -2)$ y $r_1 = \sqrt{31}$

$C_2: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 4 \rightarrow$ Centro $(3, 4)$ y $r_2 = 2$

$d(C_1, C_2) = \sqrt{(-4-3)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{85} > r_1 + r_2 \rightarrow$ Son exteriores.

d) $C_1: (x+2)^2 + (y+1)^2 = 1 \rightarrow$ Centro $(-2, -1)$ y $r_1 = 1$

$C_2: (x-1)^2 + (y-4)^2 = 49 \rightarrow$ Centro $(1, 4)$ y $r_2 = 7$

$d(C_1, C_2) = \sqrt{(1+2)^2 + (4+1)^2} = 5{,}83 < r_2 - r_1 \rightarrow$ Son interiores.

e) $C_1: (x+2)^2 + (y-1)^2 = 20 \rightarrow$ Centro $(-2, 1)$ y $r_1 = 2\sqrt{5}$

$C_2: (x-6)^2 + (y-5)^2 = 16 \rightarrow$ Centro $(6, 5)$ y $r_2 = 4$

$d(C_1, C_2) = \sqrt{(6+2)^2 + (5-1)^2} = 4\sqrt{5} > r_2 + r_1 \rightarrow$ Son exteriores.

f) $C_1: (x+4)^2 + (y-2)^2 = 2 \rightarrow$ Centro $(-4, 2)$ y $r_1 = \sqrt{2}$

$C_2: (x-1)^2 + (y+3)^2 = 32 \rightarrow$ Centro $(1, -3)$ y $r_2 = \sqrt{32}$

$d(C_1, C_2) = \sqrt{(1+4)^2 + (-3-2)^2} = 5\sqrt{2} = r_2 + r_1 \rightarrow$ Son tangentes exteriores.

108. **Halla los puntos de intersección de las siguientes circunferencias.**

a) C_1: $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 13 = 0$
C_2: $x^2 + y^2 - 8x + 11 = 0$

b) C_1: $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 8 = 0$
C_2: $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 24 = 0$

a) C_1: $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 5 \rightarrow$ Centro (3, 3) y $r_1 = \sqrt{5}$

C_2: $(x-4)^2 + y^2 = 5 \rightarrow$ Centro (4, 0) y $r_1 = \sqrt{5}$

$d(C_1, C_2) = \sqrt{(4-3)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{10} < r_1 + r_2$ y $\sqrt{10} > r_1 - r_2 \rightarrow$ Secantes (dos puntos de intersección).

Se resuelve el sistema formado por C_1 y C_2:

Se resta C_2 a C_1: $x - 3y + 1 = 0 \rightarrow x = 3y - 1$

Se sustituye en C_2: $(3y-1)^2 + y^2 - 8(3y-1) + 11 = 0 \rightarrow y^2 - 3y + 2 = 0 \rightarrow y_1 = 1, y_2 = 2 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = 5$

Puntos de intersección: (2, 1) y (5, 2)

b) C_1: $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 5 \rightarrow$ Centro (−3, 2) y $r_1 = \sqrt{5}$

C_2: $(x+2)^2 + (y-5)^2 = 5 \rightarrow$ Centro (−2, 5) y $r_1 = \sqrt{5}$

$d(C_1, C_2) = \sqrt{(-2+3)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{10} < r_1 + r_2$ y $\sqrt{10} > r_1 - r_2 \rightarrow$ Secantes (dos puntos de intersección).

Se resuelve el sistema formado por C_1 y C_2:

Se resta C_2 a C_1: $x + 3y - 8 = 0 \rightarrow x = -3y + 8$

Se sustituye en C_1: $(8-3y)^2 + y^2 + 6(8-3y) - 4y + 8 = 0 \rightarrow y^2 - 7y + 12 = 0 \rightarrow y_1 = 3, y_2 = 4 \rightarrow x_1 = -1, x_2 = -4$

Puntos de intersección: (−1, 3) y (−4, 4)

109. **Estudia la posición del punto $P(-3, 2)$ respecto de la circunferencia $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = k$, según el valor de k.**

$C(1, -3)$ $\quad r = \sqrt{k}$ $\quad d(P, C) = \sqrt{(1+3)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{41}$

Si $k = 41 \rightarrow P$ pertenece a la circunferencia.

Si $k > 41 \rightarrow P$ es interior.

Si $0 < k < 41 \rightarrow P$ es exterior.

110. **Halla el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan, a la vez, por los puntos (4, 1) y (−2, 5). ¿De qué figura se trata?**

Los centros de las circunferencias se encuentran a la misma distancia de ambos puntos; por tanto, forman la mediatriz del segmento que determinan.

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-5)^2} \rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 =$$
$$= x^2 + 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 \rightarrow 3x - 2y + 3 = 0$$

111. **Halla el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de cuadrados a los puntos (1, −2) y (0, 3) sea siempre 5 unidades.**

Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico, entonces $(x-1)^2 + (y+2)^2 - x^2 - (y-3)^2 = 5 \rightarrow 2x - 10y + 9 = 0$

112. **Calcula la longitud de la cuerda que forma la recta $x + 2y - 5 = 0$ sobre la circunferencia de $x^2 + y^2 = 25$.**

Calculamos la intersección de la recta y la circunferencia:

$x = 5 - 2y$

$(5 - 2y)^2 + y^2 = 25 \rightarrow y^2 - 4y = 0 \rightarrow y_1 = 0,\ y_2 = 4 \rightarrow x_1 = 5,\ x_2 = -3$

Los puntos de intersección de la recta y la circunferencia son $A(5, 0)$ y $B(-3, 4)$.

Longitud de la cuerda: $d(A, B) = \sqrt{(5+3)^2 + (0+4)^2} = 4\sqrt{5}$

113. **Calcula el área de la circunferencia que viene dada por la siguiente ecuación.**

$$x^2 + y^2 - 3x + 5y - 14 = 0$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{90}{4} \rightarrow r^2 = \frac{45}{2}$$

$$\text{Área} = \pi \cdot r^2 = \frac{45\pi}{2}$$

114. **Halla el área de la corona circular formada por las circunferencias C_1 y C_2.**

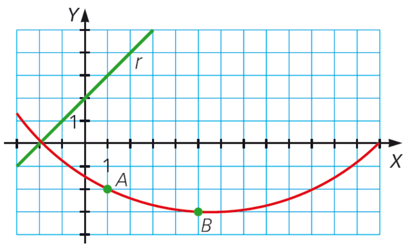
C_1: $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0$ $\qquad$ C_2: $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$

C_1: $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 1 \rightarrow r_1^2 = 1 \rightarrow A_1 = \pi \cdot r^2 = \pi$

C_2: $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4 \rightarrow r_2^2 = 4 \rightarrow A_2 = \pi \cdot r^2 = 4\pi$

Área corona circular $= A_2 - A_1 = 4\pi - \pi = 3\pi$

115. **Escribe la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(1, -2)$ y $B(5, -3)$ y tiene su centro en la recta r: $x - y + 2 = 0$.**



Como el centro equidista de los puntos, se encuentra en la mediatriz de AB:

$P(x, y)$ punto de la mediatriz: $d(A, P) = d(B, P) \rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y+3)^2} \rightarrow 8x - 2y - 29 = 0$

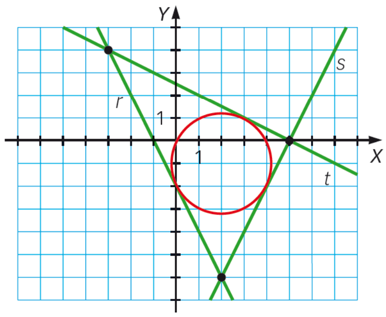
El centro es el punto de intersección de la mediatriz y la recta dada:

$$\left.\begin{array}{r} 8x - 2y - 29 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow x = y - 2 \\ \rightarrow 8(y-2) - 2y - 29 = 0 \rightarrow y = \frac{15}{2} \rightarrow x = \frac{11}{2} \rightarrow C\left(\frac{11}{2}, \frac{15}{2}\right) \end{array}$$

$$r = d(A, C) = \sqrt{\left(\frac{11}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{15}{2} + 2\right)^2} = \sqrt{\frac{442}{4}}$$

Ecuación de la circunferencia: $\left(x - \frac{11}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{15}{2}\right)^2 = \frac{221}{2}$

116. Un triángulo tiene sus lados sobre las rectas cuyas ecuaciones son r: $2x + y + 2 = 0$, s: $2x - y - 10 = 0$ y t: $x + 2y - 5 = 0$. Halla la ecuación de la circunferencia inscrita en este triángulo.



Como (–3, 4), (2, –6) pertenecen a $r \rightarrow r$: $2x + y + 2 = 0$

Como (5, 0) y (2, –6) pertenecen a $s \rightarrow s$: $2x - y - 10 = 0$

Como (5, 0) y (–3, 4) pertenecen a $t \rightarrow t$: $x + 2y - 5 = 0$

El centro de la circunferencia es la intersección de las bisectrices de las intersecciones de las rectas.

Sea $P(x, y)$ un punto de la bisectriz del ángulo formado por las rectas r y t, entonces $d(P, r) = d(P, t)$:

$$\frac{|2x + y + 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|x + 2y - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$$

La solución son dos ecuaciones. Se elige la recta adecuada que pasa por la circunferencia:

$2x + y + 2 = -x - 2y + 5 \rightarrow x + y - 1 = 0$

Sea $P(x, y)$ un punto de la bisectriz del ángulo formado por las rectas s y t, entonces $d(P, s) = d(P, t)$:

$$\frac{|2x - y - 10|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|x + 2y - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$$

La solución son dos ecuaciones. Se elige la recta adecuada que pasa por la circunferencia:

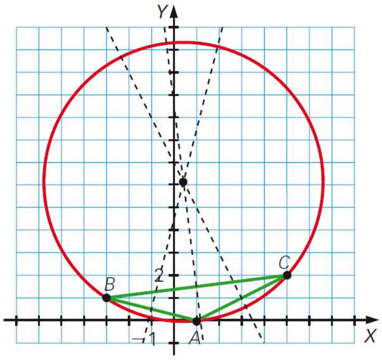
$2x - y - 10 = x + 2y - 5 \rightarrow x - 3y - 5 = 0$

Intersección de las dos rectas: $\left.\begin{matrix} x + y - 1 = 0 \\ x - 3y - 5 = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow x = 2,\ y = -1 \rightarrow$ Centro de la circunferencia: $C(2, -1)$

Radio de la circunferencia: $r = d(C, t) = \dfrac{|2 - 2 - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

Ecuación de la circunferencia: $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5 \rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$

117. Halla la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo de vértices $A(1, 0)$, $B(-3, 1)$ y $C(5, 2)$.



Encuentra las coordenadas del circuncentro del triángulo *ABC*.

La ecuación es de la forma: $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

Como $A(1, 0)$ pertenece a la circunferencia: $1 + 0 + A + C = 0 \to A + C + 1 = 0$

Como $B(-3, 1)$ pertenece a la circunferencia: $9 + 1 - 3A + B + C = 0 \to -3A + B + C + 10 = 0$

Como $C(5, 2)$ pertenece a la circunferencia: $25 + 4 + 5A + 2B + C = 0 \to 5A + 2B + C + 29 = 0$

Se resuelve el sistema: $A = -\dfrac{5}{6}, B = -\dfrac{37}{3}, C = -\dfrac{1}{6}$

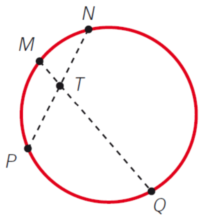
Ecuación de la circunferencia: $x^2 + y^2 - \dfrac{5}{6}x - \dfrac{37}{3}y - \dfrac{1}{6} = 0 \to 6x^2 + 6y^2 - 5x - 74y - 1 = 0$

El circuncentro del triángulo es el centro de la circunferencia:

$$\left(x - \frac{5}{12}\right)^2 + \left(y - \frac{37}{6}\right)^2 = \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{12}\right)^2 + \left(\frac{37}{12}\right)^2 \to \left(x - \frac{5}{12}\right)^2 + \left(y - \frac{37}{6}\right)^2 = \frac{709}{72} \to \text{Circuncentro: } \left(\frac{5}{12}, \frac{37}{6}\right)$$

118. Si dibujas cuatro puntos sobre una circunferencia y los unes, según se observa en la figura, resulta que:

$$|\boldsymbol{TM}| \cdot |\boldsymbol{TQ}| = |\boldsymbol{TN}| \cdot |\boldsymbol{TP}|$$



Compruébalo tomando los puntos $M(5, 1)$, $N(4, 2)$, $P(-3, -5)$ y $Q(-2, 2)$ y demostrando que están sobre la misma circunferencia. Halla su ecuación. Después, calcula el punto *T* y prueba que se verifica la igualdad inicial.

Sea la ecuación de la circunferencia de la forma: $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$.

$$\left.\begin{array}{r} 25 + 1 + 5A + B + C = 0 \\ 16 + 4 + 4A + 2B + C = 0 \\ 9 + 25 - 3A - 5B + C = 0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 5A + B + C = -26 \\ 4A + 2B + C = -20 \\ 3A + 5B - C = 34 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 5A + B + C = -26 \\ A - B = -6 \\ 4A + 3B = 4 \end{array}\right\} \to$$

$$\to \left.\begin{array}{r} 5A + B + C = -26 \\ A - B = -6 \\ 7A = -14 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} A = -2 \\ B = 4 \\ C = -20 \end{array}\right\} \to x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$$

Obtenemos la ecuación de la circunferencia que pasa por M, N y P.

Como $(-2)^2 + 2^2 - 2(-2) + 4 \cdot 2 - 20 = 0$, Q pertenece también a la circunferencia.

La recta que pasa por M y Q tiene por ecuación: $\dfrac{x-5}{-7} = \dfrac{y-1}{1} \to x + 7y - 12 = 0$

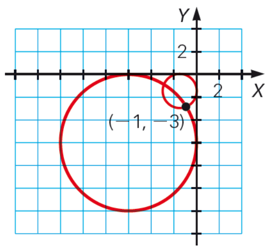
La recta que pasa por N y P tiene por ecuación: $\dfrac{x-4}{-7} = \dfrac{y-2}{-7} \to x - y - 2 = 0$

$$\left.\begin{array}{r} x + 7y - 12 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{array}\right\} \to T\left(\frac{13}{4}, \frac{5}{4}\right)$$

$$\overline{TM} \cdot \overline{TQ} = \sqrt{\left(5 - \frac{13}{4}\right)^2 + \left(1 - \frac{5}{4}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(-2 - \frac{13}{4}\right)^2 + \left(2 - \frac{5}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{50}{16}} \cdot \sqrt{\frac{450}{16}} = \frac{75}{2}$$

$$\overline{TN} \cdot \overline{TP} = \sqrt{\left(4 - \frac{13}{4}\right)^2 + \left(2 - \frac{5}{4}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(-3 - \frac{13}{4}\right)^2 + \left(-5 - \frac{5}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{18}{16}} \cdot \sqrt{\frac{1250}{16}} = \frac{75}{2}$$

119. Obtén la ecuación de las circunferencias tangentes a los ejes de coordenadas que pasan por el punto (−1, −3).



Los centros de las se encuentran en la bisectriz del ángulo formado por los ejes: $x - y = 0 \to$ Los centros serán de la forma $C(h, h)$.

La ecuación de la circunferencia es de la forma: $(x - h)^2 + (y - h)^2 = r^2$

La intersección de las circunferencias con los ejes es un único punto.

Con el eje Y: $x = 0 \to (0 - h)^2 + (y - h)^2 = r^2 \to y^2 - 2hy + 2h^2 - r^2 = 0$

Como la solución es única $\to 4h^2 - 4(2h^2 - r^2) = 0 \to h^2 = r^2$

La ecuación queda de la forma: $x^2 + y^2 - 2hx - 2hy + h^2 = 0$

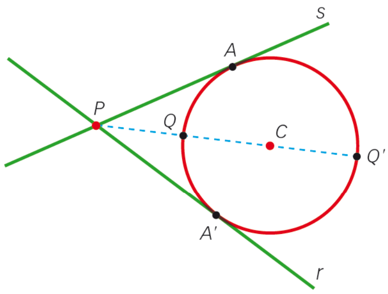
$P(-1, -3)$ pertenece a la circunferencia: $(-1)^2 + (-3)^2 - 2h(-1) - 2h(-3) + h^2 = 0 \to h = r = -4 \pm \sqrt{6}$

Ecuaciones de las circunferencias:

C_1: $\left(x + 4 + \sqrt{6}\right)^2 + \left(y + 4 + \sqrt{6}\right)^2 = \left(-4 - \sqrt{6}\right)^2$

C_2: $\left(x + 4 - \sqrt{6}\right)^2 + \left(y + 4 - \sqrt{6}\right)^2 = \left(-4 + \sqrt{6}\right)^2$

120. **Dadas las rectas r: $3x + 4y - 10 = 0$, s: $5x - 12y + 2 = 0$ y la circunferencia $x^2 + y^2 - 20x + 84 = 0$.**



a) Comprueba que las dos rectas son tangentes a la circunferencia.

b) Halla el punto P de intersección de ambas rectas, el punto C, que es centro de la circunferencia, y los puntos A y A', en los que las rectas son tangentes a la circunferencia.

c) Si llamamos d a la distancia que separa P de C, la distancia de P a Q es $d - r$, y la distancia de P a Q' es $d + r$. Demuestra que $|PQ| \cdot |PQ'| = |PA|^2$.

a) $\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 - 20x + 84 = 0 \\ 3x + 4y - 10 = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow 25x^2 - 380x + 1\,444 = 0$

$\Delta = 0 \rightarrow$ La ecuación tiene una solución; por tanto, la recta es tangente a la circunferencia.

$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 - 20x + 84 = 0 \\ 5x - 12y + 2 = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow 169x^2 - 2\,860x + 12\,100 = 0$

$\Delta = 0 \rightarrow$ La ecuación tiene una solución; por tanto, la recta es tangente a la circunferencia.

b) $\left.\begin{aligned} 3x + 4y - 10 = 0 \\ 5x - 12y + 2 = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 9x + 12y - 30 = 0 \\ 5x - 12y + 2 = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow P(2, 1)$

$x^2 + y^2 - 20x + 84 = 0 \rightarrow (x - 10)^2 + y^2 = 16 \rightarrow C(10, 0)$

$25x^2 - 380x + 1\,444 = 0 \rightarrow x = \dfrac{38}{5} \rightarrow A\left(\dfrac{38}{5}, -\dfrac{16}{5}\right)$

$169x^2 - 2\,860x + 12\,100 = 0 \rightarrow x = \dfrac{110}{13} \rightarrow A'\left(\dfrac{110}{13}, \dfrac{48}{13}\right)$

c) $x^2 + y^2 - 20x + 84 = 0 \rightarrow (x - 10)^2 + y^2 = 16 \rightarrow r = 4$

$d = \sqrt{(10 - 2)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{65}$

$\overline{PQ} \cdot \overline{PQ'} = \left(\sqrt{65} - 4\right) \cdot \left(\sqrt{65} + 4\right) = 65 - 16 = 49$

$\overline{PA}^2 = \left(\dfrac{38}{5} - 2\right)^2 + \left(-\dfrac{16}{5} - 1\right)^2 = \dfrac{784}{25} + \dfrac{441}{25} = 49$

121. **Dadas las rectas r: $3x + 4y + 7 = 0$ y s: $12x - 5y + 7 = 0$, ¿se puede trazar una circunferencia de centro (4, 4) que sea tangente a ambas rectas? ¿Y con centro en el punto (10, 2)? Escribe la ecuación de dicha circunferencia en el caso de que la respuesta haya sido afirmativa.**

Circunferencia de centro (4, 4):

$$\left.\begin{array}{l}\left|\dfrac{3\cdot 4+4\cdot 4+7}{\sqrt{3^2+4^2}}\right|=7\\[2ex]\left|\dfrac{12\cdot 4-5\cdot 4+7}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}\right|=\dfrac{35}{13}\end{array}\right\}\rightarrow$$ No se puede trazar la circunferencia, ya que el centro no se encuentra a la misma distancia de las dos rectas.

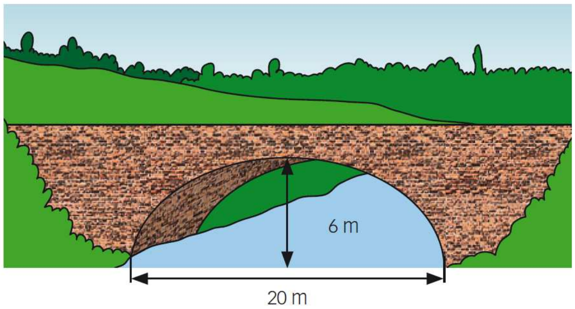
Circunferencia de centro (10, 2):

$$\left.\begin{array}{l}\left|\dfrac{3\cdot 10+4\cdot 2+7}{\sqrt{3^2+4^2}}\right|=9\\[2ex]\left|\dfrac{12\cdot 10-5\cdot 2+7}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}\right|=9\end{array}\right\}\rightarrow$$ El centro está a la misma distancia de las dos rectas.

La ecuación de la circunferencia es:

$(x-4)^2+(y-4)^2=81 \rightarrow x^2+y^2-8x-8y-49=0$

122. El arco del puente de la figura tiene forma de media elipse con las medidas que aparecen.



¿Cuál es la ecuación de la elipse que forma el arco?

Consideramos el centro $O(0, 0)$ en el vértice de la parábola.

La ecuación de la parábola es de la forma: $x^2 = 2py$

Son puntos de la parábola: $(10, -6)$ y $(-10, -6) \rightarrow 10^2 = 2p(-6) \rightarrow p = -\dfrac{25}{3}$

Ecuación de la parábola: $x^2 = -\dfrac{50}{3}y$

123. Dada la elipse de ecuación $9x^2 + 7y^2 - 63 = 0$, determina la longitud de la cuerda que forma esta elipse con la recta de ecuación $2x - y - 1 = 0$.

Despejamos y en la ecuación de la recta: $y = 2x - 1$

Calculamos los puntos de intersección de la recta y la elipse sustituyendo en la ecuación de la elipse:

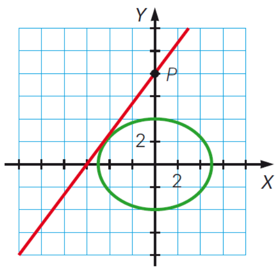
$$9x^2 + 7(2x-1)^2 - 63 = 0 \to 37x^2 - 28x - 56 = 0 \to x = \frac{14 \pm 18\sqrt{7}}{37},\ y = \frac{-9 \pm 36\sqrt{7}}{37}$$

Los puntos son: $\left(\frac{14+18\sqrt{7}}{37}, \frac{-9+36\sqrt{7}}{37}\right)$ y $\left(\frac{14-18\sqrt{7}}{37}, \frac{-9-36\sqrt{7}}{37}\right)$

Longitud de la cuerda es la distancia entre los puntos:

$$\sqrt{\left(\frac{14+18\sqrt{7}}{37} - \frac{14-18\sqrt{7}}{37}\right)^2 + \left(\frac{-9+36\sqrt{7}}{37} - \frac{-9-36\sqrt{7}}{37}\right)^2} = \sqrt{\frac{36^2\cdot 7}{37^2} + \frac{72^2\cdot 7}{37^2}} = \sqrt{\frac{36^2\cdot(1+4)\cdot 7}{37^2}} = \frac{36\sqrt{35}}{37}$$

124. Calcula la recta tangente a la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ que pasa por el punto $P(0, 8)$.



(Las rectas que pasan por (0, 8) tienen como ecuación y = mx + 8).

$y = mx + 8$

$$\left.\begin{array}{r} 16x^2 + 25y^2 = 400 \\ y = mx + 8 \end{array}\right\} \to (16 + 25m^2)x^2 + 400mx + 1\,200 = 0$$

La recta es tangente a la elipse si la ecuación tiene solo una solución, es decir, si el discriminante de la ecuación es igual a cero.

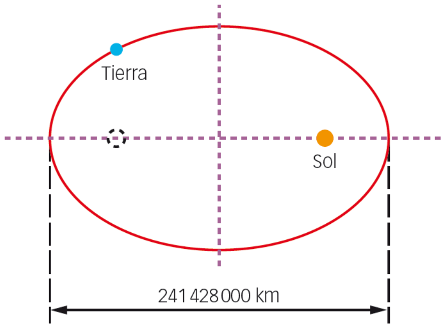
$$\Delta = 160\,000m^2 - 4\,800(16 + 25m^2) = 40\,000m^2 - 76\,800 = 0 \to m = \pm\frac{4\sqrt{3}}{5}$$

Hay dos rectas tangentes a la elipse que pasan por el punto (0, 8):

$$\begin{cases} 4\sqrt{3}x - 5y + 40 = 0 \\ 4\sqrt{3}x + 5y - 40 = 0 \end{cases}$$

125. **Los ingenieros de la NASA pretenden enviar una sonda espacial a la Luna. El departamento de ingeniería ha determinado que el mejor momento para lanzar la sonda es cuando la Tierra está en su punto más lejano del Sol.**

Determina la máxima distancia entre la Tierra y el Sol si se sabe que la órbita terrestre alrededor del Sol es una elipse, con el Sol en uno de sus focos, que la longitud del eje mayor es de 241 428 000 kilómetros y que la excentricidad de la órbita es 0,016. Determina también una ecuación de la elipse que representa la órbita de la Tierra.



$2a = 241\,428\,000 \rightarrow a = 120\,714\,000$

$e = 0{,}016 = \frac{c}{a} \rightarrow c = 0{,}016 \cdot 120\,714\,000 = 1\,931\,424$

La distancia máxima entre la Tierra y el Sol es cuando la Tierra se sitúa en el eje focal. Su distancia en ese punto es: $a + c = 122\,645\,424$ km

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b^2 = 14\,568\,139\,397\,332\,224$

Ecuación de la elipse: $\frac{x^2}{14\,571\,869\,796\,000\,000} + \frac{y^2}{14\,568\,139\,397\,332\,224} = 1$

126. **Halla los puntos de intersección de las siguientes cónicas.**

a) La elipse $2x^2 - 3y^2 = 6$ y la hipérbola $6x^2 + y^2 = 58$.

b) Las parábolas $y^2 = 9x$, $x^2 = \frac{1}{3}y$.

a) De la hipérbola se tiene: $y^2 = 58 - 6x^2$

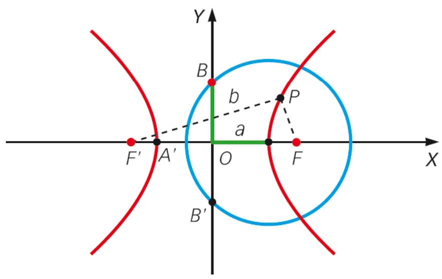
Sustituyendo en la ecuación de la elipse: $2x^2 - 3(58 - 6x^2) = 6 \rightarrow 20x^2 - 180 = 0 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$

Los puntos de corte son: (3, 2), (−3, 2), (3, −2), (−3, −2)

b) $\left.\begin{array}{l} y^2 = 9x \\ 3x^2 = y \end{array}\right\} \rightarrow 9x^4 - 9x = 0 \rightarrow x(x^3 - 1) = 0$

Los puntos de corte son: (0, 0) y (1, 3)

127. **Una hipérbola en la que se cumple que $a = b$ decimos que es equilátera. Supón que tiene su centro en (0, 0) y que el eje focal es horizontal. Calcula su ecuación y halla las coordenadas de los focos en función de a. Determina las ecuaciones de sus asíntotas.**



La ecuación de la hipérbola equilátera es de la forma: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \rightarrow x^2 - y^2 = a^2$

Como $a = b$ y $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c = \sqrt{2}a \rightarrow F\left(\sqrt{2}a, 0\right)$ $\quad F'\left(-\sqrt{2}a, 0\right)$

Al ser $a = b$, las ecuaciones de las asíntotas son: $y = \pm x$

128. **Comprueba que la hipérbola cuyos focos son $\left(4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\right)$ y $\left(-4\sqrt{2}, -4\sqrt{2}\right)$ y su constante es $8\sqrt{2}$ es equilátera. Comprueba que (8, 2) está situado en esa hipérbola. Obtén su ecuación.**

$$2c = \sqrt{\left(-4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\right)^2 + \left(-4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\right)^2} = 16$$

$$\left.\begin{array}{r} c = 8 \\ a = 4\sqrt{2} \end{array}\right\} \to b = 4\sqrt{2}$$

Al ser $a = b$, la hipérbola es equilátera.

$$\sqrt{\left(x - 4\sqrt{2}\right)^2 + \left(y - 4\sqrt{2}\right)^2} - \sqrt{\left(x + 4\sqrt{2}\right)^2 + \left(y + 4\sqrt{2}\right)^2} = 8\sqrt{2}$$

$$\to \sqrt{\left(x - 4\sqrt{2}\right)^2 + \left(y - 4\sqrt{2}\right)^2} = 8\sqrt{2} + \sqrt{\left(x + 4\sqrt{2}\right)^2 + \left(y + 4\sqrt{2}\right)^2}$$

$$\to x^2 - 8\sqrt{2}x + 32 + y^2 - 8\sqrt{2}y + 32 = 128 + x^2 + 8\sqrt{2}x + 32 + y^2 +$$
$$+ 8\sqrt{2}y + 32 + 16\sqrt{2}\sqrt{\left(x + 4\sqrt{2}\right)^2 + \left(y + 4\sqrt{2}\right)^2}$$

$$\to -16\sqrt{2}x - 16\sqrt{2}y - 128 = 16\sqrt{2}\sqrt{\left(x + 4\sqrt{2}\right)^2 + \left(y + 4\sqrt{2}\right)^2}$$

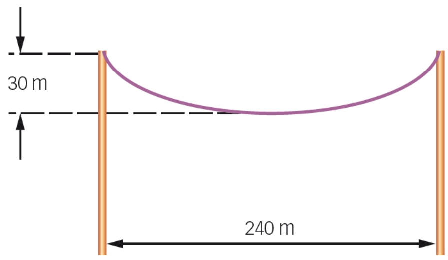
$$\to x + y + 4\sqrt{2} = -\sqrt{\left(x + 4\sqrt{2}\right)^2 + \left(y + 4\sqrt{2}\right)^2}$$

$$\to x^2 + y^2 + 2xy + 8\sqrt{2}x + 8\sqrt{2}y + 32 = x^2 + 8\sqrt{2}x + 32 + y^2 + 8\sqrt{2}y + 32$$

$\to 2xy = 32 \to xy = 16$ es la ecuación de la hipérbola.

$8 \cdot 2 = 16 \to$ (8, 2) es un punto de la hipérbola.

129. **Un cable suspendido por soportes a la misma altura, que distan 240 m entre sí, cuelga 30 m en el centro. Si el cable cuelga en forma de parábola, encuentra su ecuación colocando el origen en el punto más bajo del cable.**



Consideramos el centro $O(0, 0)$ en el vértice de la parábola. La ecuación de la parábola es de la forma: $x^2 = 2py$

Son puntos de la parábola: (120, 30) y (–120, 30) $\to 120^2 = 2p30 \to p = 240$

Ecuación de la parábola: $x^2 = 480y$

130. **Un puente como el de la imagen, construido como un arco parabólico, salva una distancia de 320 m. Si la altura del arco a 128 m del centro del puente, medida desde el apoyo de los pilares, es de 32 m, ¿cuál es la altura del arco que forma el puente en su centro?**

Consideramos el centro $O(0, 0)$ en el vértice de la parábola.

La ecuación de la parábola es de la forma: $x^2 = 2py$

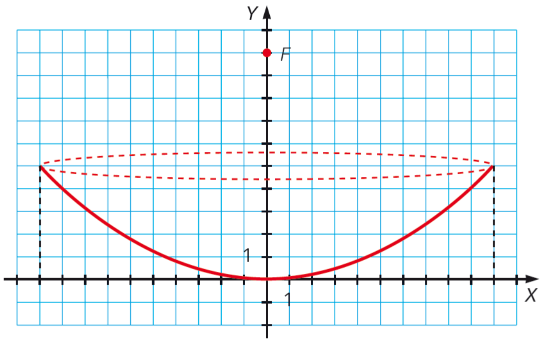
Los puntos $\left(\frac{320}{2}, -h\right) = (160, -h)$ y $(128, -(h - 32)) = (128, 32 - h)$

pertenecen a la parábola, por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} 160^2 = 2p(-h) \to p = \dfrac{25\,600}{-2h} = -\dfrac{12\,800}{h} \\ 128^2 = 2p(32 - h) \to p = \dfrac{16\,384}{2(32 - h)} = \dfrac{8\,192}{32 - h} \end{array}\right\} \to \frac{12\,800}{h} = -\frac{8\,192}{32 - h} \to$$

$\to 409\,600 = 4\,608h \to h \approx 89$ m

131. **Un diseñador de una antena electromagnética parabólica de 20 m de diámetro para rastrear espacios de prueba desea ubicar el foco 10 m por arriba del vértice.**

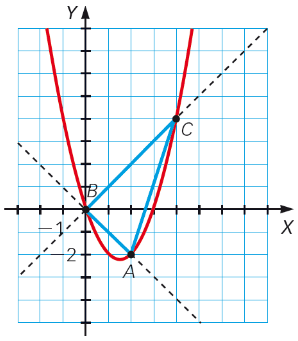


Escribe la ecuación de la parábola que forma la sección de la antena.

La ecuación de la parábola es de la forma: $x^2 = 2py$ $F(0, 10) \rightarrow p = 20$

Ecuación de la parábola: $x^2 = 40y$

132. **Las bisectrices de los cuatro cuadrantes cortan a la parábola $y = x^2 - 3x$ en tres puntos. Halla el área del triángulo que forman.**



Las bisectrices de los cuatro cuadrantes tienen como ecuaciones: $\begin{cases} y = x \\ y = -x \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} y = x \\ y = x^2 - 3x \end{array}\right\} \rightarrow x^2 - 4x = 0$

Los puntos de intersección son: (0, 0) y (4, 4)

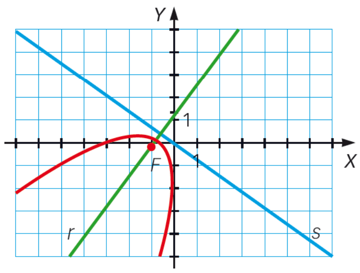
$\left.\begin{array}{l} y = -x \\ y = x^2 - 3x \end{array}\right\} \rightarrow x^2 - 2x = 0$

Los puntos de intersección son: (0, 0) y (2, −2)

Como el ángulo en el vértice O es recto, el área del triángulo es:

$$\frac{\overline{OA} \cdot \overline{OC}}{2} = \frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{32}}{2} = 8 \text{ u}^2$$

133. **Como la parábola es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de una recta llamada directriz y un punto denominado foco, emplea la definición para calcular la ecuación de una parábola que tenga como directriz a la recta *r*: $3x + 4y = 0$ y cuyo foco sea el punto $F(-1, 0)$.**



$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \frac{|3x + 4y|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \rightarrow \sqrt{x^2 + 2x + 1 + y^2} = \frac{|3x + 4y|}{5}$$

$$\rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 = \frac{9x^2 + 16y^2 + 24xy}{25}$$

$$\rightarrow 25x^2 + 50x + 25 + 25y^2 = 9x^2 + 16y^2 + 24xy$$

$$\rightarrow 16x^2 + 9y^2 - 24xy + 50x + 25 = 0$$

134. **Halla los focos, los vértices y las directrices de las siguientes parábolas.**

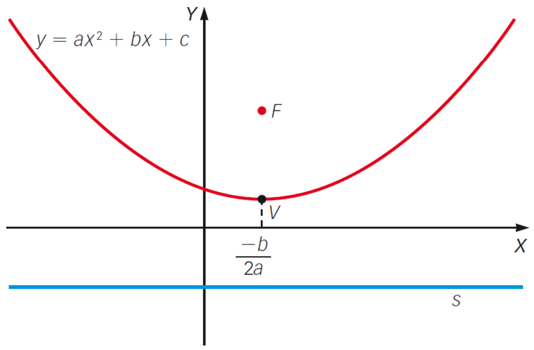
a) $y = x^2 + 2x + 1$

b) $4y = -x^2 + 8x - 6$

c) $y = 4x^2 - 8x + 12$

d) $y = 6x^2 + 9x - 10$

(Recuerda que, en una parábola del tipo $\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$***, la directriz es horizontal y el vértice es un punto de abscisa*** $-\dfrac{\mathbf{b}}{\mathbf{2a}}$***).***



a) $y = (x+1)^2$

Vértice: $(-1, 0)$ $\qquad 2p = 1 \rightarrow p = \dfrac{1}{2} \rightarrow F\left(-1, \dfrac{1}{4}\right)$ $\qquad$ Directriz: $y = -\dfrac{1}{4}$

b) $4y - 10 = -(x^2 - 8x + 16) \longrightarrow -4\left(y - \dfrac{5}{2}\right) = (x-4)^2$

Vértice: $\left(4, \dfrac{5}{2}\right)$ $\qquad 2p = -4 \rightarrow p = -2 \rightarrow F\left(4, \dfrac{3}{2}\right)$ $\qquad$ Directriz: $y = \dfrac{7}{2}$

c) $y - 8 = 4(x^2 - 2x + 1) \longrightarrow \dfrac{1}{4}(y-8) = (x-1)^2$

Vértice: $(1, 8)$ $\qquad 2p = \dfrac{1}{4} \rightarrow p = \dfrac{1}{8} \rightarrow F\left(1, \dfrac{129}{16}\right)$ $\qquad$ Directriz: $y = \dfrac{127}{16}$

d) $y + \dfrac{107}{8} = 6\left(x^2 + \dfrac{3}{2}x + \dfrac{9}{16}\right) \rightarrow \dfrac{1}{6}\left(y + \dfrac{107}{8}\right) = \left(x + \dfrac{3}{4}\right)^2$

Vértice: $\left(-\dfrac{3}{4}, -\dfrac{107}{8}\right)$ $\qquad 2p = \dfrac{1}{6} \rightarrow p = \dfrac{1}{12} \rightarrow F\left(-\dfrac{3}{4}, -\dfrac{40}{3}\right)$ $\qquad$ Directriz: $y = \dfrac{-161}{12}$

135. **Decide qué tipo de cónicas son las siguientes, halla sus elementos y haz una representación gráfica aproximada.**

a) $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$

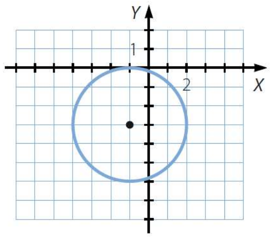
b) $x^2 - 4y^2 + 16y - 32 = 0$

c) $16x^2 + 9y^2 - 32x + 54y - 47 = 0$

d) $x^2 + 6x - 4y + 17 = 0$

e) $x^2 - y^2 + 3x + 5y + 3 = 0$

a) $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$
$(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 9$
La cónica es una circunferencia de centro $C(-1, -3)$ y radio 3.



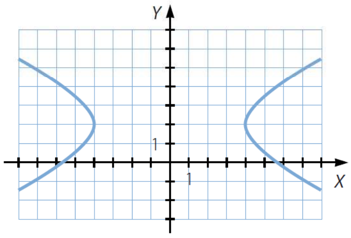
b) $x^2 - 4y^2 + 16y - 32 = 0 \rightarrow x^2 - 4(y - 2)^2 = 16 \rightarrow \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{(y-2)^2}{4} = 1$

La cónica es una hipérbola de centro $C(0, 2)$.

Como $a^2 = 16 \rightarrow a = 4 \rightarrow \begin{cases} A(4, 2) \\ A'(-4, 2) \end{cases}$

Si $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c = \sqrt{20}$

$\rightarrow \begin{cases} F\left(\sqrt{20}, 2\right) \\ F'\left(-\sqrt{20}, 2\right) \end{cases}$



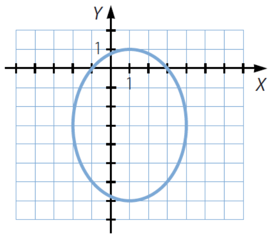
c) $16x^2 + 9y^2 - 32x + 54y - 47 = 0 \rightarrow 16(x - 1)^2 + 9(y + 3)^2 = 144$

$\rightarrow \dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y+3)^2}{16} = 1 \rightarrow$ La cónica es una elipse de centro $C(1, -3)$

Como $a^2 = 16 \rightarrow a = 4 \rightarrow \begin{cases} A(1, 1) \\ A'(1, -7) \end{cases}$

Si $b^2 = 9 \rightarrow b = 3 \rightarrow \begin{cases} B(-2, -3) \\ B'(4, -3) \end{cases}$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = \sqrt{7} \rightarrow \begin{cases} F\left(1, -3 + \sqrt{7}\right) \\ F'\left(1, -3 - \sqrt{7}\right) \end{cases}$



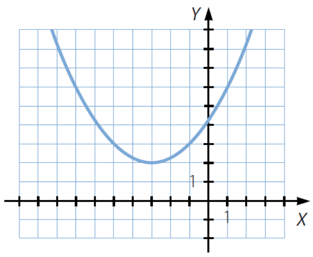
d) $x^2 + 6x - 4y + 17 = 0 \rightarrow (x + 3)^2 = 4(y - 2)$

$\rightarrow y - 2 = \dfrac{1}{4}(x + 3)^2$

La cónica es una parábola de vértice $V(-3, 2)$.

Como $2p = \dfrac{1}{4} \rightarrow p = \dfrac{1}{8} \rightarrow F\left(-3, \dfrac{17}{8}\right)$

La directriz es la recta $y = \dfrac{15}{8}$.



e) $x^2 - y^2 + 3x + 5y + 3 = 0 \rightarrow \left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 - \left(y - \dfrac{5}{2}\right)^2 = -7 \rightarrow \left(y - \dfrac{5}{2}\right)^2 - \left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 = 7$

La cónica es una hipérbola de centro $\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$ con eje focal paralelo al eje Y:

$a = b = \sqrt{7} \rightarrow A\left(\dfrac{-3}{2}, \dfrac{5}{2} + \sqrt{7}\right) = \left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{5 + 2\sqrt{7}}{2}\right)$, $A'\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2} - \sqrt{7}\right) = \left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{5 - 2\sqrt{7}}{2}\right)$

$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c = \sqrt{14} \rightarrow F\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{5 + 2\sqrt{14}}{2}\right)$, $F'\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{5 - 2\sqrt{14}}{2}\right)$

PARA PROFUNDIZAR

136. Elige la respuesta adecuada. (Concurso de Primavera)

Hay dos circunferencias tangentes a la parte positiva de los ejes de coordenadas y tangentes exteriores a la circunferencia de centro $O(3, 0)$ y radio 1. La suma de sus radios es:	9	$\frac{17}{2}$	8	$\frac{15}{2}$	7
Las circunferencias $x^2 - 4x + y^2 - 2y = 0$, $x^2 + 2x + + y^2 + 2y = 18$ se cortan en puntos de la recta:	$x + y = 3$	$2x - y = 6$	$3x - 4y = 2$	$x + y = \sqrt{3}$	$3x + 2y = 9$
¿Cuál es el camino más corto que, partiendo del punto $A(2, 5)$, pasa por el eje de abscisas y acaba en algún punto de la circunferencia $(x + 6)^2 + (y - 10)^2 = 16$?	12	13	$4\sqrt{10}$	$6\sqrt{5}$	$4 + \sqrt{89}$
¿Para cuántos valores enteros k resulta que las gráficas de $x^2 + y^2 = k^2$ y $xy = k$ no se cortan?	0	1	2	4	8

- Las circunferencias son tangentes a los ejes, con lo que sus distancias a ellos es su radio (r); como son también tangentes exteriores a la circunferencia, la distancia entre sus centros es $r + 1$ (la suma de sus radios).

  Se obtiene un triángulo rectángulo; aplicando Pitágoras:

  $(r+1)^2 = (3-r)^2 + r^2 \rightarrow r^2 - 8r + 8 = 0 \rightarrow r = 4 \pm \sqrt{2} \rightarrow$ Su suma es 8.

- Se resuelve el sistema que forma la intersección de las dos circunferencias:

  $$\left.\begin{array}{l} x^2 - 4x + y^2 - 2y = 0 \\ x^2 + 2x + y^2 + 2y - 18 = 0 \end{array}\right\}$$

  Si se resta la segunda ecuación a la primera se obtiene la recta:

  $3x + 2y = 9$

- Distancia mínima: $\sqrt{5^2 + 2^2} + \sqrt{10^2 + 6^2} - 4 = \sqrt{29} + \sqrt{136} - 4 \approx 13$

- Se resuelve sistema formado por las dos ecuaciones para hallar su intersección:

  De la segunda ecuación se obtiene $y = \frac{k}{x}$. Se sustituye en la primera:

  $$x^2 + \left(\frac{k}{x}\right)^2 = k^2 \rightarrow x^4 - k^2x^2 + k^2 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{k^2 \pm \sqrt{k^4 - 4k^2}}{2} \rightarrow \text{No tiene solución si } k^4 - 4k^2 < 0 \rightarrow k^2 < 4$$

  Los valores enteros que cumplen esta condición son el 1 y el –1. El 0 no cuenta, pues en ambas ecuaciones resulta el origen. Por tanto, la respuesta sería 2.

137. Dados los puntos $A(2,1)$ y $B(6, 4)$, determina el lugar geométrico de los puntos P tales que el área del triángulo ABP sea 10 unidades cuadradas.

$d(A, B) = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

Si el área del triángulo mide 10, entonces la altura debe medir 4.

Sea r es la recta determinada por A y por B: $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} \rightarrow 3x - 4y - 2 = 0$

$$d(P, r) = 4 \rightarrow \frac{|3x - 4y - 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 4 \rightarrow \begin{cases} 3x - 4y - 2 = 20 \\ -3x + 4y + 2 = 20 \end{cases}$$

El lugar geométrico está formado por dos rectas paralelas: $\begin{cases} 3x - 4y - 22 = 0 \\ 3x - 4y + 18 = 0 \end{cases}$

138. Describe el lugar geométrico de los puntos que verifican la siguiente ecuación.

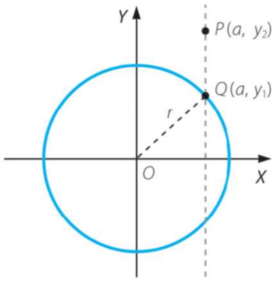
$$x^2 - y^2 - 4x + 6y - 5 = 0$$

$$x^2 - y^2 - 4x + 6y - 5 = 0 \rightarrow (x^2 - 4x + 4) - (y^2 - 6y + 9) - 5 = 4 - 9$$

$$\rightarrow (x-2)^2 - (y-3)^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x - 2 = y - 3 \\ x - 2 = -y + 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases}$$

El lugar geométrico está formado por dos rectas perpendiculares.

139. Considera un punto *Q* de una circunferencia con centro en el origen y radio *r*, y otro punto *P* con la misma abscisa que *Q*. Halla el lugar geométrico de los puntos *P*, sabiendo que la razón de las ordenadas de *P* y *Q* es *k*.



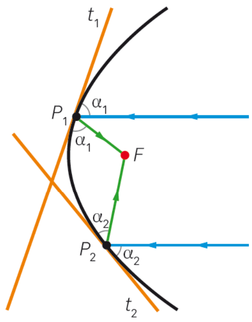
Tenemos que $Q(a, y_1)$ cumple $a^2 + y_1^2 = r^2 \rightarrow y_1 = \sqrt{r^2 - a^2}$.

Sabemos que $y_2 = ky_1$, con $k \neq 0$. Sustituyendo, obtenemos:

$$y_2 = k \cdot \sqrt{r^2 - a^2} \rightarrow a^2 + \frac{y_2^2}{k^2} = r^2 \rightarrow \left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{kr}\right)^2 = 1 \rightarrow \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{kr}\right)^2 = 1$$

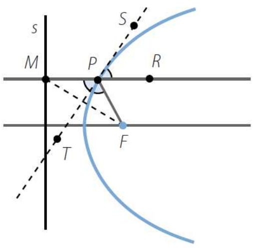
Por lo que el lugar geométrico pedido sería una elipse con un semieje de longitud el radio de la circunferencia el otro de longitud la constante *k* multiplicada por el radio.

140. Si una señal incide sobre una antena parabólica en dirección perpendicular a su directriz, esta se refleja como si chocara contra la recta tangente en ese punto.



Demuestra que el rayo reflejado pasa siempre por el foco de la parábola.

Esta propiedad es la que confiere su utilidad a las antenas parabólicas, puesto que concentran la señal en un solo punto, el foco.



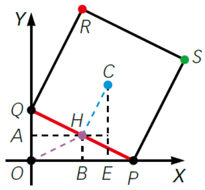
Se considera un punto *F*, una recta *s* y un punto *M* que pertenezca a ella.

Si se traza la perpendicular a *d* que pasa por *M*, esta recta corta a la mediatriz del segmento *MF* en un punto *P*, que pertenece a la parábola de foco *F* y directriz *s* por ser $\overline{MP} = \overline{PF}$. Como la recta es perpendicular, la medida del segmento *MP* coincide con la distancia del punto *P* a la recta *s*.

Esta mediatriz es la tangente a la parábola de foco *F* y directriz *s*. Además, los ángulos $\widehat{RPS}$ y $\widehat{FPT}$ son iguales, por ser los ángulos que forman el rayo que incide y el rayo que se refleja. Y por ser opuestos por el vértice, los ángulos $\widehat{MPT}$ y $\widehat{TPF}$ también son iguales.

Por tanto, un rayo que incide perpendicularmente a la directriz se refleja pasando por el foco *F*.

141. Deslizamos un cuadrado de 10 cm de lado por el plano *XY* de forma que los vértices de uno de sus lados estén siempre en contacto con los ejes de coordenadas, uno con el eje *X* y otro con el eje *Y*. Determina el lugar geométrico que en ese movimiento describen:



a) El punto medio de lado de contacto con los ejes.
b) El centro del cuadrado.
c) Los vértices del lado de contacto y del opuesto en el primer cuadrante.

(Olimpiadas matemáticas. Fase de Distrito)

a) Sea $L(x, y)$ un punto de ese lugar geométrico:

Como es el punto medio del segmento $PQ \rightarrow P(2x, 0)$ y $Q(0, 2y)$

Se aplica Pitágoras al triángulo OPQ:

$$d(O, Q) = \sqrt{10^2 - 4x^2} \rightarrow y = \frac{\sqrt{10^2 - 4x^2}}{2} \rightarrow 4y^2 = 100 - 4x^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 25$$

El lugar geométrico es una circunferencia de centro (0, 0) y radio 5.

b) Sea $L(x, y)$ un punto de ese lugar geométrico:

Como es el centro del rectángulo la distancia $d(C, P) = d(C, Q) = \frac{\text{Diagonal}}{2}$

Aplicando Pitágoras al cuadrado se obtiene: Diagonal $= 10\sqrt{2} \rightarrow \frac{\text{Diagonal}}{2} = 5\sqrt{2}$

Aplicando Pitágoras al triángulo CEP: $d(E, P) = \sqrt{\left(5\sqrt{2}\right)^2 - y^2}$

Se aplica lo mismo para el triángulo con base en el eje Y, con lo que:

$$\sqrt{\left(5\sqrt{2}\right)^2 - y^2} = \sqrt{\left(5\sqrt{2}\right)^2 - x^2} \rightarrow \left(5\sqrt{2}\right)^2 - y^2 = \left(5\sqrt{2}\right)^2 - x^2 \rightarrow x^2 = y^2$$

Las coordenadas del centro del cuadrado son iguales moviéndose este en un segmento de las bisectrices de los cuadrantes:

$C(c_1, c_2) = (\pm 5\alpha, \pm 5\alpha)$ siendo $\alpha \in \left[1, \sqrt{2}\right]$.

c)
- Vértice Q: su lugar geométrico es la recta: $x = 0$ en el intervalo $[-10, 10]$.
- Vértice P: su lugar geométrico es la recta: $y = 0$ en el intervalo $[-10, 10]$.
- Vértice R:

  Sea $L(x, y)$ un punto del lugar geométrico. Se aplica Pitágoras a los triángulos rayados del dibujo para obtener los lados del triángulo sombreado.

  Se aplica en él Pitágoras de nuevo: $100 = \left(y - \sqrt{100 - x^2}\right)^2 + \left(x - \sqrt{200 - y^2}\right)^2$

  El lugar geométrico es la ecuación: $2x\sqrt{200 - y^2} + 2y\sqrt{100 - x^2} - 300 = 0$

- Vértice S:

  Sea $L(x, y)$ un punto del lugar geométrico. Se aplica Pitágoras a los triángulos rayados del dibujo para obtener los lados del triángulo sombreado.

  Se aplica en él Pitágoras de nuevo: $100 = \left(y - \sqrt{200 - x^2}\right)^2 + \left(x - \sqrt{100 - y^2}\right)^2$

  El lugar geométrico es la ecuación: $2y\sqrt{200 - x^2} - 2x\sqrt{100 - y^2} + 300 = 0$

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. ¿Qué es una antena parabólica y cuáles son sus usos?

Una antena parabólica es una superficie metálica con forma de paraboloide de revolución que sirve de reflector de las señales y un elemento radiante situado en el foco que recibe las señales reflectadas.

Usos: televisión vía satélite.

2. Explica cómo se forma un paraboloide de revolución. ¿Es una figura plana?

Se forma al girar una parábola alrededor de un eje.

No es una figura plana, es tridimensional.

3. Explica la propiedad que permite a las antenas parabólicas recibir y emitir de manera óptima señales vía satélite.

Al ser parabólicas reflejan las señales transmitidas que inciden paralelas al eje y se concentran en el foco, donde son convertidas por un receptor al formato adecuado.

4. Enumera algunas ventajas e inconvenientes de usar antenas parabólicas en Internet.

- Ventajas: inalámbrico; accesible para personas que no pueden optar a otra tecnología.
- Inconvenientes: la recepción puede alterarse según las condiciones meteorológicas; la velocidad puede ser más lenta si se envía o recibe señal a largas distancias; pueden ser algo más caras que otras tecnologías.

5. Si una antena parabólica mide 1 m de diámetro en su abertura y el receptor, ubicado en el foco, está a 25 cm del vértice, ¿qué profundidad tiene?

La ecuación de la parábola es de la forma: $x^2 = 2py$

$F(0, 25) \rightarrow p = 50 \rightarrow x^2 = 100y$

Como el diámetro es 1 m = 100 cm, uno de los extremos es $x = 50$ cm:

$50^2 = 100y \rightarrow y = 25$ cm

La profundidad de la parábola es de 25 centímetros.

6. Dibuja la gráfica de la parábola que genera la antena de la actividad anterior al girar sobre su eje.