1 NÚMEROS REALES

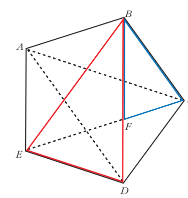
Página 26

PARA EMPEZAR, REFLEXIONA Y RESUELVE

El número áureo

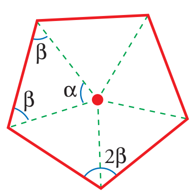
Para hallar la relación entre la diagonal y el lado del pentágono regular, da los siguientes pasos:

a) Demuestra que los triángulos *BED* y *BCF* son semejantes.



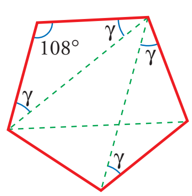
Recordamos los ángulos de un pentágono:

1º



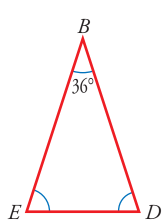
$$\alpha = \frac{360°}{5} = 72°; \quad \beta = \frac{180° - 72°}{2} = 54°; \quad 2\beta = 108°$$

2º



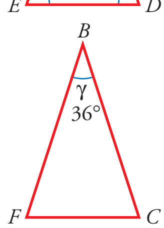
$$\gamma = \frac{180° - 108°}{2} = 36°$$

3º



$$\hat{B} = 108° - 2 \cdot 36° = 36°$$

$$\hat{E} = \hat{D} = \frac{180° - 36°}{2} = 72°$$



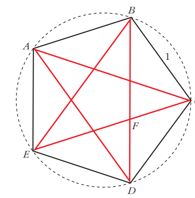
Sabíamos que $\gamma = 36°$.

El triángulo *BEC* es idéntico al *BED*:

$$\hat{C} = \hat{E} = \hat{D} = 72° \Rightarrow \hat{F} = 72°$$

Luego los dos triángulos tienen sus ángulos iguales $\Rightarrow$ son semejantes.

b) **Llamando $l = \overline{BE} = \overline{BD} = \overline{EC}$ y tomando como unidad el lado del pentágono, $\overline{BC} = \overline{BF} = \overline{ED} = \overline{EF} = 1$, a partir de la semejanza anterior has de llegar a la siguiente ecuación:**



$$\frac{l}{1} = \frac{1}{l-1}$$

Despejando l obtendrás su valor.

Por ser semejantes (apartado a)) $\Rightarrow \dfrac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{ED}}{\overline{FC}}$, es decir: $\dfrac{l}{1} = \dfrac{1}{l-1}$.

Despejamos l:

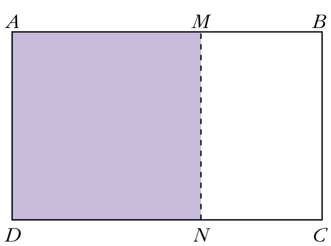
$$l(l-1) = 1 \Rightarrow l^2 - l - 1 = 0 \Rightarrow l = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como l es una longitud, la solución válida es la positiva:

$$l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$ Este es el número áureo, Φ

Página 27

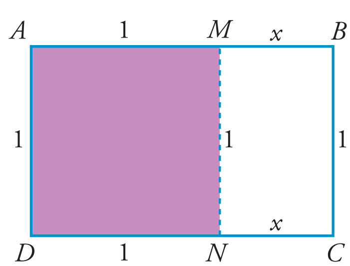
El rectángulo áureo



El rectángulo adjunto tiene la peculiaridad de que si le suprimimos un cuadrado, el rectángulo que queda, *MBCN*, es semejante al rectángulo inicial *ABCD*. Comprueba que, efectivamente, en tal caso, el rectángulo es áureo, es decir:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \Phi \quad \textbf{(número de oro)}$$

Tomamos como unidad el lado pequeño del rectángulo: $\overline{AD} = \overline{BC} = 1$, y llamamos $x = \overline{MB} = \overline{NC}$. Así:



Al ser semejantes los rectángulos, tenemos que: $\dfrac{1+x}{1} = \dfrac{1}{x}$

Despejamos x:

$$x(1+x) = 1 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como x es una longitud, la solución válida es la positiva:

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

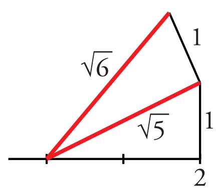
Hallamos la razón entre los lados del rectángulo:

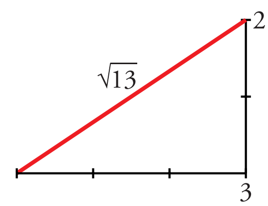
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{1 + x}{1} = 1 + x = 1 + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{2 - 1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$$

Obtenemos el número de oro.

Página 29

1. Halla gráficamente $\sqrt{6}$ y $\sqrt{13}$.





2. Inventa dos números irracionales dados en forma decimal.

Por ejemplo: 2,01001000100001 …

3,122333444455555 …

3. Razonando sobre la figura del margen, CONSTRUCCIÓN DEL NÚMERO ÁUREO, justifica que si $\overline{AB} = \overline{AC} = 1$, entonces $\overline{BD} = \Phi$.

- Si $\overline{AC} = 1$, entonces $\overline{OA} = \overline{OC} = \overline{OD} = \frac{1}{2}$.
- Si $\overline{OA} = \frac{1}{2}$ y $\overline{AB} = 1$, aplicando el teorema de Pitágoras, tenemos que:

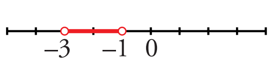
$$\overline{OB} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

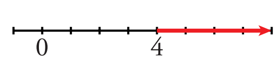
- Por tanto: $\overline{BD} = \overline{OD} + \overline{OB} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$

Página 31

1. Representa los siguientes conjuntos:

a) $(-3, -1)$ **b) $[4, +\infty)$** **c) $(3, 9]$** **d) $(-\infty, 0)$**

a) 

b) 

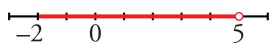
c) 

d) 

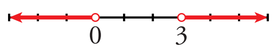
2. Representa los siguientes conjuntos:

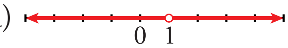
a) $\{x/-2 \le x < 5\}$ **b)** $[-2, 5) \cup (5, 7]$

c) $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$ **d)** $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

a) 

b) 

c) 

d) 

Página 32

1. Halla los siguientes valores absolutos:

a) $|-11|$ **b)** $|\pi|$ **c)** $|-\sqrt{5}|$

d) $|0|$ **e)** $|3-\pi|$ **f)** $|3-\sqrt{2}|$

g) $|1-\sqrt{2}|$ **h)** $|\sqrt{2}-\sqrt{3}|$ **i)** $|7-\sqrt{50}|$

a) 11 b) π c) $\sqrt{5}$

d) 0 e) $\pi - 3$ f) $|3-\sqrt{2}| = 3-\sqrt{2}$

g) $|1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1$ h) $|\sqrt{2}-\sqrt{3}| = \sqrt{3}-\sqrt{2}$ i) $|7-\sqrt{50}| = \sqrt{50}-7$

2. Averigua para qué valores de x se cumplen las siguientes relaciones:

a) $|x| = 5$ **b)** $|x| \le 5$ **c)** $|x-4| = 2$

d) $|x-4| \le 2$ **e)** $|x-4| > 2$ **f)** $|x+4| > 5$

a) 5 y –5 b) $-5 \le x \le 5$; $[-5, 5]$

c) 6 y 2 d) $2 \le x \le 6$; $[2, 6]$

e) $x < 2$ o $x > 6$; $(-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$ f) $x < -9$ o $x > 1$; $(-\infty, -9) \cup (1, +\infty)$

Página 33

1. Simplifica:

a) $\sqrt[12]{x^9}$ **b)** $\sqrt[12]{x^8}$ **c)** $\sqrt[5]{y^{10}}$

d) $\sqrt[6]{8}$ **e)** $\sqrt[9]{64}$ **f)** $\sqrt[8]{81}$

a) $\sqrt[12]{x^9} = \sqrt[4]{x^3}$ b) $\sqrt[12]{x^8} = \sqrt[3]{x^2}$ c) $\sqrt[5]{y^{10}} = y^2$

d) $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$ e) $\sqrt[9]{64} = \sqrt[9]{2^6} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$ f) $\sqrt[8]{81} = \sqrt[8]{3^4} = \sqrt{3}$

2. ¿Cuál es mayor, $\sqrt[4]{31}$ o $\sqrt[3]{13}$?

Reducimos a índice común:

$$\sqrt[4]{31} = \sqrt[12]{29\,791}\ ; \quad \sqrt[3]{13} = \sqrt[12]{28\,561}$$

Por tanto, es mayor $\sqrt[4]{31}$.

3. **Reduce a índice común:**

a) $\sqrt[12]{a^5}$ **y** $\sqrt[18]{a^7}$ **b)** $\sqrt[3]{51}$ **y** $\sqrt[9]{132\,650}$

a) $\sqrt[12]{a^5} = \sqrt[36]{a^{15}}$; $\sqrt[18]{a^7} = \sqrt[36]{a^{14}}$ b) $\sqrt[3]{51} = \sqrt[9]{132651}$; $\sqrt[9]{132650}$

4. **Simplifica:**

a) $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{k}}}\right)^8$ **b)** $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}}$ **c)** $\sqrt[3]{(\sqrt{x})^6}$

a) $\left(\sqrt[8]{k}\right)^8 = k$ b) $\sqrt[15]{x^{10}} = \sqrt[3]{x^2}$ c) $\sqrt[6]{x^6} = x$

Página 34

5. **Reduce:**

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2}$ **b)** $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[6]{3}$ **c)** $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2}$

a) $\sqrt[15]{2^5} \cdot \sqrt[15]{2^3} = \sqrt[15]{2^8}$ b) $\sqrt[6]{3^4} \cdot \sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{3^5}$ c) $\sqrt[8]{2^4} \cdot \sqrt[8]{2^2} \cdot \sqrt[8]{2} = \sqrt[8]{2^7}$

6. **Simplifica:**

a) $\dfrac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{a \cdot b}}{\sqrt[3]{a \cdot b}}$ **c)** $\dfrac{\sqrt[6]{a^3}}{\sqrt[3]{a^2}}$ **d)** $\dfrac{\sqrt[4]{a^3 \cdot b^5 \cdot c}}{\sqrt{a \cdot b^3 \cdot c^3}}$

a) $\sqrt[15]{\dfrac{x^3}{x^5}} = \sqrt[15]{\dfrac{1}{x^2}} = \sqrt[15]{x^{-2}}$ b) $\sqrt[6]{\dfrac{a^3\, b^3}{a^2\, b^2}} = \sqrt[6]{a\, b}$

c) $\sqrt[6]{\dfrac{a^3}{a^4}} = \sqrt[6]{\dfrac{1}{a}} = \sqrt[6]{a^{-1}}$ d) $\sqrt[4]{\dfrac{a^3\, b^5\, c}{a^2\, b^6\, c^6}} = \sqrt[4]{\dfrac{a}{b\, c^5}} = \dfrac{1}{c}\sqrt[4]{\dfrac{a}{b\, c}}$

7. **Reduce:**

a) $\dfrac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt{3}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt[3]{3}}$ **c)** $\dfrac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}}$ **d)** $\dfrac{\sqrt[4]{729}}{\sqrt{3}}$

a) $\sqrt[6]{\dfrac{3^4}{3^3}} = \sqrt[6]{3}$ b) $\sqrt[6]{\dfrac{3^6}{3^2}} = \sqrt[6]{3^4} = \sqrt[3]{3^2}$

c) $\sqrt[10]{\dfrac{2^8}{2^5}} = \sqrt[10]{2^3} = \sqrt[10]{8}$ d) $\sqrt[4]{\dfrac{3^6}{3^2}} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

8. **Suma y simplifica:**

a) $5\sqrt{x} + 3\sqrt{x} + 2\sqrt{x}$ **b)** $\sqrt{9 \cdot 2} + \sqrt{25 \cdot 2} - \sqrt{2}$

c) $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{2} - \sqrt{8}$ **d)** $\sqrt{27} - \sqrt{50} + \sqrt{12} + \sqrt{8}$ **e)** $\sqrt{50a} - \sqrt{18a}$

a) $10\sqrt{x}$

b) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

c) $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{2} - \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 3^2} + \sqrt{2 \cdot 5^2} - \sqrt{2} - \sqrt{2^3} =$

$= 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

d) $\sqrt{3^3} - \sqrt{2 \cdot 5^2} + \sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{2^3} = 3\sqrt{3} - 5\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$

e) $\sqrt{2 \cdot 5^2 \cdot a} - \sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot a} = 5\sqrt{2a} - 3\sqrt{2a} = 2\sqrt{2a}$

Página 35

9. Racionaliza denominadores y simplifica cuando puedas:

a) $\frac{5}{\sqrt{7}}$ **b)** $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ **c)** $\sqrt{\frac{7}{3}}$ **d)** $\frac{1}{\sqrt{a^3}}$ **e)** $\frac{3}{\sqrt{50}}$

f) $\frac{4}{\sqrt{18}}$ **g)** $\frac{2}{\sqrt[3]{25}}$ **h)** $\frac{1}{\sqrt[3]{40}}$ **i)** $\frac{3}{\sqrt[3]{36}}$ **j)** $\frac{2}{\sqrt[3]{100}}$

a) $\frac{5}{\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{7}$ b) $\frac{3}{\sqrt[3]{4}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$ c) $\sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3}$

d) $\frac{1}{\sqrt{a^3}} = \frac{1}{a\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a^2}$ e) $\frac{3}{\sqrt{50}} = \frac{3}{\sqrt{2 \cdot 5^2}} = \frac{3}{5\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{10}$

f) $\frac{4}{\sqrt{18}} = \frac{4}{\sqrt{2 \cdot 3^2}} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ g) $\frac{2}{\sqrt[3]{25}} = \frac{2}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{2\sqrt[3]{5}}{5}$

h) $\frac{1}{\sqrt[3]{40}} = \frac{2}{\sqrt[3]{2^3 \cdot 5}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}}{10} = \frac{\sqrt[3]{25}}{10}$

i) $\frac{3}{\sqrt[3]{36}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2^2 \cdot 3^2}} = \frac{3\sqrt[3]{2 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{3\sqrt[3]{6}}{6} = \frac{\sqrt[3]{6}}{2}$

j) $\frac{2}{\sqrt[3]{100}} = \frac{2}{\sqrt[3]{2^2 \cdot 5^2}} = \frac{2\sqrt[3]{2 \cdot 5}}{2 \cdot 5} = \frac{2\sqrt[3]{10}}{10} = \frac{\sqrt[3]{10}}{5}$

10. Racionaliza denominadores y simplifica cuando puedas:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ **b)** $\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ **c)** $\frac{a-1}{\sqrt{a}-1}$ **d)** $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ **e)** $\frac{1}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

f) $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$ **g)** $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$ **h)** $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

a) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2}-1$

b) $\dfrac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} = \dfrac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y} = \dfrac{x\sqrt{x}-x\sqrt{y}+y\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x-y}$

c) $\dfrac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} = \dfrac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{(a-1)} = \sqrt{a}+1$

d) $\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} = \dfrac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}$

e) $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{(2\sqrt{3}-\sqrt{5})(2\sqrt{3}+\sqrt{5})} = \dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{12-5} = \dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{7}$

f) $\dfrac{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})^2}{18-12} = \dfrac{18+12+12\sqrt{6}}{6} = \dfrac{30+12\sqrt{6}}{6} = 5+2\sqrt{6}$

g) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}+1}{1} + \dfrac{\sqrt{2}-1}{1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

h) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y} = \dfrac{2\sqrt{x}}{x-y}$

Página 37

1. Calcula en notación científica sin usar la calculadora:

a) $\mathbf{(800\,000 : 0{,}0002) \cdot 0{,}5 \cdot 10^{12}}$ **b)** $\mathbf{0{,}486 \cdot 10^{-5} + 93 \cdot 10^{-9} - 6 \cdot 10^{-7}}$

a) $(800\,000 : 0{,}0002) \cdot 0{,}5 \cdot 10^{12} = [(8 \cdot 10^5) : (2 \cdot 10^{-4})] \cdot (5 \cdot 10^{11}) =$
$= (4 \cdot 10^9) \cdot (5 \cdot 10^{11}) = 20 \cdot 10^{20} = 2 \cdot 10^{21}$

b) $0{,}486 \cdot 10^{-5} + 93 \cdot 10^{-9} - 6 \cdot 10^{-7} = 4860 \cdot 10^{-9} + 93 \cdot 10^{-9} - 600 \cdot 10^{-9} =$
$= (4860 + 93 - 600) \cdot 10^{-9} = 4353 \cdot 10^{-9} = 4{,}353 \cdot 10^{-6}$

2. Opera con la calculadora:

a) $\mathbf{(3{,}87 \cdot 10^{15} \cdot 5{,}96 \cdot 10^{-9}) : (3{,}941 \cdot 10^{-6})}$ **b)** $\mathbf{8{,}93 \cdot 10^{-10} + 7{,}64 \cdot 10^{-10} - 1{,}42 \cdot 10^{-9}}$

a) 3,87 EXP 15 × 5,96 EXP 9 +/– ÷ 3,941 EXP 6 +/– = 5.852626237 12

Es decir: $5{,}85 \cdot 10^{12}$

b) 8,93 EXP 10 +/– + 7,64 EXP 10 +/– – 1,42 EXP 9 +/– = 2.37 -10

Es decir: $2{,}37 \cdot 10^{-10}$

Página 40

1. Halla:

a) $\log_2 16$ **b)** $\log_2 0{,}25$ **c)** $\log_9 1$ **d)** $\log_{10} 0{,}1$ **e)** $\log_4 64$

f) $\log_7 49$ **g)** $\ln e^4$ **h)** $\ln e^{-1/4}$ **i)** $\log_5 0{,}04$ **j)** $\log_6 \left(\frac{1}{216}\right)$

a) $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$ b) $\log_2 0{,}25 = \log_2 2^{-2} = -2$ c) $\log_9 1 = 0$

d) $\log_{10} 0{,}1 = \log_{10} 10^{-1} = -1$ e) $\log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$ f) $\log_7 49 = \log_7 7^2 = 2$

g) $\ln e^4 = 4$ h) $\ln e^{-1/4} = -\frac{1}{4}$

i) $\log_5 0{,}04 = \log_5 5^{-2} = -2$ j) $\log_6 \left(\frac{1}{216}\right) = \log_6 6^{-3} = -3$

2. Halla la parte entera de:

a) $\log_2 60$ **b)** $\log_5 700$ **c)** $\log_{10} 43\,000$

d) $\log_{10} 0{,}084$ **e)** $\log_9 60$ **f)** $\ln e$

a) $2^5 = 32$; $2^6 = 64$; $32 < 60 < 64$

$5 < \log_2 60 < 6 \;\rightarrow\; \log_2 60 = 5, \ldots$

b) $5^4 = 625$; $5^5 = 3125$; $625 < 700 < 3125$

$4 < \log_5 700 < 5 \;\rightarrow\; \log_5 700 = 4, \ldots$

c) $10^4 = 10\,000$; $10^5 = 100\,000$; $10\,000 < 43\,000 < 100\,000$

$4 < \log_{10} 43\,000 < 5 \;\rightarrow\; \log_{10} 43\,000 = 4, \ldots$

d) $10^{-2} = 0{,}01$; $10^{-1} = 0{,}1$; $0{,}01 < 0{,}084 < 0{,}1$

$-2 < \log_{10} 0{,}084 < -1 \;\rightarrow\; \log_{10} 0{,}084 = -1, \ldots$

e) $9^1 = 9$; $9^2 = 81$; $9 < 60 < 81$

$1 < \log_9 60 < 2 \;\rightarrow\; \log_9 60 = 1, \ldots$

f) $\ln e = 1$

3. Aplica la propiedad 8 para obtener los siguientes logaritmos con la ayuda de la calculadora:

a) $\log_2 1\,500$ **b)** $\log_5 200$ **c)** $\log_{100} 200$ **d)** $\log_{100} 40$

En cada caso, comprueba el resultado utilizando la potenciación.

a) $\frac{\log 1500}{\log 2} = 10{,}55$; $2^{10{,}55} \approx 1500$ b) $\frac{\log 200}{\log 5} = 3{,}29$; $5^{3{,}29} \approx 200$

c) $\dfrac{log\ 200}{log\ 100} = 1{,}15; \quad 100^{1{,}15} \approx 200$

d) $\dfrac{log\ 40}{log\ 100} = 0{,}80; \quad 100^{0{,}80} \approx 40$

4. Sabiendo que $log_5 A = 1{,}8$ y $log_5 B = 2{,}4$, calcula:

a) $log_5 \sqrt[3]{\dfrac{A^2}{25B}}$

b) $log_5 \dfrac{5\sqrt{A^3}}{B^2}$

a) $log_5 \sqrt[3]{\dfrac{A^2}{25B}} = \dfrac{1}{3}\,[2\ log_5 A - log_5 25 - log_5 B] = \dfrac{1}{3}\,[2 \cdot 1{,}8 - 2 - 2{,}4] = \dfrac{-0{,}8}{3} \simeq -0{,}27$

b) $log_5 \dfrac{5\sqrt{A^3}}{B^2} = log_5 5 + \dfrac{3}{2}\ log_5 A - 2\ log_5 B = 1 + \dfrac{3}{2} \cdot 1{,}8 - 2 \cdot 2{,}4 = 1 + 2{,}7 - 4{,}8 = -1{,}1$

5. Averigua la relación que hay entre x e y, sabiendo que se verifica:

$$ln\ y = 2x - ln\ 5$$

$ln\ y = 2x - ln\ 5 \quad \to \quad ln\ y = ln\ e^{2x} - ln\ 5$

$ln\ y = ln\ \dfrac{e^{2x}}{5} \quad \to \quad y = \dfrac{e^{2x}}{5}$

Página 44

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Números racionales e irracionales

1 **Expresa como fracción cada decimal y opera:**

$$0{,}\widehat{12} - 5{,}\widehat{6} - 0{,}2\widehat{3} + 3{,}1$$

☛ ***Recuerda que*** $5{,}\widehat{6} = \dfrac{56-5}{9}$; $0{,}2\widehat{3} = \dfrac{23-2}{90}$.

$$\frac{12}{99} - \frac{51}{99} - \frac{21}{90} + \frac{31}{10} = -\frac{442}{165} = -2{,}6\widehat{78}$$

2 **Demuestra que el producto $4{,}0\widehat{9} \cdot 1{,}3\widehat{9}$ es un decimal exacto.**

☛ ***Comprueba, pasando a fracción, que los dos factores son decimales exactos.***

$4{,}0\widehat{9} = \dfrac{409-40}{90} = \dfrac{369}{90} = 4{,}1 \qquad 1{,}3\widehat{9} = \dfrac{139-13}{90} = \dfrac{126}{90} = 1{,}4$

$4{,}0\widehat{9} \cdot 1{,}3\widehat{9} = 4{,}1 \cdot 1{,}4 = 5{,}74$

3 **Calcula: a) $\sqrt{1,\widehat{7}}$ b) $\sqrt{\dfrac{1,\widehat{3}}{3}}$**

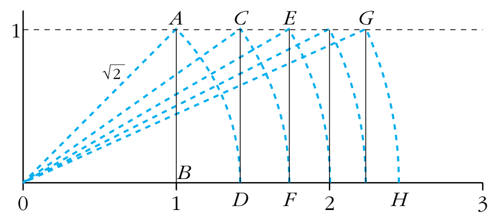
a) $\sqrt{\dfrac{16}{9}} = \dfrac{4}{3} = 1,\widehat{3}$ b) $\dfrac{4}{9} = \dfrac{2}{3} = 0,\widehat{4}$

4 **Indica cuál, de cada par de números, es mayor:**

a) $\dfrac{140}{99}$ y $\sqrt{2}$ b) $0,52\widehat{6}$ y $0,\widehat{526}$ c) $4,\widehat{89}$ y $2\sqrt{6}$ d) $-2,098$ y $-2,1$

a) $\sqrt{2}$ b) $0,52\widehat{6}$ c) $4,\widehat{89}$ d) $-2,098$

5 **Observa cómo hemos representado algunos números irracionales:**



En el triángulo *OAB*, $\overline{OB} = 1$, $\overline{AB} = 1$ y $\overline{OA} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Por tanto, el punto *D* representa a $\sqrt{2}$.

¿Qué números representan los puntos *F* y *H*? Justifica tu respuesta.

F representa $\sqrt{3}$, pues $\overline{OF} = \overline{OC} = \sqrt{\overline{OD}^2 + \overline{DC}^2} = (\sqrt{2})^2 + 1^2 = \sqrt{3}$

H representa $\sqrt{6}$, pues $\overline{OH} = \overline{OG} = (\sqrt{5})^2 + 1^2 = \sqrt{6}$

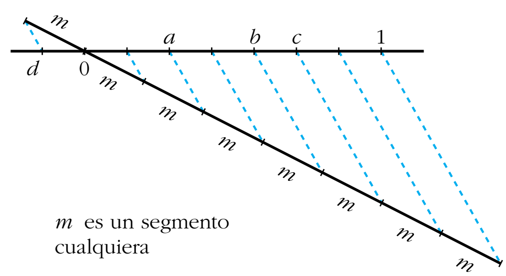
6 **¿Cuáles son los números racionales *a, b, c, d* representados en este gráfico?**

$a = \dfrac{2}{7}$

$b = \dfrac{4}{7}$

$c = \dfrac{5}{7}$

$d = -\dfrac{1}{7}$



Potencias

7 **Halla sin calculadora: $\left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{4}\right)^{-2} \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{7}{9}\right)^{-1} + 4$**

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(-\frac{4}{9}\right)^{-1} + 4 = \left(\frac{4}{3}\right)^{2} \cdot \left(-\frac{9}{4}\right) + 4 = -4 + 4 = 0$$

8 **Simplifica, utilizando las propiedades de las potencias:**

a) $\dfrac{3^6 \cdot 2^5 \cdot 5^2}{9^3 \cdot 4^3 \cdot 5}$ **b)** $\dfrac{3^4 \cdot 16 \cdot 9^{-1}}{5^{-1} \cdot 3^5}$ **c)** $\dfrac{15^2 \cdot 8^{-1}}{6^3 \cdot 10^2}$ **d)** $\dfrac{a^{-3}\, b^{-4}\, c^7}{a^{-5}\, b^2\, c^{-1}}$

Mira, en EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS, *el nº 2 c).*

a) $\dfrac{3^6 \cdot 2^5 \cdot 5^2}{3^6 \cdot 2^6 \cdot 5} = \dfrac{5}{2}$ b) $\dfrac{3^4 \cdot 2^4 \cdot 3^{-2}}{5^{-1} \cdot 3^5} = \dfrac{2^4 \cdot 5}{3^3} = \dfrac{80}{27}$

c) $\dfrac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^{-3}}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 2^2 \cdot 5^2} = \dfrac{1}{2^8} = 2^{-8} = \dfrac{1}{256}$ d) $\dfrac{c^7\, a^5\, c}{a^3\, b^4\, b^2} = \dfrac{a^2\, c^8}{b^6}$

9 **Expresa los siguientes radicales mediante potencias de exponente fraccionario y simplifica:**

a) $\sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt{a}$ **b)** $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}$ **c)** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$

a) $a^{2/5} \cdot a^{1/2} = a^{9/10} = \sqrt[10]{a^9}$ b) $\dfrac{x^{2/3}}{x^{1/2}} = x^{1/6} = \sqrt[6]{x}$ c) $a^{-3/4} = \sqrt[4]{a^{-3}}$

10 **Resuelve, sin utilizar la calculadora:**

a) $\sqrt[5]{32}$ **b)** $\sqrt[3]{343}$ **c)** $\sqrt[4]{625}$ **d)** $\sqrt{0{,}25}$ **e)** $\sqrt[3]{8^4}$ **f)** $\sqrt[3]{0{,}001}$

a) $\sqrt[5]{2^5} = 2$ b) $\sqrt[3]{7^3} = 7$ c) $\sqrt[4]{5^4} = 5$

d) $\sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$ e) $\sqrt[3]{2^{12}} = 2^4 = 16$ f) $\sqrt[3]{0{,}1^3} = 0{,}1$

11 **Expresa como una potencia de base 2:**

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **b)** $(-32)^{1/5}$ **c)** $(\sqrt[8]{2})^4$

a) $2^{-1/2}$ b) $(-2^5)^{1/5} = -2$ c) $2^{4/8} = 2^{1/2}$

12 **Calcula utilizando potencias de base 2, 3 y 5:**

a) $4 \cdot \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{3}{2}\right)^3$ **b)** $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{2}{9}\right)^{-1} \cdot \dfrac{1}{8}$

c) $\dfrac{(-5)^3\,(-8)^3\,(-9)^2}{15^2 \cdot 20^4}$ **d)** $\dfrac{(-30)^{-1} \cdot 15^2}{10^3}$

a) $2^2 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{(-3)^3}{2^3} = \dfrac{-3^2}{2} = \dfrac{-9}{2}$ b) $\dfrac{1}{2^4} \cdot \dfrac{3^2}{2} \cdot \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{3^2}{2^8} = \dfrac{9}{256}$

c) $\dfrac{(-5)^3 \cdot (-2^3)^3 \cdot (-3^2)^2}{3^2 \cdot 5^2 \cdot (2^2 \cdot 5)^4} = \dfrac{5^3 \cdot 2^9 \cdot 3^4}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^8 \cdot 5^4} = \dfrac{2 \cdot 3^2}{5^3} = \dfrac{18}{125}$

d) $\dfrac{3^2 \cdot 5^2}{-2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^3 \cdot 5^3} = -\dfrac{3}{5^2 \cdot 2^4} = \dfrac{-3}{400}$

13 **Expresa en forma de potencia, efectúa las operaciones y simplifica:**

a) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3} \cdot a^{-1}}{a\sqrt{a}}$

b) $16^{1/4} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{1}{4}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[6]{4}}$

a) $\dfrac{a^{3/4} \cdot a^{-1}}{a \cdot a^{1/2}} = a^{-7/4} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{7}}$

b) $(2^4)^{1/4} \cdot (2^2)^{-1/3} \cdot (2^2)^{-1/6} = 2 \cdot 2^{-2/3} \cdot 2^{-1/3} = 2^0 = 1$

14 **Justifica las igualdades que son verdaderas. Escribe el resultado correcto en las falsas:**

a) $\dfrac{a^2 \cdot b^{-2}}{a^{-2} \cdot b^2} = 1$

b) $(3^{-2})^{-3}\left(\dfrac{1}{27}\right)^2 = 1$

c) $\dfrac{3^{-2} - 5^{-2}}{3^{-1} - 5^{-1}} = \dfrac{8}{15}$

d) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2} - (-3)^{-2} = \dfrac{80}{9}$

a) Falsa. $\dfrac{a^2 \cdot b^{-2}}{a^{-2} \cdot b^2} = \dfrac{a^4}{b^4}$

b) Verdadera. $(3^{-2})^{-3} \cdot \left(\dfrac{1}{27}\right)^2 = 3^6 \cdot \left(\dfrac{1}{3^3}\right)^2 = 3^6 \cdot \dfrac{1}{3^6} = \dfrac{3^6}{3^6} = 1$

c) Verdadera. $\dfrac{3^{-2} - 5^{-2}}{3^{-1} - 5^{-1}} = \dfrac{(1/3^2) - (1/5^2)}{1/3 - 1/5} = \dfrac{(1/3 - 1/5)\,(1/3 + 1/5)}{(1/3 - 1/5)} =$

$= \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{8}{15}$

d) Verdadera. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2} - (-3)^{-2} = 3^2 - \dfrac{1}{(-3)^2} = 3^2 - \dfrac{1}{3^2} = 9 - \dfrac{1}{9} = \dfrac{81 - 1}{9} = \dfrac{80}{9}$

15 **Demuestra, utilizando potencias, que:**

a) $(0{,}125)^{1/3} = 2^{-1}$

b) $(0{,}25)^{-1/2} = 2$

a) $(0{,}125)^{1/3} = \left(\dfrac{125}{1\,000}\right)^{1/3} = \left(\dfrac{1}{8}\right)^{1/3} = \left(\dfrac{1}{2^3}\right)^{1/3} = \dfrac{1}{2} = 2^{-1}$

b) $(0{,}25)^{-1/2} = \left(\dfrac{25}{100}\right)^{-1/2} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-1/2} = \left(\dfrac{1}{2^2}\right)^{-1/2} = (2^2)^{1/2} = 2$

Página 45

Radicales

16 **Introduce los factores dentro de cada raíz:**

a) $2\sqrt[3]{3}$ **b)** $4\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$ **c)** $\dfrac{2}{x}\sqrt{\dfrac{3x}{8}}$

d) $\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{\dfrac{25}{9}}$ **e)** $2\sqrt[4]{4}$ **f)** $\dfrac{1}{5}\sqrt[3]{15}$

a) $\sqrt[3]{3 \cdot 2^3} = \sqrt[3]{24}$

b) $\sqrt[3]{\dfrac{4^3}{4}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{16}$

c) $\sqrt{\dfrac{2^2 \cdot 3x}{x^2 \cdot 2^3}} = \sqrt{\dfrac{3}{2x}}$

d) $\sqrt[3]{\dfrac{3^3 \cdot 5^2}{5^3 \cdot 3^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{3}{5}}$

e) $\sqrt[4]{2^4 \cdot 2^2} = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$

f) $\sqrt[3]{\dfrac{3 \cdot 5}{5^3}} = \sqrt[3]{\dfrac{3}{5^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{3}{25}}$

17 **Saca de la raíz el factor que puedas:**

a) $\sqrt[3]{16}$ **b)** $4\sqrt{8}$ **c)** $\sqrt{1\,000}$

d) $\sqrt[3]{8a^5}$ **e)** $\sqrt{\dfrac{125a^2}{16b}}$ **f)** $\sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9}}$

g) $\sqrt{\dfrac{16}{a^3}}$ **h)** $\sqrt{4a^2 + 4}$ **i)** $\sqrt{\dfrac{a}{9} + \dfrac{a}{16}}$

a) $\sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2}$

b) $4\sqrt{2^3} = 4 \cdot 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

c) $\sqrt{2^3 \cdot 5^3} = 10\sqrt{10}$

d) $\sqrt[3]{2^3 \cdot a^5} = 2a\sqrt[3]{a^2}$

e) $\sqrt{\dfrac{5^3 \cdot a^2}{2^4 \cdot b}} = \dfrac{5a}{4}\sqrt{\dfrac{5}{b}}$

f) $\sqrt{\dfrac{13}{36}} = \dfrac{1}{6}\sqrt{13}$

g) $\dfrac{4}{a}\sqrt{\dfrac{1}{a}}$

h) $\sqrt{4(a^2 + 1)} = 2\sqrt{a^2 + 1}$

i) $\sqrt{\dfrac{25a}{16 \cdot 9}} = \dfrac{5\sqrt{a}}{12}$

18 **Simplifica:**

a) $\sqrt[6]{0,027}$ **b)** $\sqrt[8]{0,0016}$ **c)** $\sqrt[4]{1 + \dfrac{9}{16}}$

a) $\sqrt[6]{\dfrac{27}{1\,000}} = \sqrt[6]{\dfrac{3^3}{10^3}} = \sqrt[6]{\left(\dfrac{3}{10}\right)^3} = \left(\dfrac{3}{10}\right)^{3/6} = \left(\dfrac{3}{10}\right)^{1/2} = \sqrt{\dfrac{3}{10}}$

b) $\sqrt[8]{\dfrac{16}{10\,000}} = \sqrt[8]{\dfrac{2^4}{10^4}} = \sqrt[8]{\left(\dfrac{2}{10}\right)^4} = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{4/8} = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{1/2} = \sqrt{\dfrac{1}{5}}$

c) $\sqrt[4]{\dfrac{25}{16}} = \sqrt[4]{\dfrac{5^2}{4^2}} = \left(\dfrac{5}{4}\right)^{2/4} = \left(\dfrac{5}{4}\right)^{1/2} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

19 **Simplifica los siguientes radicales:**

a) $\sqrt[3]{24}$ **b)** $\sqrt[6]{27}$ **c)** $\sqrt[3]{-108}$

d) $\sqrt[12]{64\,y^3}$ **e)** $\sqrt[4]{\dfrac{81}{64}}$ **f)** $\sqrt[8]{625} : \sqrt[4]{25}$

a) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}$ b) $\sqrt[6]{3^3} = 3^{3/6} = 3^{1/2} = \sqrt{3}$ c) $-\sqrt[3]{3^3 \cdot 2^2} = -3\sqrt[3]{2^2}$

d) $\sqrt[12]{2^6 \cdot y^3} = \sqrt[4]{2^2 \cdot y} = \sqrt[4]{2^2} \cdot \sqrt[4]{y} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{y}$

e) $\sqrt[4]{\dfrac{3^4}{2^6}} = \dfrac{3}{\sqrt{2^3}} = \dfrac{3}{2\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

f) $\sqrt[8]{5^4} : \sqrt[4]{5^2} = \sqrt{5} : \sqrt{5} = 1$

20 **Reduce a índice común y ordena de menor a mayor:**

a) $\sqrt[4]{4}, \sqrt[3]{3}, \sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{6}, \sqrt[3]{4}$ **c)** $\sqrt[4]{6}, \sqrt[5]{10}$ **d)** $\sqrt[4]{72}, \sqrt[3]{9}, \sqrt[6]{100}$

a) $\sqrt[12]{64}, \sqrt[12]{81}, \sqrt[12]{64}$; $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt[6]{216}, \sqrt[6]{16}$; $\sqrt[3]{4} < \sqrt{6}$

c) $\sqrt[20]{7\,776}, \sqrt[20]{10\,000}$; $\sqrt[4]{6} < \sqrt[5]{10}$

d) $\sqrt[12]{373\,248}, \sqrt[12]{6\,561}, \sqrt[12]{10\,000}$; $\sqrt[3]{9} < \sqrt[6]{100} < \sqrt[4]{72}$

21 **Realiza la operación y simplifica si es posible:**

a) $4\sqrt{27} \cdot 5\sqrt{6}$ **b)** $2\sqrt{\dfrac{4}{3}} \cdot \sqrt{\dfrac{27}{8}}$ **c)** $\sqrt{2}\sqrt{\dfrac{1}{8}}$

d) $\left(\sqrt[3]{12}\right)^2$ **e)** $\left(\sqrt[6]{32}\right)^3$ **f)** $\sqrt[3]{24} : \sqrt[3]{3}$

a) $20\sqrt{27 \cdot 6} = 20\sqrt{3^3 \cdot 2 \cdot 3} = 20\sqrt{2 \cdot 3^4} = 180\sqrt{2}$

b) $2\sqrt{\dfrac{4 \cdot 27}{3 \cdot 8}} = 2\sqrt{\dfrac{9}{2}} = 6\sqrt{\dfrac{1}{2}}$

c) $\sqrt{\dfrac{2}{8}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$

d) $\left(\sqrt[3]{2^2 \cdot 3}\right)^2 = \sqrt[3]{2^4 \cdot 3^2} = 2\sqrt[3]{2 \cdot 3^2} = 2\sqrt[3]{18}$

e) $\left(\sqrt[6]{2^5}\right)^3 = \sqrt[6]{2^{15}} = \sqrt{2^5} = 2^2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

f) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} : \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3} : \sqrt[3]{3} = 2$

22 **Efectúa y simplifica, si es posible:**

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}$ **b)** $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{1}{a}}\ \sqrt{a}$ **c)** $\left(\dfrac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt{8}}\right)^3$ **d)** $\sqrt[3]{2\sqrt{3}} : \sqrt{\sqrt[3]{4}}$

En b) y c) puedes expresar los radicales como potencias de bases a y 2, respectivamente.

a) $\sqrt[6]{2^2 \cdot 3^3} = \sqrt[6]{108}$

b) $\sqrt[3]{a} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[3]{a}} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a}$

c) $\left(\sqrt[6]{\dfrac{2^5}{2^9}}\right)^3 = \left(\sqrt[6]{\dfrac{1}{2^4}}\right)^3 = \sqrt[6]{\dfrac{1}{2^{12}}} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{2^2 \cdot 3}} : \sqrt{\sqrt[3]{2^2}} = \sqrt[6]{2^2 \cdot 3} : \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{3}$

23 **Expresa con solo una raíz:**

a) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{4}}$ **b)** $\sqrt[3]{2\sqrt[4]{8}}$ **c)** $\left(\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[5]{a^4}\right) : \sqrt{a}$

a) $\sqrt[12]{4}$

b) $\sqrt[12]{2^4 \cdot 2^3} = \sqrt[12]{2^7} = \sqrt[12]{128}$

c) $\sqrt[20]{\dfrac{a^{15} \cdot a^{16}}{a^{10}}} = \sqrt[20]{a^{21}} = a\sqrt[20]{a}$

24 **Racionaliza los denominadores y simplifica:**

a) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{18}}$ **b)** $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}}$ **c)** $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$ **d)** $\dfrac{3}{3+\sqrt{3}}$ **e)** $\dfrac{\sqrt{72}+3\sqrt{32}-\sqrt{8}}{\sqrt{8}}$

a) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2 \cdot 3^2}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3 \cdot 2} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

b) $\dfrac{2\sqrt[3]{4}}{2} = \sqrt[3]{4}$

c) $\dfrac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2}}{2} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$

d) $\dfrac{3(3-\sqrt{3})}{9-3} = \dfrac{9-3\sqrt{3}}{6} = \dfrac{3(3-\sqrt{3})}{2 \cdot 3} = \dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

e) $\dfrac{\sqrt{2^3 \cdot 3^2}+3\sqrt{2^5}-\sqrt{2^3}}{\sqrt{2^3}} = \dfrac{3\sqrt{8}+6\sqrt{8}-\sqrt{8}}{\sqrt{8}} = \dfrac{8\sqrt{8}}{\sqrt{8}} = 8$

25 **Calcula y simplifica:**

a) $5\sqrt{125} + 6\sqrt{45} - 7\sqrt{20} + \frac{3}{2}\sqrt{80}$ **b)** $\sqrt[3]{16} + 2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{54} - \frac{21}{5}\sqrt[3]{250}$

c) $\sqrt{125} + \sqrt{54} - \sqrt{45} - \sqrt{24}$ **d)** $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{6} - 1\right)$

a) $25\sqrt{5} + 18\sqrt{5} - 14\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = 35\sqrt{5}$

b) $2\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} - 21\sqrt[3]{2} = -20\sqrt[3]{2}$

c) $5\sqrt{5} + 3\sqrt{6} - 3\sqrt{5} - 2\sqrt{6} = 2\sqrt{5} + \sqrt{6}$

d) $\sqrt{12} - \sqrt{2} + \sqrt{18} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{3} = \sqrt{3} + 2\sqrt{2}$

26 **Simplifica al máximo las siguientes expresiones:**

a) $3\sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{250} + 5\sqrt[3]{54} - 4\sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt{\frac{2}{5}} - 4\sqrt{\frac{18}{125}} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8}{45}}$

c) $7\sqrt[3]{81a} - 2\sqrt[3]{3a^4} + \frac{\sqrt[3]{3a}}{5}$

a) $3\sqrt[3]{2^4} - 2\sqrt[3]{2 \cdot 5^3} + 5\sqrt[3]{2 \cdot 3^3} - 4\sqrt[3]{2} = 6\sqrt[3]{2} - 10\sqrt[3]{2} + 15\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{2} = 7\sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt{\frac{2}{5}} - 4\sqrt{\frac{2 \cdot 3^2}{5^3}} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2^3}{3^2 \cdot 5}} = \sqrt{\frac{2}{5}} - \frac{12}{5}\sqrt{\frac{2}{5}} + \frac{2}{9}\sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{-53}{45}\sqrt{\frac{2}{5}}$

c) $7\sqrt[3]{3^4 \cdot a} - 2\sqrt[3]{3a^4} + \frac{\sqrt[3]{3a}}{5} = 21\sqrt[3]{3a} - 2a\sqrt[3]{3a} + \frac{\sqrt[3]{3a}}{5} = \left(\frac{106}{5} - 2a\right)\sqrt[3]{3a}$

27 **Efectúa y simplifica:**

a) $\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2$ **b)** $\left(\sqrt{6} + \sqrt{5}\right) 2\sqrt{2}$

c) $\left(\sqrt{5} - \sqrt{6}\right)\left(\sqrt{5} + \sqrt{6}\right)$ **d)** $\left(2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}\right)^2$

e) $\left(\sqrt{2} - 1\right)\left(\sqrt{2} + 1\right)\sqrt{3}$

a) $\left(\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2}\right) \cdot \left(\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2}\right) = 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{6}$

b) $2\sqrt{12} + 2\sqrt{10} = 4\sqrt{3} + 2\sqrt{10}$

c) $5 - 6 = -1$

d) $20 + 18 - 12\sqrt{10} = 38 - 12\sqrt{10}$

e) $(2 - 1)\sqrt{3} = \sqrt{3}$

28 **Racionaliza y simplifica:**

a) $\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$ **b)** $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{12}}$ **c)** $\dfrac{1}{2\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}$

d) $\dfrac{3}{\sqrt{5}-2}$ **e)** $\dfrac{11}{2\sqrt{5}+3}$ **f)** $\dfrac{3\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+2}$

a) $\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot 3^2}} = \dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{6}-2}{3\cdot 2} =$

$= \dfrac{2\left(\sqrt{6}-1\right)}{3\cdot 2} = \dfrac{\sqrt{6}-1}{3}$

b) $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2^2\cdot 3}} = \dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \dfrac{6+\sqrt{6}}{6} = 1+\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

c) $\dfrac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{2\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)} = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2(3-5)} = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{-4} = -\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{4}$

d) $\dfrac{3\left(\sqrt{5}+2\right)}{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)} = \dfrac{3\left(\sqrt{5}+2\right)}{5-4} = 3\left(\sqrt{5}+2\right) = 3\sqrt{5}+6$

e) $\dfrac{11\left(2\sqrt{5}-3\right)}{\left(2\sqrt{5}+3\right)\left(2\sqrt{5}-3\right)} = \dfrac{11\left(2\sqrt{5}-3\right)}{20-9} = \dfrac{11\left(2\sqrt{5}-3\right)}{11} = 2\sqrt{5}-3$

f) $\dfrac{\left(3\sqrt{6}+2\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{3}-2\right)}{\left(3\sqrt{3}+2\right)\left(3\sqrt{3}-2\right)} = \dfrac{9\sqrt{18}-6\sqrt{6}+6\sqrt{6}-4\sqrt{2}}{27-4} = \dfrac{9\sqrt{2\cdot 3^2}-4\sqrt{2}}{23} =$

$= \dfrac{27\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{23} = \dfrac{23\sqrt{2}}{23} = \sqrt{2}$

29 **Racionaliza y efectúa:**

a) $\dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} - \dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

a) $\dfrac{3\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)-2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)} = \dfrac{3\sqrt{3}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}+5\sqrt{2}$

b) $\dfrac{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)^2}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)} = \dfrac{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}+\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}-\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)}{7-5} =$

$= \dfrac{2\sqrt{7}\left(-2\sqrt{5}\right)}{2} = -2\sqrt{35}$

Página 46

30 **Opera y simplifica:** $\dfrac{1}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}}$

$$\frac{1}{\dfrac{1+\sqrt{3}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}}+\frac{1}{\dfrac{1-\sqrt{3}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}}=1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}=2$$

Notación científica

31 **Efectúa y da el resultado en notación científica con tres cifras significativas:**

a) $\dfrac{(3{,}12\cdot 10^{-5}+7{,}03\cdot 10^{-4})\,8{,}3\cdot 10^{8}}{4{,}32\cdot 10^{3}}$

b) $\dfrac{(12{,}5\cdot 10^{7}-8\cdot 10^{9})(3{,}5\cdot 10^{-5}+185)}{9{,}2\cdot 10^{6}}$

c) $\dfrac{5{,}431\cdot 10^{3}-6{,}51\cdot 10^{4}+385\cdot 10^{2}}{8{,}2\cdot 10^{-3}-2\cdot 10^{-4}}$

a) $1{,}41\cdot 10^{2}$ b) $-1{,}58\cdot 10^{5}$ c) $-2{,}65\cdot 10^{6}$

32 **Ordena de mayor a menor los números de cada apartado. Para ello, pasa a notación científica los que no lo estén:**

a) $3{,}27\cdot 10^{13};\ 85{,}7\cdot 10^{12};\ 453\cdot 10^{11}$

b) $1{,}19\cdot 10^{-9};\ 0{,}05\cdot 10^{-7};\ 2\,000\cdot 10^{-12}$

a) $8{,}57\cdot 10^{13} > 4{,}53\cdot 10^{13} > 3{,}27\cdot 10^{13}$

b) $5\cdot 10^{-9} > 2\cdot 10^{-9} > 1{,}19\cdot 10^{-9}$

33 **Efectúa:** $\dfrac{2\cdot 10^{-7}-3\cdot 10^{-5}}{4\cdot 10^{6}+10^{5}}$

$-7{,}268\cdot 10^{-12}$

34 **Expresa en notación científica y calcula:** $\dfrac{60\,000^{3}\cdot 0{,}00002^{4}}{100^{2}\cdot 72\,000\,000\cdot 0{,}0002^{5}}$

$$\frac{(6\cdot 10^{4})^{3}\cdot(2\cdot 10^{-5})^{4}}{10^{4}\cdot 7{,}2\cdot 10^{7}\cdot(2\cdot 10^{-4})^{5}}=150$$

35 **Considera los números:** $A=3{,}2\cdot 10^{7}$ **;** $B=5{,}28\cdot 10^{4}$ **y** $C=2{,}01\cdot 10^{5}$**.**

Calcula $\dfrac{B+C}{A}$**.**

$0{,}00793125=7{,}93125\cdot 10^{-3}$

36 **Si $A = 3{,}24 \cdot 10^6$; $B = 5{,}1 \cdot 10^{-5}$; $C = 3{,}8 \cdot 10^{11}$ y $D = 6{,}2 \cdot 10^{-6}$, calcula $\left(\frac{A}{B} + C\right) \cdot D$.**

$2\,749\,882{,}353 \approx 2{,}7499 \cdot 10$

Intervalos y valor absoluto

37 **Expresa como desigualdad y como intervalo y represéntalos:**

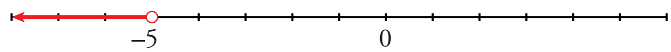
a) x es menor que –5.

b) 3 es menor o igual que x.

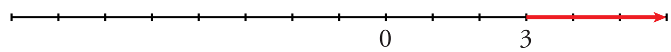
c) x está comprendido entre –5 y 1.

d) x está entre –2 y 0, ambos incluidos.

a) $x < -5$; $(-\infty, -5)$

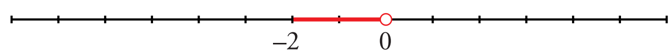


b) $3 \le x$; $[3, +\infty)$



c) $-5 < x < 1$; $(-5, 1)$

d) $-2 \le x \le 0$; $[-2, 0]$

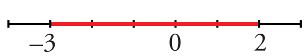


38 **Representa gráficamente y expresa como intervalos estas desigualdades:**

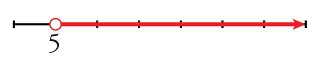
a) $-3 \le x \le 2$ **b) $5 < x$** **c) $x \ge -2$**

d) $-2 \le x < 3/2$ **e) $4 < x < 4{,}1$** **f) $-3 \le x$**

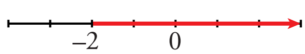
a) $[-3, 2]$



b) $(5, +\infty)$

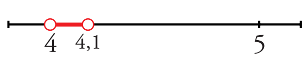


c) $[-2, +\infty)$

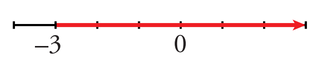


d) $\left[-2, \frac{3}{2}\right)$

e) $(4; 4{,}1)$



f) $[-3, +\infty)$



39 **Escribe la desigualdad que verifica todo número x que pertenece a estos intervalos:**

a) $[-2, 7]$ **b) $[13, +\infty)$** **c) $(-\infty, 0)$**

d) $(-3, 0]$ **e) $[3/2, 6)$** **f) $(-\infty, +\infty)$**

a) $-2 \le x \le 7$ b) $x \ge 13$ c) $x < 0$

d) $-3 < x \le 0$ e) $\frac{3}{2} \le x < 6$ f) $-\infty < x < +\infty$

40 **Expresa como intervalo la parte común de cada pareja de intervalos $(A \cap B)$ e $(I \cap J)$:**

a) $A = [-3, 2]$; $B = [0, 5]$ **b) $I = [2, \infty)$; $J = (0, 10)$**

a) $[0, 2]$ b) $[2, 10]$

41 **Escribe en forma de intervalos los números que verifican estas desigualdades:**

a) $x < 3$ **y** $x \geq 5$ **b)** $x > 0$ **y** $x < 4$

c) $x \leq -1$ **y** $x > 1$ **d)** $x < 3$ **y** $x \leq -2$

☛ ***Represéntalos gráficamente, y si son dos intervalos separados, como en a), escribe:*** $(-\infty, 3) \cup [5, +\infty)$

a) $(-\infty, 3) \cup [5, \infty)$ b) $(0, 4)$

c) $(-\infty, -1] \cup (1, \infty)$ d) $(-\infty, -2]$

42 **Expresa, en forma de intervalo, los números que cumplen cada una de estas expresiones:**

a) $|x| < 7$ **b)** $|x| \geq 5$ **c)** $|2x| < 8$

d) $|x - 1| \leq 6$ **e)** $|x + 2| > 9$ **f)** $|x - 5| \geq 1$

a) $(-7, 7)$ b) $[-\infty, -5] \cup [5, +\infty]$ c) $(-4, 4)$

d) $[-5, 7]$ e) $(-11, 7)$ f) $(-\infty, 4] \cup [6, +\infty)$

43 **Averigua qué valores de** x **cumplen:**

a) $|x - 2| = 5$ **b)** $|x - 4| \leq 7$ **c)** $|x + 3| \geq 6$

a) 7 y –3

b) $-3 \leq x \leq 11$; $[-3, 11]$

c) $x \leq -9$ y $x \geq 3$; $(-\infty, -9) \cup [3, \infty)$

44 **Escribe, mediante intervalos, los valores que puede tener** x **para que se pueda calcular la raíz en cada caso:**

a) $\sqrt{x - 4}$ **b)** $\sqrt{2x + 1}$ **c)** $\sqrt{-x}$

d) $\sqrt{3 - 2x}$ **e)** $\sqrt{-x - 1}$ **f)** $\sqrt{1 + \dfrac{x}{2}}$

a) $x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$; $[4, +\infty)$

b) $2x + 1 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq -1 \Rightarrow x \geq -\dfrac{1}{2}$; $\left[-\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$

c) $-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$; $(-\infty, 0]$

d) $3 - 2x \geq 0 \Rightarrow 3 \geq 2x \Rightarrow x \leq \dfrac{3}{2}$; $\left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right]$

e) $-x - 1 \geq 0 \Rightarrow -1 \geq x$; $(-\infty, -1]$

f) $1 + \dfrac{x}{2} \geq 0 \Rightarrow 2 + x \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$; $[-2, +\infty)$

45 **Halla la distancia entre los siguientes pares de números:**

a) 7 y 3 b) 5 y 11 c) –3 y –9 d) –3 y 4

a) $|7 - 3| = 4$ b) $|11 - 5| = 6$

c) $|-9 - (-3)| = |-9 + 3| = |-6| = 6$

d) $|4 - (-3)| = 7$

46 **Expresa como un único intervalo:**

a) (1, 6] ∪ [2, 5) b) [–1, 3) ∪ (0, 3] c) (1, 6] ∩ [2, 7) d) [–1, 3) ∩ (0, 4)

a) $(1, 6] \cup [2, 5) = (1, 6]$ b) $[-1, 3) \cup (0, 3] = [-1, 3]$

c) $(1, 6] \cap [2, 7) = [2, 6]$ d) $[-1, 3) \cap (0, 4) = (0, 3)$

Página 47

47 **Escribe en forma de intervalo los siguientes entornos:**

a) Centro –1 y radio 2 b) Centro 2,5 y radio 2,01

c) Centro 2 y radio 1/3

a) $(-1 - 2, -1 + 2) = (-3, 1)$ b) $(2{,}5 - 2{,}01;\ 2{,}5 + 2{,}01) = (0{,}49;\ 4{,}51)$

c) $\left(2 - \frac{1}{3}, 2 + \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$

48 **Describe como entornos los siguientes intervalos:**

a) (–1, 2) b) (1,3; 2,9) c) (–2,2; 0,2) d) (–4; –2,8)

a) $C = \frac{-1 + 2}{2} = \frac{1}{2}$; $R = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Entorno de centro $\frac{1}{2}$ y radio $\frac{3}{2}$.

b) $C = \frac{1{,}3 + 2{,}9}{2} = 2{,}1$; $R = 2{,}9 - 2{,}1 = 0{,}8$

Entorno de centro 2,1 y radio 0,8

c) $C = \frac{-2{,}2 + 0{,}2}{2} = -1$; $R = 0{,}2 - (-1) = 1{,}2$

Entorno de centro –1 y radio 1,2.

d) $C = \frac{-4 + (-2{,}8)}{2} = -3{,}4$; $R = -2{,}8 - (-3{,}4) = 0{,}6$

Entorno de centro –3,4 y radio 0,6.

49 **Comprueba si es verdadera o falsa cada una de las siguientes expresiones:**

a) $|a| < b$ **equivale a** $-b < a < b$ **b)** $|-a| = -|a|$

c) $|a + b| = |a| + |b|$ **d)** $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

a) Verdadera (siempre que $b > 0$).

b) Falsa; pues $-|a| \geq 0$ y $-|a| \leq 0$.

(Solo sería cierta para $a = 0$).

c) Falsa. Solo es cierta cuando a y b tienen el mismo signo.

En general, $|a + b| \leq |a| + |b|$.

d) Verdadera.

Logaritmos

50 **Calcula:**

a) $\log_2 1\,024$ **b)** $\log 0{,}001$ **c)** $\log_2 \frac{1}{64}$ **d)** $\log_{\sqrt{3}} 3$

e) $\log_3 \sqrt{3}$ **f)** $\log_2 \sqrt{8}$ **g)** $\log_{1/2} \frac{1}{\sqrt{2}}$ **h)** $\log_\pi 1$

a) $\log_2 2^{10} = 10$ b) $\log 10^{-3} = -3$ c) $\log_2 2^{-6} = -6$

d) $\log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^2 = 2$ e) $\log_3 3^{1/2} = \frac{1}{2}$ f) $\log_2 2^{3/2} = \frac{3}{2}$

g) $\log_{1/2} \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} = \frac{1}{2}$ h) 0

51 **Calcula, utilizando la definición de logaritmo:**

a) $\log_2 64 + \log_2 \frac{1}{4} - \log_3 9 - \log_2 \sqrt{2}$ **b)** $\log_2 \frac{1}{32} + \log_3 \frac{1}{27} - \log_2 1$

a) $6 - 2 - 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

b) $-5 - 3 - 0 = -8$

52 **Calcula la base de estos logaritmos:**

a) $\log_x 125 = 3$ **b)** $\log_x \frac{1}{9} = -2$

a) $x^3 = 125$; $x = 5$

b) $x^{-2} = \frac{1}{9}$; $x = 3$

53 **Calcula el valor de x en estas igualdades:**

a) $\log 3^x = 2$ **b)** $\log x^2 = -2$ **c)** $7^x = 115$ **d)** $5^{-x} = 3$

a) $x = \dfrac{2}{\log 3} = 4{,}19$

b) $2 \log x = -2;\ \ x = \dfrac{1}{10}$

c) $x = \dfrac{\log 115}{\log 7} = 2{,}438$

d) $x = -\dfrac{\log 3}{\log 5} = -0{,}683$

54 **Halla con la calculadora y comprueba el resultado con la potenciación.**

a) $\log \sqrt{148}$ **b)** $\log 2{,}3 \cdot 10^{11}$ **c)** $\log 7{,}2 \cdot 10^{-5}$

d) $\log_3 42{,}9$ **e)** $\log_5 1{,}95$ **f)** $\log_2 0{,}034$

a) 1,085

b) $\ln(2{,}3 \cdot 10^{11}) \approx 26{,}16 \ \rightarrow\ e^{26{,}161} \approx 2{,}3 \cdot 10^{11}$

c) $\ln(7{,}2 \cdot 10^{-5}) \approx -9{,}54 \ \rightarrow\ e^{-9{,}54} \approx 7{,}2 \cdot 10^{-5}$

d) 3,42

e) 0,41

f) –4,88

55 **Calcula la base de cada caso:**

a) $\log_x 1/4 = 2$ **b)** $\log_x 2 = 1/2$ **c)** $\log_x 0{,}04 = -2$ **d)** $\log_x 4 = -1/2$

Aplica la definición de logaritmo y las propiedades de las potencias para despejar x.

En c), $x^{-2} = 0{,}04 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{4}{100}$.

a) $x^2 = \dfrac{1}{4} \ \rightarrow\ x = \dfrac{1}{2}$

b) $x^{1/2} = 2 \ \rightarrow\ x = 4$

c) $x^{-2} = 0{,}04 \ \rightarrow\ x = 5$

d) $x^{-1/2} = 4 \ \rightarrow\ x = \dfrac{1}{16}$

56 **Halla el valor de x en estas expresiones aplicando las propiedades de los logaritmos:**

a) $\ln x = \ln 17 + \ln 13$ **b)** $\log x = \log 36 - \log 9$

c) $\ln x = 3 \ln 5$ **d)** $\log x = \log 12 + \log 25 - 2 \log 6$

e) $\ln x = 4 \ln 2 - \dfrac{1}{2} \ln 25$

a) Por logaritmo de un producto: $\ln x = \ln(17 \cdot 13)$

a) $\ln x = \ln(17 \cdot 13) \ \Rightarrow\ x = 17 \cdot 13 = 221$

b) $\log x = \log \dfrac{36}{9} \ \Rightarrow\ x = \dfrac{36}{9} = 4$

c) $\ln x = \ln 5^3 \ \Rightarrow\ x = 5^3 = 125$

d) $\log x = \log \dfrac{12 \cdot 25}{6^2} \ \Rightarrow\ x = \dfrac{25}{3}$

e) $ln\ x = ln\ 2^4 - ln \sqrt{25}$

$ln\ x = ln\ 16 - ln\ 5$

$ln\ x = ln \frac{16}{5} \Rightarrow x = \frac{16}{5}$

57 **Sabiendo que $log\ 3 = 0{,}477$, calcula el logaritmo decimal de 30; 300; 3 000; 0,3; 0,03; 0,003.**

$log\ 30 = log\ (3 \cdot 10) = log\ 3 + log\ 10 = 0{,}477 + 1 = 1{,}477$

$log\ 300 = log\ (3 \cdot 10^2) = log\ 3 + 2\ log\ 10 = 2{,}477$

$log\ 3\,000 = 0{,}477 + 3 = 3{,}477$

$log\ 0{,}3 = log\ (3 \cdot 10^{-1}) = 0{,}477 - 1 = -0{,}523$

$log\ 0{,}03 = log\ (3 \cdot 10^{-2}) = 0{,}477 - 2 = -1{,}523$

$log\ 0{,}003 = 0{,}477 - 3 = -2{,}523$

58 **Sabiendo que $log\ k = 14{,}4$, calcula el valor de las siguientes expresiones:**

a) $log \frac{k}{100}$ b) $log\ 0{,}1\ k^2$ c) $log \sqrt[3]{\frac{1}{k}}$ d) $(log\ k)^{1/2}$

a) $log\ k - log\ 100 = 14{,}4 - 2 = 12{,}4$

b) $log\ 0{,}1 + 2\ log\ k = -1 + 2 \cdot 14{,}4 = 27{,}8$

c) $\frac{1}{3}(log\ 1 - log\ k) = -\frac{1}{3} \cdot 14{,}4 = -4{,}8$

d) $(14{,}4)^{1/2} = \sqrt{14{,}4} = 3{,}79$

59 **Sabiendo que $ln\ k = 0{,}45$, calcula el valor de:**

a) $ln \frac{k}{e}$ b) $ln \sqrt[3]{k}$ c) $ln \frac{e^2}{k}$

a) $ln \frac{k}{e} = ln\ k - ln\ e = 0{,}45 - 1 = -0{,}55$

b) $ln \sqrt[3]{k} = \frac{1}{3}\ ln\ k = \frac{1}{3} \cdot 0{,}45 = 0{,}15$

c) $ln \frac{e^2}{k} = 2\ ln\ e - ln\ k = 2 - 0{,}45 = 1{,}55$

60 **Calcula x para que se cumpla:**

a) $x^{2,7} = 19$ b) $log_7\ 3x = 0{,}5$ c) $3^{2+x} = 172$

a) $log\ x^{2,7} = log\ 19 \Rightarrow 2{,}7\ log\ x = log\ 19 \Rightarrow log\ x = \frac{log\ 19}{2{,}7} = 0{,}47$

$x = 10^{0,47} = 2{,}98$

b) $7^{0,5} = 3x \Rightarrow x = \dfrac{7^{0,5}}{3} = 0,88$

c) $\log 3^{2+x} = \log 172 \Rightarrow (2+x)\log 3 = \log 172 \Rightarrow 2 + x = \dfrac{\log 172}{\log 3}$

$$x = \frac{\log 172}{\log 3} - 2 = 2,685$$

61 Si $\log k = x$, escribe en función de x:

a) $\log k^2$ **b) $\log \dfrac{k}{100}$** **c) $\log \sqrt{10k}$**

a) $2 \log k = 2x$ b) $\log k - \log 100 = x - 2$ c) $\dfrac{1}{2} \log 10k = \dfrac{1}{2}(1+x)$

62 Comprueba que $\dfrac{\log(1/a) + \log\sqrt{a}}{\log a^3} = -\dfrac{1}{6}$ (siendo $a \neq 1$).

$$\frac{-\log a + 1/2 \log a}{3 \log a} = \frac{-1/2 \log a}{3 \log a} = -\frac{1}{6}$$

Ha de ser $a \neq 1$ para que $\log a \neq 0$ y podamos simplificar.

Página 48

PARA RESOLVER

63 En 18 g de agua hay $6,02 \cdot 10^{23}$ moléculas de este compuesto. ¿Cuál es la masa, en gramos, de una molécula de agua?

$18 : (6,02 \cdot 10^{23}) = 2,99 \cdot 10^{-23}$ gramos

64 Tenemos un hilo de cobre de 3 mm de diámetro. ¿Qué longitud debemos tomar para que la resistencia sea de 20 omhios?

Resistividad del cobre: $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot m$

☞ ***La resistencia viene dada por la fórmula $R = \dfrac{\rho l}{s}$, donde l es la longitud y s la sección del hilo.***

$$l = \frac{R \cdot s}{\rho} = \frac{20 \cdot \pi \cdot (0,0015)^2}{1,7 \cdot 10^{-8}} = 8\,315,98 \text{ metros}$$

65 La velocidad mínima que debe llevar un cuerpo para que escape del campo gravitatorio terrestre es $v = \dfrac{2\,GM}{R}$ en la que G es la constante de gravitación universal, M la masa de la Tierra y R el radio de la Tierra. Calcula v, sabiendo que:

$G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m²/kg², $M = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg y $R = 6,37 \cdot 10^6$ m.

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{6{,}37 \cdot 10^{6}}} = 11\,190{,}74 \text{ m/s}$$

66 **Comprueba que $\sqrt{6 + \sqrt{27}} \cdot \sqrt{6 - \sqrt{27}}$ es un número entero.**

$$\sqrt{6 + \sqrt{27}} \cdot \sqrt{6 - \sqrt{27}} = \left(6 + \sqrt{27}\right)\left(6 - \sqrt{27}\right) =$$
$$= 6^2 - \left(\sqrt{27}\right)^2 = \sqrt{36 - 27} = \sqrt{9} = 3$$

67 **Efectúa las siguientes operaciones y simplifica:**

a) $\sqrt{a^3} - 2a\sqrt[4]{a^2} + 3a\sqrt[6]{a^3} - \sqrt[8]{a^{12}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{98} - \sqrt{18}}{\sqrt{96}} \cdot 30\sqrt{3}$

c) $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{6} - 1\right)$

a) $a\sqrt{a} - 2a\sqrt{a} + 3a\sqrt{a} - a\sqrt{a} = \sqrt{a}$

b) $\dfrac{7\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{\sqrt{2^5 \cdot 3}} \cdot 30\sqrt{3} = \dfrac{4\sqrt{2} \cdot 30\sqrt{3}}{4\sqrt{2}\sqrt{3}} = 30$

c) $\sqrt{12} - \sqrt{2} + \sqrt{18} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{3} = \sqrt{3} + 2\sqrt{2}$

68 **Efectúa las siguientes operaciones y simplifica:**

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2} - 1} - \dfrac{1}{\sqrt{2} + 1}$ **b)** $\dfrac{7}{3 - \sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} + \dfrac{1}{2 - \sqrt{3}}$

c) $\dfrac{5}{\sqrt{6}} + \dfrac{2}{\sqrt{6} + 3\sqrt{2}} - \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

a) $\dfrac{\left(\sqrt{2} + 1\right) - \left(\sqrt{2} - 1\right)}{\left(\sqrt{2} - 1\right)\left(\sqrt{2} + 1\right)} = \dfrac{\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} + 1}{2 - 1} = 2$

b) $\dfrac{7\left(3 + \sqrt{2}\right)}{9 - 2} - \dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{3 - 2} + \dfrac{2 + \sqrt{3}}{4 - 3} = \dfrac{7\left(3 + \sqrt{2}\right)}{7} - \sqrt{3} - \sqrt{2} + 2 + \sqrt{3} =$

$= 3 + \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{2} + 2 + \sqrt{3} = 5$

c) $\dfrac{5\sqrt{6}}{6} + \dfrac{2\left(\sqrt{6} - 3\sqrt{2}\right)}{6 - 18} - \dfrac{4\sqrt{6}}{3} = \dfrac{5\sqrt{6}}{6} + \dfrac{2\left(\sqrt{6} - 3\sqrt{2}\right)}{-12} - \dfrac{4\sqrt{6}}{3} =$

$= \dfrac{5\sqrt{6}}{6} - \dfrac{\left(\sqrt{6} - 3\sqrt{2}\right)}{6} - \dfrac{4\sqrt{6}}{3} = \dfrac{5\sqrt{6} - \sqrt{6} + 3\sqrt{2} - 8\sqrt{6}}{6} = \dfrac{3\sqrt{2} - 4\sqrt{6}}{6} =$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

CUESTIONES TEÓRICAS

69 **Explica si estas frases son verdaderas o falsas:**

a) Todo número entero es racional.

b) Hay números irracionales que son enteros.

c) Todo número irracional es real.

d) Algunos números enteros son naturales.

e) Hay números decimales que no pueden ser expresados como una fracción.

f) Todos los números decimales son racionales.

g) Entre dos números enteros hay siempre otro número entero.

h) Entre dos números racionales siempre hay infinitos números racionales.

i) Entre dos números racionales hay infinitos números irracionales.

j) Los números racionales llenan la recta.

a) V	b) F	c) V	d) V	e) V
f) F	g) F	h) V	i) V	j) F

70 **Si $x \in \mathbb{R}$, explica si es verdadera o falsa cada una de estas afirmaciones:**

a) x^2 es siempre positivo o nulo.

b) x^3 es siempre positivo o nulo.

c) $\sqrt[3]{x}$ solo existe si $x \geq 0$.

d) x^{-1} es negativo si lo es x.

e) $-x^2$ es siempre negativo.

a) V b) F c) F d) V e) F (puede ser nulo)

71 **¿Cuál es la respuesta correcta?**

a) $(-27)^{\frac{1}{3}} \to 3;\ -3;\ -9$ **b)** $4^{-\frac{1}{2}} \to 1/\sqrt{2};\ 2^{-1};\ -2$

a) -3 b) 2^{-1}

72 **¿Entre qué números enteros está el logaritmo decimal de 348?**

☞ ***$10^2 < 348 < 10^3$. Toma logaritmos.***

Entre 2 y 3.

73 **Si $log\ x = a$, ¿cuál será el valor de $log\ \frac{1}{x}$?**

$log\ 1 - log\ x = -log\ x = -a$

74 **¿Cuáles de estas igualdades son verdaderas? Explica por qué:**

a) $\log m + \log n = \log (m + n)$

b) $\log m + \log n = \log (m \cdot n)$

c) $\log m - \log n = \dfrac{\log m}{\log n}$

d) $\log m - \log n = \log \dfrac{m}{n}$

e) $\log x^2 = \log x + \log x$

f) $\log (a^2 - b^2) = \log (a + b) + \log (a - b)$

a) Falso. $\log m + \log n = \log (m \cdot n) \neq \log (m + n)$

b) Verdadero. Es una propiedad de los logaritmos.

c) Falso. $\log m - \log n = \log \left(\dfrac{m}{n}\right) \neq \dfrac{\log m}{\log n}$

d) Verdadero. Por una propiedad de los logaritmos.

e) Verdadero. $\log x^2 = \log (x \cdot x) = \log x + \log x$

f) Verdadero. $\log (a^2 - b^2) = \log [(a + b) \cdot (a - b)] = \log (a + b) + \log (a - b)$

Página 49

PARA PROFUNDIZAR

75 **Si $n \neq 0$ es natural, determina para qué valores de n estos números pertenecen a $\mathbb{Z}$:**

a) $\dfrac{n}{2}$ **b)** $\dfrac{3}{n}$ **c)** $n - 5$ **d)** $n + \dfrac{1}{2}$ **e)** $\sqrt{n}$

a) n par.

b) $n = 1$ o $n = 3$.

c) n cualquier natural.

d) Ninguno.

e) n cuadrado perfecto.

76 **Si $\log a = 1 + \log b$, ¿qué relación hay entre a y b?**

$\log a - \log b = 1 \rightarrow \log \dfrac{a}{b} = 1 \rightarrow \dfrac{a}{b} = 10 \rightarrow a = 10b$

77 **Si $\log a + \log b = 0$, ¿qué relación existe entre a y b?**

$\log (ab) = 0 \rightarrow ab = 1 \rightarrow a = \dfrac{1}{b}$

78 **Sean m y n dos números racionales. ¿Qué puedes decir del signo de m y n en cada uno de estos casos?**

a) $m \cdot n > 0$ **y** $m + n > 0$ **b)** $m \cdot n > 0$ **y** $m + n < 0$

c) $m \cdot n < 0$ **y** $m - n > 0$ **d)** $m \cdot n < 0$ **y** $m - n < 0$

a) $m > 0, \quad n > 0$ b) $m < 0, \quad n < 0$

c) $m > 0, \quad n < 0$ d) $m < 0, \quad n > 0$

79 **Demuestra que el logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.**

Para demostrar que $\log_a (P \cdot Q) = \log_a P + \log_a Q$, ***hacemos:***

$$\left.\begin{array}{l} \log_a P = p \xrightarrow[\text{de logaritmo}]{\text{por definición}} P = a^p \\ \log_a Q = q \longrightarrow Q = a^q \end{array}\right\} \text{multiplica estas igualdades} \Rightarrow P \cdot Q = a^{p+q}$$

Toma logaritmos de base a en esta igualdad y sustituye p y q.

$$\log_a PQ = \log_a a^{p+q} \to \log_a PQ = p + q \to \log_a PQ = \log_a P + \log_a Q$$

80 **Demuestra que el logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor. (Repite el procedimiento anterior dividiendo las igualdades).**

Tenemos que demostrar que $\log_a \left(\dfrac{P}{Q}\right) = \log_a P - \log_a Q$. Hacemos:

$$\left.\begin{array}{l} \log_a P = p \to P = a^p \\ \log_a Q = q \to Q = a^q \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Dividiendo} \to \dfrac{P}{Q} = a^{p-q} \\ \log_a \dfrac{P}{Q} = \log_a a^{p-q} \to \log_a \dfrac{P}{Q} = p - q \end{array}$$

$$\log_a \frac{P}{Q} = \log_a P - \log_a Q$$

81 **Demuestra que el logaritmo de una potencia es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base.**

Hay que demostrar que $\log_a P^n = n \cdot \log_a P$. ***Haz*** $\log_a P = p \to a^p = P$, ***eleva a n los dos miembros de la igualdad y toma*** $\log_a$.

Tenemos que demostrar que $\log_a P^n = n \log_a P$. Hacemos:

$$\log_a P = p \to a^p = P$$

Elevando a n:

$$a^{np} = P^n \to \log_a a^{np} = \log_a P^n$$

$$np = \log_a P^n \to n \log_a P = \log_a P^n \to \log_a P^n = n \log_a P$$

82 **Demuestra que el logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice de la raíz.**

☞ ***Recuerda que*** $\sqrt[n]{p} = p^{1/n}$ ***y repite el proceso del ejercicio anterior.***

Tenemos que probar que $log \sqrt[n]{P} = \dfrac{log\ P}{n}$. Hacemos:

$$log \sqrt[n]{P} = log\ P^{1/n} \overset{(*)}{=} \frac{1}{n}\ log\ P = \frac{log\ P}{n}$$

(*) Ver ejercicio anterior.

83 **Demuestra que** $log_a\ P = log\ P / log\ a$.

☞ ***Haz*** $log_a\ P = p \rightarrow a^p = P$. ***Toma logaritmos decimales y luego despeja*** p.

$a^p = P \rightarrow log\ a^p = log\ P \rightarrow p\ log\ a = log\ P$

Así, $log_a\ P = \dfrac{log\ P}{log\ a}$.

84 **Si** $x \in \mathbb{N}$ **y** $x > 1$, **ordena estos números:**

$$\frac{1}{x+1} \qquad x \qquad \frac{1}{x} \qquad -\frac{1}{x} \qquad \frac{1}{-x-1}$$

$$-\frac{1}{x} < \frac{-1}{x+1} < \frac{1}{x+1} < \frac{1}{x} < x$$

85 **Ordena de menor a mayor los números** a, a^2, $1/a$ **y** $\sqrt{a}$ **en estos dos casos:**

I) Si $a > 1$

II) Si $0 < a < 1$

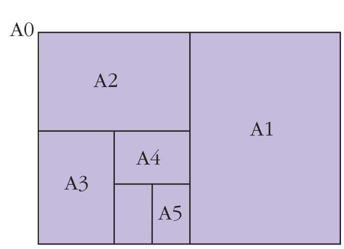
I) $\dfrac{1}{a} < \sqrt{a} < a < a^2$

II) $a^2 < a < \sqrt{a} < \dfrac{1}{a}$

PARA PENSAR UN POCO MÁS

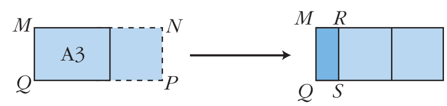
86 **Los tamaños estándar de papel se denominan A0, A1, A2, A3, A4, A5… Cada uno de ellos es la mitad del anterior y semejante a él.**

I **Teniendo en cuenta lo anterior y sabiendo que la superficie de A0 es 1 m², calcula las dimensiones de una hoja A4 (que es la de uso más frecuente) redondeando hasta los milímetros. Comprueba el resultado midiendo una hoja A4 que tengas a mano.**

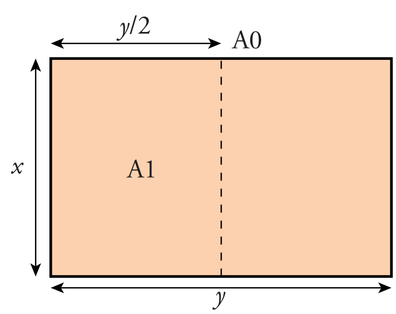


II Demuesta que cualquiera de las hojas anteriores cumple lo siguiente:

Si le añadimos un cuadrado, el rectángulo que se obtiene *MNPQ* tiene la peculiaridad de que al suprimirle dos cuadrados da lugar a otro rectángulo *MRSQ* semejante a él (*MNPQ* semejante a *MRSQ*).



I)



La superficie de A0 es 1 m^2, es decir:

$$x\,y = 1 \text{ m}^2 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$$

Por la semejanza entre A0 y A1, tenemos que:

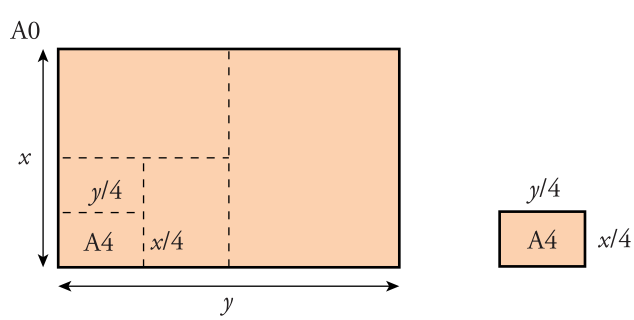
$$\frac{y}{x} = \frac{x}{y/2} \Rightarrow \frac{y^2}{2} = x^2 \Rightarrow y^2 = 2x^2$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 2x^2 \Rightarrow \frac{1}{x^2} = 2x^2 \Rightarrow 1 = 2x^4 \Rightarrow \frac{1}{2} = x^4$$

$$x = \sqrt[4]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \quad y = \sqrt[4]{2}$$

Las dimensiones de A0 son:

$$\text{largo} = \sqrt[4]{2} \text{ m}, \quad \text{ancho} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \text{ m}$$

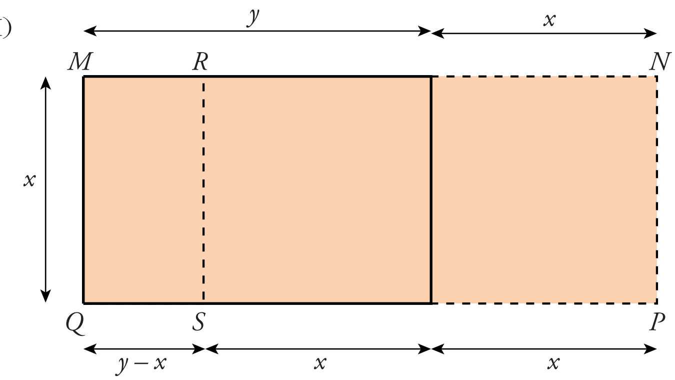


Las dimensiones de A4 serán:

$$\text{largo} = \frac{\sqrt[4]{2}}{4} = 0{,}297 \text{ m} = 29{,}7 \text{ cm} = 297 \text{ mm}$$

$$\text{ancho} = \frac{1}{4\sqrt[4]{2}} = 0{,}210 \text{ m} = 21 \text{ cm} = 210 \text{ mm}$$

II)



La razón entre los lados del rectángulo (A0, A1, …) es: $\frac{y}{x} = \frac{\sqrt[4]{2}}{1/\sqrt[4]{2}} = \left(\sqrt[4]{2}\right)^2 = \sqrt{2}$

(es la misma en A0, A1…, pues todos ellos son semejantes).

La razón entre los lados del rectángulo $MNPQ$ es:

$$\frac{y+x}{x} = \frac{y/x + x/x}{x/x} = \frac{\sqrt{2}+1}{1} = \sqrt{2} + 1$$

Queremos probar que $MRQS$ es semejante a $MNPQ$; para ello bastará ver que:

$$\frac{\overline{MQ}}{\overline{MR}} = \sqrt{2} + 1$$

Veámoslo:

$$\frac{x}{y-x} = \frac{x/x}{y/x - x/x} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2} + 1$$

Como queríamos probar.

87 **Para numerar las páginas de un libro un tipógrafo ha empleado 2 993 dígitos. ¿Cuántas páginas tiene el libro? (El 0, el 1, el 2… son *dígitos*. El número 525 se escribe con tres dígitos).**

Las 9 primeras páginas $\rightarrow$ 9 dígitos

De la 10 a la 99 $\rightarrow$ 90 · 2 = 180 dígitos

De la 100 a la 999 $\rightarrow$ 900 · 3 = 2 700 dígitos

Llevamos: 9 + 180 + 2 700 = 2 889 dígitos

Nos faltan: 2 993 – 2 889 = 104 dígitos, que pertenecen a números de cuatro cifras.

Luego: 104 : 4 = 26 páginas más.

Así: 999 + 26 = 1 025 páginas tiene el libro.